

# SÉMINAIRE HENRI CARTAN

ITIRO TAMURA

**Classification des variétés différentiables,  $(n - 1)$ -connexes,  
sans torsion, de dimension  $2n + 1$**

*Séminaire Henri Cartan*, tome 15 (1962-1963), exp. n° 16-19, p. 1-27

[http://www.numdam.org/item?id=SHC\\_1962-1963\\_\\_15\\_\\_A7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SHC_1962-1963__15__A7_0)

© Séminaire Henri Cartan  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962-1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

CLASSIFICATION DES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES,  $(n - 1)$ -CONNEXES,  
SANS TORSION, DE DIMENSION  $2n + 1$

par Itiro TAMURA (\*)

1. Variétés différentiables  $W_\mu$ .

Soit  $n \geq 4$ , et soit  $\mu = (\mu', \mu'')$  un élément de la somme directe des groupes d'homotopie de groupes orthogonaux spéciaux  $\pi_{n-1}(SO(n+1)) = \pi_{n-1}(SO)$  (le groupe d'homotopie stable) et  $\pi_n(SO(n))$  :

$$\mu = (\mu', \mu'') \in \pi_{n-1}(SO(n+1)) \oplus \pi_n(SO(n)) = \pi_{n-1}(SO) \oplus \pi_n(SO(n)).$$

Désignons par  $(A_{\mu'}, S^n, D^{n+1}, \bar{p})$  le fibré orienté de base  $S^n$ , fibre  $D^{n+1}$  (la  $(n+1)$ -boule), projection  $\bar{p}$ , dont l'application caractéristique est  $\mu'$ . Les structures différentiables (usuelles) orientées de  $S^n$  et de  $D^{n+1}$  donnent une structure différentiable orientée à  $A_{\mu'}$ . "Différentiable" signifie toujours indéfiniment différentiable. Le bord  $\partial A_{\mu'}$  de  $A_{\mu'}$  est un fibré de base  $S^n$ , fibre  $S^n$ , projection  $p = \bar{p}|_{\partial A_{\mu'}}$  :

$$(\partial A_{\mu'}, S^n, S^n, p).$$

On sait que l'application canonique

$$\pi_{n-1}(SO(n)) \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n+1)) = \pi_{n-1}(SO)$$

est surjective. Alors ce fibré a une section  $s$ . Donc, on a

$$\begin{aligned} \pi_q(\partial A_{\mu'}) &= 0, & q &= 0, 1, \dots, n-1, \\ \pi_n(\partial A_{\mu'}) &= \underline{\mathbb{Z}} + \underline{\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Celui-ci est engendré par les classes représentées par  $s$  et  $p^{-1}(x)$  ( $x \in S^n$ ).

Soit

$$W_\mu = A_{\mu'} \cup_g (D^{n+1} \times D^n)$$

la variété différentiable compacte orientée, avec bord, obtenue par recollement de  $A_{\mu'}$  et de  $D^{n+1} \times D^n$  (orientée) au moyen d'un plongement préservant les orientations :

$$g : \partial D^{n+1} \times D^n \rightarrow \partial A_{\mu'},$$

---

(\*) Les rectifications, qui faisaient l'objet d'un erratum joint au tirage initial, ont été incorporées dans le texte du présent tirage.

les orientations de  $\partial D^{n+1} \times D^n$  et de  $\partial A_{\mu'}$ , étant compatibles avec celles de  $D^{n+1} \times D^n$  et de  $A_{\mu'}$ , respectivement, tel que

$$g(\partial D^{n+1} \times 0) = p^{-1}(x) \quad (x \in S^n) ,$$

$$(D^{n+1} \times 0) \cup_{g|(\partial D^{n+1} \times 0)} \bar{p}^{-1}(x) = S^{n+1} \quad (\text{la } (n+1)\text{-sphère usuelle}) ,$$

et que l'application caractéristique du fibré du voisinage tubulaire (fermé) de  $D^{n+1} \times 0 \cup_{g|(\partial D^{n+1} \times 0)} \bar{p}^{-1}(x)$  dans  $W_{\mu}$  soit  $\mu''$ .  $W_{\mu}$  est bien définie par  $\mu$

et ne dépend pas du choix de  $g$  (cf. [14] (\*)).  $W_{\mu}$  est le "plombage" des deux fibrés  $(A_{\mu'}, S^n, D^{n+1}, \bar{p})$  avec l'application caractéristique  $\mu'$  et  $(A_{\mu''}, S^{n+1}, D^n, \bar{p}')$  avec l'application caractéristique  $\mu''$ , c'est-à-dire,  $W_{\mu}$  est la variété différentiable compacte orientée obtenue à partir de  $A_{\mu'}$  et de  $A_{\mu''}$  en identifiant

$$\bar{p}^{-1}(D^n) = D^n \times D^{n+1} \quad \text{et} \quad \bar{p}'^{-1}(D^{n+1}) = D^{n+1} \times D^n \quad \text{par} \quad (x, y) = (y, x) .$$

