

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

LAURENT SCHWARTZ

La formule d' Atiyah-Singer

Séminaire Henri Cartan, tome 16, n° 1 (1963-1964), exp. n° 7, p. 1-2

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_1_A7_0

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA FORMULE D' ATIYAH-SINGER

par Laurent SCHWARTZ

Soient X une variété compacte de classe C^∞ , E et F deux espaces fibrés à fibre vectorielle (sur le corps $\mathbb{C}$) de classe C^∞ , ayant pour base X . Donnons-nous un opérateur différentiel P qui opère de l'espace $\mathcal{E}(X, E)$ des sections C^∞ de E dans l'espace $\mathcal{E}(X, F)$ des sections C^∞ de F , et supposons que P soit m -elliptique. On démontrera dans les exposés suivants que P possède un indice $\chi(P)$. Dans cet exposé nous donnons la formule qui exprime la valeur de $\chi(P)$.

Nous avons introduit dans l'exposé 2 les espaces fibrés $\underline{E} = h^*(E)$ et $\underline{F} = h^*(F)$, images réciproques de E et F par rapport à l'application $h: T^*(X) \rightarrow X$ qui, à tout covecteur tangent, fait correspondre son origine, et nous avons vu que le symbole $\sigma(P)$ de P définit un morphisme de $\underline{E}$ dans $\underline{F}$. Dire que P est elliptique, c'est dire qu'au-dessus de l'espace $T^*(X)$ des covecteurs non nuls, $\sigma(P)$ est un isomorphisme de $\underline{E}$ sur $\underline{F}$.

Munissons X d'une métrique riemannienne définie positive, soit $B(X)$ le fibré en boules dont les fibres sont les boules unités des fibres de $T^*(X)$, et soit $S(X)$ le fibré en sphères dont les fibres sont les sphères unités des fibres de $T^*(X)$. Le symbole $\sigma(P)$ est en tout point de X un polynôme homogène, par conséquent sa connaissance au-dessus de $S(X)$ entraîne sa connaissance au-dessus de $T^*(X)$. Donc $\sigma(P)$ définit un morphisme de $\underline{E}$ dans $\underline{F}$ au-dessus de $B(X)$, qui est un isomorphisme au-dessus de $S(X)$. D'après la définition du groupe de Grothendieck relatif, $\sigma(P)$ définit donc un élément $d(\underline{E}, \underline{F}, \sigma(P))$ de $K(B(X), S(X))$.

Supposons qu'on munisse X d'une seconde métrique riemannienne définie positive, et soient $B_1(X)$ et $S_1(X)$ les fibrés correspondants. Alors on a un isomorphisme canonique de $K(B(X), S(X))$ sur $K(B_1(X), S_1(X))$, par rapport auquel les deux éléments définis par $\sigma(P)$ se correspondent.

Le caractère de Chern ch applique $K(B(X), S(X))$ dans $H^{\text{pair}}(B(X), S(X); \mathbb{Q})$ et envoie $d(\underline{E}, \underline{F}, \sigma(P))$ en un élément $ch(\underline{E}, \underline{F}, \sigma(P))$ de $H^{\text{pair}}(B(X), S(X); \mathbb{Q})$. D'autre part, l'homomorphisme de Gysin applique $H^*(B(X), S(X); \mathbb{Q})$ dans $H^*(X; \mathbb{Q})$ et diminue les degrés de n , dimension de la fibre de l'espace fibré $T^*(X)$, c'est-à-dire dimension de la variété X . Désignons par $ch(P)$ l'image de $ch(\underline{E}, \underline{F}, \sigma(P))$ dans $H^*(X; \mathbb{Q})$. L'élément $ch(P) \in H^*(X; \mathbb{Q})$ est indépendant du choix de la métrique riemannienne sur X qui a servi pour le définir et les degrés

de ses composantes non nulles ont la même parité que $\dim X$.

Soit $T(X)_{\mathbb{C}} = T(X)_{X, \mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ le complexifié de l'espace fibré tangent de X . On a défini la classe de Todd $\tau(T(X)_{\mathbb{C}}) \in H^{\text{pair}}(X; \mathbb{Q})$ que nous désignons plus simplement par $\tau(X)$.

Les degrés des composantes non nulles du cup-produit $\text{ch}(P) \tau(X)$ ont la même parité que $\dim X$. En désignant par X la classe fondamentale de la variété X , la formule que nous nous proposons de démontrer prend la forme

$$\chi(P) = \pm \langle \text{ch}(P) \tau(X), X \rangle \quad (*) .$$

Lorsque X n'est pas orientable, on devra se servir de la cohomologie tordue.

L'homomorphisme de Gysin va de la cohomologie $H^{\text{pair}}(B(X), S(X))$ dans la cohomologie tordue de X , donc $\text{ch } P$ est dans la cohomologie tordue; $\tau(X)$ est dans la cohomologie usuelle, donc $\text{ch } P \tau(X)$ est dans la cohomologie tordue; et la classe fondamentale X est dans la cohomologie tordue, donc le second membre de la formule a bien un sens.

Remarquons que ce second membre est, a priori, un nombre rationnel; la formule montre qu'il est entier.

(*) Le signe $\pm$ dépend de plusieurs conventions de signe qui seront faites ultérieurement.