Evidemment on a

$$\pi_1(W_{\mu}) = 0 ,$$

$$H_q(W_{\mu}) = 0 \quad q \neq 0, n, n+1 ,$$

$$H_0(W_{\mu}) = H_n(W_{\mu}) = H_{n+1}(W_{\mu}) = \mathbb{Z} .$$

Les groupes d'homologie et de cohomologie sont toujours à coefficients entiers, sauf mention explicite du contraire.

Le bord  $\partial W_{\mu}$  est homéomorphe à  $S^{2n}$  (cf. [9]) :

$$\partial W_{\mu} \in \Theta^{2n} ,$$

où  $\Theta^q$  est le groupe des structures différentiables sur  $S^q$  (cf. [7], [10], [11]).

Si  $\partial W_{\mu} = S^{2n}$ , la variété différentiable  $W_{\mu} \cup_{\iota} D^{2n+1}$  obtenue par recollement de  $W_{\mu}$  et de  $D^{2n+1}$  au moyen d'un difféomorphisme  $\iota : \partial W_{\mu} \rightarrow S^{2n} = \partial D^{2n+1}$  est  $(n-1)$ -connexe, et

$$H_n(W_{\mu} \cup_{\iota} D^{2n+1}) = H_{n+1}(W_{\mu} \cup_{\iota} D^{2n+1}) = \mathbb{Z} .$$

## 2. Présentation.

On va démontrer la proposition suivante :

(\*) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie.

PROPOSITION. - Soit  $M^{2n+1}$  une variété différentiable compacte orientée, sans bord,  $(n - 1)$ -connexe, sans torsion, de dimension  $2n + 1$ , ( $n$  étant  $\geq 4$ ), telle que

$$\pi_1(M^{2n+1}) = 0$$

$$H_q(M^{2n+1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, 2n + 1, \\ \bigoplus^r \mathbb{Z} & (r \geq 1) \quad q = n, n + 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $\bigoplus^r \mathbb{Z}$  désigne la somme directe de  $r$  groupes cycliques infinis. Alors  $M^{2n+1}$  est la variété différentiable obtenue par recollement de  $\bigsqcup_{i=1}^r W_{\mu_i}$  et de la boule  $D^{2n+1}$  au moyen d'un difféomorphisme

$$\iota : \partial \left( \bigsqcup_{i=1}^r W_{\mu_i} \right) \rightarrow \partial D^{2n+1} :$$

$$M^{2n+1} = \left( \bigsqcup_{i=1}^r W_{\mu_i} \right) \cup D^{2n+1} ,$$

où  $\bigsqcup$  désigne la somme connexe à bord ("boundary-connected sum") et  $\bigsqcup_{i=1}^r W_{\mu_i}$  désigne la somme connexe à bord de  $W_{\mu_1}, W_{\mu_2}, \dots, W_{\mu_r}$  [7], [13].

Démonstration. - D'après un théorème de SMALE [3], [15], il existe une fonction différentiable  $f : M^{2n+1} \rightarrow [0, 2n + 1]$  qui a précisément  $2r + 2$  points critiques non-dégénérés  $a_0, a_1, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_r, b_0$  tels que

$$\begin{aligned} f(a_0) &= \text{l'indice de } a_0 = 0, \\ f(a_i) &= \text{l'indice de } a_i = n \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ f(b_i) &= \text{l'indice de } b_i = n + 1 \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ f(b_0) &= \text{l'indice de } b_0 = 2n + 1. \end{aligned}$$

On notera

$$W = f^{-1} \left[ 0, n + \frac{1}{2} \right], \quad W' = f^{-1} \left[ n + \frac{1}{2}, 2n + 1 \right].$$

$a_1, a_2, \dots, a_r$  représente un système de générateurs de  $H_n(M^{2n+1}) = H_n(W)$ .  
 $b_1, b_2, \dots, b_r$  représente un système de générateurs de  $H_{n+1}(M^{2n+1})$

et, de même, celui de  $H_n(W') = \bigoplus^r \mathbb{Z}$  par dualité.  $W$  est une variété d'anses ("handlebody") [13] :

$$W = D^{2n+1} \cup \left( D_1^n \times D_1^{n+1} \right) \cup \left( D_2^n \times D_2^{n+1} \right) \cup \dots \cup \left( D_r^n \times D_r^{n+1} \right),$$

$(a_1) \qquad \qquad \qquad (a_2) \qquad \qquad \qquad (a_r)$

c'est-à-dire,  $W$  est la variété obtenue en recollant  $r$  anses  $(a_1), (a_2), \dots, (a_r)$  à  $D^{2n+1}$  par les plongements

$$\partial D_i^n \times D_i^{n+1} \rightarrow \partial D^{2n+1} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad .$$

Evidemment on a

$$\pi_1(W) = 0 \quad ,$$

$$H_q(W) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \quad , \\ \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z} & q = n \quad , \\ 0 & q \neq 0, n \quad . \end{cases}$$

On peut choisir des générateurs  $a_1', a_2', \dots, a_r'$  de  $H_n(M^{2n+1})$  et  $b_1', b_2', \dots, b_r'$  de  $H_{n+1}(M^{2n+1})$  tels que

$$a_i' \circ b_j' = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, r \quad .$$

Soient

$$f_i : S^n \rightarrow W \quad i = 1, 2, \dots, r$$

des applications telles que

$$[f_i(S^n)] = a_i' \quad i = 1, 2, \dots, r \quad ,$$

où  $[f_i(S^n)]$  désigne l'élément de  $H_n(W)$  représenté par  $f_i(S^n)$ . On peut supposer, d'après un théorème de WHITNEY [20], que les  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) sont des plongements dans  $\text{Int } W$  et que

$$f_i(S^n) \cap f_j(S^n) = \emptyset \quad i \neq j \quad .$$

Soient  $N(f_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) des voisinages tubulaires des  $f_i(S^n)$  dans  $\text{Int } W$ , tels que

$$N(f_i) \cap N(f_j) = \emptyset \quad i \neq j \quad .$$

Connectons  $N(f_i)$  et  $N(f_{i+1})$  par un tube  $D_i^1 \times D_i^{2n}$  plongé dans  $\text{Int } W$  ( $i = 1, 2, \dots, r-1$ ) de façon que

$$\begin{aligned} N(f_i) \cap (D_i^1 \times D_i^{2n}) &= \partial N(f_i) \cap (D_i^1 \times D_i^{2n}) = (-1) \times D_i^{2n} \quad , \\ N(f_{i+1}) \cap (D_i^1 \times D_i^{2n}) &= \partial N(f_{i+1}) \cap (D_i^1 \times D_i^{2n}) = (1) \times D_i^{2n} \quad , \\ N(f_j) \cap (D_i^1 \times D_i^{2n}) &= \emptyset \quad (j \neq i, i+1) \quad , \\ (D_i^1 \times D_i^{2n}) \cap (D_j^1 \times D_j^{2n}) &= \emptyset \quad (i \neq j) \quad , \end{aligned}$$

alors on a la somme connexe à bord  $\hat{W}$  de  $N(f_1), N(f_2), \dots, N(f_r)$ , réalisée dans  $\text{Int } W$  :

$$\hat{W} = \bigsqcup_{i=1}^r N(f_i) \subset \text{Int } W \quad .$$

Evidemment  $\hat{W}$  est une variété d'anses :

$$\hat{W} = D^{2n+1} \cup (D_1^n \times D_1^{n+1}) \cup (D_2^n \times D_2^{n+1}) \cup \dots \cup (D_r^n \times D_r^{n+1}) \quad .$$

$(a_1^i) \qquad (a_2^i) \qquad (a_r^i)$

Considérons la variété différentiable compacte orientée  $W - \text{Int } \hat{W}$  dont les bords sont  $\partial W$  et  $-\partial \hat{W}$ . Il est aisé de voir que

$$H_q(W, \hat{W}) = H_q(W - \text{Int } \hat{W}, \partial \hat{W}) = H^{2n+1-q}(W - \text{Int } \hat{W}, \partial W) = 0, \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

Il en résulte que les injections

$$\begin{aligned} \partial \hat{W} &\rightarrow W - \text{Int } \hat{W} \quad , \\ \partial W &\rightarrow W - \text{Int } \hat{W} \end{aligned}$$

sont des homotopie-équivalences. Alors  $\partial W$  et  $\partial \hat{W}$  sont h-cobordantes. Donc, d'après un théorème de SMALE [15], on a

$$W - \text{Int } \hat{W} = \partial W \times I = \partial \hat{W} \times I \quad ,$$

et on peut identifier  $W$  et  $\hat{W}$  :

$$W = D^{2n+1} \cup (D_1^n \times D_1^{n+1}) \cup (D_2^n \times D_2^{n+1}) \cup \dots \cup (D_r^n \times D_r^{n+1}) = \bigsqcup_{i=1}^r A_{\mu_i^i} \quad ,$$

$(a_1^i) \qquad (a_2^i) \qquad (a_r^i)$

où on a posé  $A_{\mu_i^i} = N(f_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) .

De même, on a

$$W' = D^{2n+1} \cup (D_1^n \times D_1^{n+1}) \cup (D_2^n \times D_2^{n+1}) \cup \dots \cup (D_r^n \times D_r^{n+1}) \quad .$$

$(b_1^i) \qquad (b_2^i) \qquad (b_r^i)$

Alors  $M^{2n+1} - \text{Int } D^{2n+1}$  est la variété différentiable obtenue en recollant  $r$  anses  $b_1^i, b_2^i, \dots, b_r^i$  à  $W$  par les plongements

$$g_i^i : \partial D_i^{n+1} \times D^n \rightarrow \partial W \quad ;$$

$$M^{2n+1} - \text{Int } D^{2n+1} = W \cup (D_1^{n+1} \times D_1^n) \cup (D_2^{n+1} \times D_2^n) \cup \dots \cup (D_r^{n+1} \times D_r^n) \quad .$$

$(b_1^i) \qquad (b_2^i) \qquad (b_r^i)$

Soient  $s_i$  une section différentiable du fibré  $(\partial A_{\mu_i^i}, S^n, S^n, p_i)$  et

$p_i^{-1}(x_i)$  une fibre ( $x_i \in S^n$ ),  $i = 1, 2, \dots, r$ . Evidemment on a

$$\pi_n(\partial W) = \bigoplus_{i=1}^{2r} \mathbb{Z} \quad ,$$

qui est engendré par les classes représentées par  $s_i$ ,  $p_i^{-1}(x_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ). Soient

$$\rho_1 : \pi_n(\partial W) \rightarrow \underline{\mathbb{Z}} \quad ,$$

$$\rho_1' : \pi_n(\partial W) \rightarrow \underline{\mathbb{Z}}$$

les projections dans un facteur engendré par  $\{s_1\}$  et  $\{p_1^{-1}(x_1)\}$  respectivement. Alors, il est aisé de voir que

$$\rho_1(\{g_i'(\partial D^{n+1} \times 0)\}) = 0 \quad i = 2, 3, \dots, r \quad ,$$

$$\rho_1'(\{g_i'(\partial D^{n+1} \times 0)\}) = 0 \quad i = 2, 3, \dots, r \quad .$$

Donc, d'après un théorème de WHITNEY [20], on peut supposer que

$$s_1 \cap g_i'(\partial D^{n+1} \times D^n) = \emptyset \quad i = 2, 3, \dots, r \quad ,$$

$$p_1^{-1}(x_1) \cap g_i'(\partial D^{n+1} \times D^n) = \emptyset \quad i = 2, 3, \dots, r \quad .$$

Soit

$$W_1 = W \cup \underset{(b_2')}{(D_2^{n+1} \times D_2^n)} \cup \underset{(b_3')}{(D_3^{n+1} \times D_3^n)} \cup \dots \cup \underset{(b_r')}{(D_r^{n+1} \times D_r^n)}$$

la variété différentiable obtenue en recollant  $r - 1$  anses  $b_2'$ ,  $b_3'$ ,  $\dots$ ,  $b_r'$  à  $W$  par  $g_i'$  ( $i = 2, 3, \dots, r$ ). Alors on a,

$$H_q(W_1) = \begin{cases} \underline{\mathbb{Z}} & q = 0 \quad , \\ \bigoplus^r \underline{\mathbb{Z}} & q = n \quad , \\ \bigoplus^{r-1} \underline{\mathbb{Z}} & q = n + 1 \quad , \\ 0 & q \neq 0, n, n + 1 \quad , \end{cases}$$

et

$$M^{2n+1} - \text{Int } D^{2n+1} = W_1 \cup \underset{(b_1')}{(D_1^{n+1} \times D_1^n)} \quad .$$

D'après la suite exacte

$$\rightarrow H_{q+1}(W_1) \rightarrow H_{q+1}(W_1, \partial W_1) \rightarrow H_q(\partial W_1) \rightarrow H_q(W_1) \rightarrow$$

et la dualité

$$H_q(W_1) = H^{2n+1-q}(W_1) = \text{Hom}(H_{2n+1-q}(W_1), \underline{\mathbb{Z}}) \quad ,$$

on vérifie facilement que  $\partial W_1$  est  $(n - 1)$ -connexe et que

$$\pi_n(\partial W_1) = \underline{Z} \otimes \underline{Z} \quad ,$$

qui est engendré par  $\{s_1\}$  et  $\{p_1^{-1}(x_1)\}$ . Puisque  $a_i \circ b_1 = \delta_{i1}$ , on a

$$g_1'(\partial D^{n+1} \times 0) \simeq p_1^{-1}(x_1) \quad .$$

Donc, d'après un théorème de HAEFLIGER [4],  $g_1'$  est difféotope au plongement

$$g_1 : \partial D^{n+1} \times D^n \rightarrow \partial W_1$$

tel que

$$g_1(\partial D^{n+1} \times 0) = p_1^{-1}(x_1) \quad ,$$

$$(D^{n+1} \times 0) \cup_{g_1|(\partial D^{n+1} \times 0)} \overline{p_1^{-1}(x_1)} = S^{n+1} \quad ,$$

où  $\overline{p_1}$  désigne la projection du fibré  $(A_{\mu_1}, S^n, D^{n+1}, \overline{p_1})$ . Evidemment  $M^{2n+1} - \text{Int } D^{2n+1}$  est la variété différentiable obtenue en recollant une anse à  $W_1$  par le plongement  $g_1$ .

En répétant cette opération, on peut voir que  $M^{2n+1} - \text{Int } D^{2n+1}$  est la variété différentiable obtenue en recollant  $r$  anses  $D_i^{n+1} \times D_i^n$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) à  $W$  par les plongements

$$g_i : \partial D_i^{n+1} \times D_i^n \rightarrow \partial W \quad i = 1, 2, \dots, r \quad ,$$

tels que

$$g_i(\partial D_i^{n+1} \times 0) = p_i^{-1}(x_i) \quad ,$$

$$(D_i^{n+1} \times 0) \cup_{g_i|(\partial D_i^{n+1} \times 0)} \overline{p_i^{-1}(x_i)} = S^{n+1} \quad .$$

Alors on a

$$M^{2n+1} - \text{Int } D^{2n+1} = \bigsqcup_{i=1}^r W_{\mu_i} \quad .$$

COROLLAIRE. - Si  $\partial W_{\mu_i}$  est difféomorphe à  $S^{2n}$  et si  $M_i$  est une variété différentiable orientée telle que

$$M_i - \text{Int } D^{2n+1} = W_{\mu_i} \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad ,$$

on a

$$M^{2n+1} = \left( \bigsqcup_{i=1}^r M_i \right) \# \tilde{S}^{2n+1} \quad , \quad \tilde{S}^{2n+1} \in \Theta^{2n+1} \quad ,$$

où  $\#$  désigne la somme connexe ("connected sum") et  $\#_{i=1}^r M_i$  désigne la somme connexe de  $M_1, M_2, \dots, M_r$  [7].

En effet,

$$\left( \#_{i=1}^r M_i \right) - \text{Int } D^{2n+1} = \#_{i=1}^r W_{\mu_i} .$$

### 3. Lemmes.

Nous démontrons deux lemmes que nous allons utiliser.

LEMME 1. - Soient  $V_1^q, V_2^q$  deux variétés différentiables compactes orientées sans bord de dimension  $q$ . Alors

$$V_1^q \# \tilde{S}^q = V_2^q, \quad \tilde{S}^q \in \Theta^q,$$

si et seulement s'il existe un difféomorphisme

$$\hat{\varphi} : V_1^q - \text{Int } D^q \rightarrow V_2^q - \text{Int } D^q,$$

tel que

$$\tilde{S}^q = D^q \cup_{\hat{\varphi}|_{\partial D^q}} D^q .$$

D'abord, supposons qu'il existe un difféomorphisme

$$\varphi : V_1^q \# \tilde{S}^q \rightarrow V_2^q .$$

Parce que

$$V_1^q \# \tilde{S}^q = (V_1^q - \text{Int } D^q) \cup_{\psi} D^q,$$

$$\tilde{S}^q = D^q \cup_{\psi} D^q,$$

où  $\psi : \partial D^q \rightarrow \partial D^q$  est un difféomorphisme, on a

$$\hat{\varphi} : \varphi|_{(V_1^q - \text{Int } D^q)} : V_1^q - \text{Int } D^q \rightarrow V_2^q - \text{Int } \varphi(D^q),$$

$$\hat{\varphi}|_{\partial D^q} = \psi .$$

Inversement, supposons qu'il existe  $\hat{\varphi}$ . Alors il est aisé de voir que l'on peut prolonger  $\hat{\varphi}$  en un difféomorphisme

$$(V_1^q - \text{Int } D^q) \cup_{\hat{\varphi}|_{\partial D^q}} D^q \rightarrow V_2^q .$$

LEMME 2. - Soit  $W^{4k}$  une variété différentiable compacte orientée avec bord,  $(2k-1)$ -connexe de dimension  $4k$  ( $k \geq 2$ ) dont le bord  $\partial W^{4k}$  est un élément de  $\Theta^{4k-1}(\partial\pi)$  (le sous-groupe de  $\Theta^{4k-1}$  formé par les bords des  $\pi$ -variétés [7] :

$$\partial W^{4k} \in \Theta^{4k-1}(\partial\pi) \quad .$$

Alors l'invariant  $\lambda'(\partial W^{4k})$  de Milnor [10] est donné par

$$\begin{aligned} \lambda'(\partial W^{4k}) &= \frac{1}{8} I(W^{4k}) \pmod{2^{2k-1}(2^{2k-1} - 1)}, \quad k : \text{impair} \quad , \\ \lambda'(\partial W^{4k}) &= \frac{1}{8} I(W^{4k}) - \frac{2^{2k-5}(2^k - 1)^2 B_{k/2}^2}{(k!)^2} p_{2k}^2(W^{4k}) [W^{4k}, \partial W^{4k}] \\ &\pmod{2^{2k-2}(2^{2k-1} - 1)}, \quad k : \text{pair} \quad . \end{aligned}$$

Supposons que

$$\lambda'(\partial W^{4k}) = t \quad .$$

Soit

$$V^{4k} = W^{4k} \cup_{\iota}^t (\natural W_0)$$

la variété différentiable compacte orientée sans bord obtenue par recollement de  $W^{4k}$  et de  $-\natural W_0$  au moyen d'un difféomorphisme

$$\iota : \partial W^{4k} \rightarrow \natural M_0 = \partial(\natural W_0) \quad ,$$

où  $W_0$  est la  $\pi$ -variété compacte orientée,  $(2k-1)$ -connexe dont le bord  $M_0 = \partial W_0$  est un générateur de  $\Theta^{4k-1}(\partial\pi)$  [10];  $\natural W_0$  désigne la somme connexe à bord de  $t$  exemplaires de  $W_0$ , et  $\natural M_0$  désigne la somme connexe de  $t$  exemplaires de  $M_0$ . Il est facile de voir que  $V^{4k}$  est  $(2k-1)$ -connexe et que

$$\begin{aligned} I(V^{4k}) &= I(W^{4k}) - tI(W_0) \\ &= I(W^{4k}) - 8t \quad . \end{aligned}$$

Dans le cas où  $k$  est impair, l'index  $I(V^{4k})$  est donné par

$$I(V^{4k}) = \frac{2^{2k}(2^{2k} - 1) B_k}{(2k)!} p_{4k}(V^{4k}) [V^{4k}]$$

et le  $\hat{A}$ -genre

$$\hat{A}(V^{4k}) = \frac{-B_k}{2((2k)!)} p_{4k}(V^{4k}) [V^{4k}]$$

est entier pair [1], [2], [5], [18]. Alors on a

$$I(V^{4k}) = 0 \pmod{2^{2k+2}(2^{2k-1} - 1)} \quad .$$

Dans le cas où  $k$  est pair, l'index  $I(V^{4k})$  est donné par

$$I(V^{4k}) = \left( \frac{2^{2k}(2^{2k-1} - 1) B_r}{(2k)!} p_{4k}(V^{4k}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{2^{2k}(2^{k-1} - 1)^2 B_{k/2}^2}{(k!)^2} - \frac{2^{2k}(2^{2k-1} - 1) B_k}{(2k)!} \right) p_{2k}^2(V^{4k}) \right) [V^{4k}]$$

et le  $\hat{A}$ -genre

$$\hat{A}(V^{4k}) = \left( \frac{B_k}{2((2k)!)} p_{4k}(V^{4k}) + \left( \frac{B_{k/2}^2}{8(k!)^2} + \frac{B_k}{4((2k)!)} \right) p_{2k}^2(V^{4k}) \right) [V^{4k}]$$

est entier [1], [2], [5], [12], [18]. Alors on a

$$I(V^{4k}) = \frac{2^{2k-2}(2^k - 1)^2 B_{k/2}^2}{(k!)^2} p_{2k}^2(V^{4k}) [V^{4k}] \pmod{2^{2k+1}(2^{2k-1} - 1)} .$$

Le lemme en résulte.

#### 4. Le cas $n = 4$ .

On sait que

$$\pi_3(SO) \approx \underline{\underline{\mathbb{Z}}}, \quad \pi_4(SO(4)) \approx \underline{\underline{\mathbb{Z}}}_2 + \underline{\underline{\mathbb{Z}}}_2 .$$

Alors on a

$$\mu = (\mu', \mu'') \longleftrightarrow (m, m', m'') \in \underline{\underline{\mathbb{Z}}} + \underline{\underline{\mathbb{Z}}}_2 + \underline{\underline{\mathbb{Z}}}_2 .$$

Donc, d'après la proposition de n° 2, on obtient

**THÉORÈME 1.** - Soit  $M^9$  une variété différentiable compacte orientée sans bord, 3-connexe, sans torsion de dimension 9 . Alors

$$M^9 = \left( \bigsqcup_{i=1}^r W_{m_i, m_i', m_i''} \right) \cup D^9 ,$$

ou  $\iota : \partial \left( \bigsqcup_{i=1}^r W_{m_i, m_i', m_i''} \right) \rightarrow \partial D^9$  est un difféomorphisme.

Remarque. - Soit  $(B_{\mu'}, S^4, S^5, p)$  (resp.  $(\bar{B}_{\mu'}, S^4, D^6, \bar{p})$ ) le fibré de base  $S^4$ , fibre  $S^5$  (resp.  $D^6$ ) avec l'application caractéristique  $\mu' \in \pi_3(SO(6)) = \pi_3(SO)$  . Soient  $s$  une section différentiable du fibré  $(B_{\mu'}, S^4, S^5, p)$  et  $U(s)$  un voisinage tubulaire de  $s$  dans  $B_{\mu'}$  . Puisque  $s$  et la section nulle de  $\bar{B}_{\mu'}$  sont difféotopes dans  $\bar{B}_{\mu'}$  , on a

$$U(s) = A_{\mu'} .$$

Donc

$$\begin{aligned} W_{(\mu', 0, 0)} &= U(s) \cup p^{-1}(D^4), \quad (D^4 \subset S^4) \\ &= B_{\mu'} - \text{Int } D^9 \quad . \end{aligned}$$

Alors on a

$$\left( \#_{i=1}^r W_{m_i, 0, 0} \right) \cup D^9 = \left( \#_{i=1}^r B_{m_i} \right) \# \tilde{S}^9, \quad \tilde{S}^9 \in \Theta^9 \approx \underline{\mathbb{Z}}_2 + \underline{\mathbb{Z}}_2 + \underline{\mathbb{Z}}_2 \quad \text{ou} \quad \underline{\mathbb{Z}}_2 + \underline{\mathbb{Z}}_4 \quad .$$

5. Le cas  $n = 5$  .

On sait que

$$\pi_4(SO) = 0, \quad \pi_5(SO(5)) = \underline{\mathbb{Z}}_2 \quad .$$

Alors on a

$$\mu = (0, 0) \quad \text{ou} \quad (0, 1) \quad .$$

$W_{(0,0)}$  est le plombage de  $S^5 \times D^6$  et de  $S^6 \times D^5$  . Donc

$$W_{(0,0)} = S^6 \times S^5 - \text{Int } D^{11} \quad .$$

$W_{(0,1)}$  est le plombage de  $S^5 \times D^6$  et du fibré non-trivial de base  $S^6$ , fibre  $D^5$  .

Soit  $(A^{11}, S^6, D^5)$  le fibré orienté, non trivial, de base  $S^6$ , fibre  $D^5$  . La variété différentiable obtenue par recollement de deux copies de  $A^{11}$  au moyen de l'application identique  $\partial A^{11} \rightarrow \partial A^{11}$  est difféomorphe à  $S^6 \times S^5$ , parce que cette variété est un fibré de base  $S^6$ , fibre  $S^5$ , et  $\pi_5(SO(6)) = 0$  . Donc on a

$$W_{(0,1)} = S^6 \times S^5 - \text{Int } D^{11} \quad .$$

On va démontrer le lemme suivant :

LEMME 3. - La relation

$$\left( \#_{i=1}^r (S^6 \times S^5) \right) \# \tilde{S}^{11} = \#_{i=1}^r (S^6 \times S^5), \quad \text{où} \quad \tilde{S}^{11} \in \Theta^{11} = \mathbb{O}^{11}(\partial\pi),$$

entraîne  $\tilde{S}^{11} = S^{11}$  .

Supposons que

$$\left( \#_{i=1}^r (S_i^6 \times S_i^5) \right) \# \tilde{S}^{11} \quad \text{et} \quad \#_{i=1}^r (S_i^6 \times S_i^5)$$

soient difféomorphes. Alors, d'après le lemme 1, il existe un difféomorphisme

$$\hat{\phi} : \left( \bigsqcup_{i=1}^r (S_i^6 \times S_i^5) \right) - \text{Int } D^{11} \rightarrow \left( \bigsqcup_{i=1}^r (S_i^6 \times S_i^5) \right) - \text{Int } D^{11} ,$$

tel que

$$\tilde{S}^{11} = D^{11} \underset{\hat{\phi}|_{\partial D^{11}}}{\cup} D^{11} .$$

Soit

$$W^{12} = \left( \bigsqcup_{i=1}^r (S_i^6 \times D_i^6) \right) \underset{\hat{\phi}}{\cup} \left( \bigsqcup_{i=1}^r (S_i^6 \times D_i^6) \right)$$

la variété différentiable compacte orientée de dimension 12, obtenue par recollage de  $\bigsqcup_{i=1}^r (S_i^6 \times D_i^6)$  et de  $-\bigsqcup_{i=1}^r (S_i^6 \times D_i^6)$  au moyen de  $\hat{\phi}$ . Evidemment, on a  $\partial W^{12} = \tilde{S}^{11}$ .

D'après la suite exacte de Mayer-Vietoris, il est aisé de voir que

$$H_q(W^{12}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, \\ \bigoplus \mathbb{Z} & q = 6, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et que  $H_6(W^{12})$  a un système de générateurs

$$a_1, a_2, \dots, a_r, a'_1, a'_2, \dots, a'_r,$$

tels que  $a_i$  est représenté par  $S_i^6 \times 0$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ), et que  $a'_i$  est représenté par un cycle  $c_i$ , dont l'intersection  $c_i \cap \left( \bigsqcup_{i=1}^r (S_i^6 \times D_i^6) \right)$  est  $x_i \times D_i^6$  ( $x_i \in S_i^6$ ) ( $i = 1, 2, \dots, r$ ). La matrice des nombres d'intersection des  $a_1, a_2, \dots, a_r, a'_1, a'_2, \dots, a'_r$  est donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & S \end{pmatrix}, \quad E = (\delta_{ij}), \quad S = (s_{ij}), \quad s_{ij} = s_{ji},$$

dont la signature est égale à zéro. Donc, d'après le lemme 2, on a

$$\lambda'(\tilde{S}^{11}) = 0 .$$

Alors, d'après le corollaire de la proposition et le lemme 3, on obtient :

**THÉORÈME 2.** - Soit  $M^{11}$  une variété différentiable compacte orientée, sans bord, 4-connexe, sans torsion, de dimension 11. Alors

$$M^{11} = \bigsqcup_{i=1}^r (S_i^6 \times S_i^5) \underset{\#}{\#} \tilde{S}^{11}, \quad \tilde{S}^{11} \in \Theta^{11} \approx \mathbb{Z}_{992} .$$

COROLLAIRE. - La variété topologique  $S^6 \times S^5$  admet exactement 992 structures différentiables orientées.

COROLLAIRE. - Soient  $M_1^{11}$ ,  $M_2^{11}$  deux variétés différentiables compactes orientées, sans bord, 4-connexes, sans torsion, de dimension 11. Alors  $M_1^{11}$  et  $M_2^{11}$  sont homéomorphes (homotopes) si, et seulement si, leurs nombres de Betti sont égaux.

### 6. Le cas $n = 6$ .

On sait que

$$\pi_5(SO) = 0, \quad \pi_6(SO(6)) = 0 \quad .$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \mu &= (0, 0) \quad . \\ W_{(0,0)} &\text{ est le plombage de } S^6 \times D^7 \text{ et de } S^7 \times D^6 \text{ . Donc} \\ W_{(0,0)} &= S^7 \times S^6 - \text{Int } D^{13} \quad . \end{aligned}$$

On va démontrer le lemme suivant.

LEMME 4. -  $\left( \overset{r}{\#} (S^7 \times S^6) \right) \overset{\sim}{\#} S^{13} = \overset{r}{\#} (S^7 \times S^6)$ , si et seulement si  $\overset{\sim}{S}^{13} = S^{13}$ , où  $\overset{\sim}{S}^{13} \in \Theta^{13}$ .

Supposons que  $\left( \overset{r}{\#} (S^7 \times S^6) \right) \overset{\sim}{\#} S^{13}$  et  $\overset{r}{\#} (S^7 \times S^6)$  soient difféomorphes. Alors, d'après le lemme 1, il existe un difféomorphisme

$$\hat{\varphi} : \left( \overset{r}{\#} (S^7 \times S^6) \right) - \text{Int } D^{13} \rightarrow \left( \overset{r}{\#} (S^7 \times S^6) \right) - \text{Int } D^{13}$$

tel que

$$\overset{\sim}{S}^{13} = D^{13} \cup_{\hat{\varphi}|_{\partial D^{13}}} D^{13} \quad .$$

Soit

$$W^{14} = \left( \overset{r}{\#} (S^7 \times D^7) \right) \cup_{\hat{\varphi}} \left( \overset{r}{\#} (S^7 \times D^7) \right)$$

la variété différentiable compacte orientée obtenue par recollement de  $\overset{r}{\#} (S^7 \times D^7)$  et de  $-(\overset{r}{\#} (S^7 \times D^7))$  au moyen de  $\hat{\varphi}$ . Evidemment on a

$$\partial W^{14} = \tilde{S}^{13} \quad .$$

Il est aisé de voir que

$$H_q(W^{14}) = 0, \quad q \neq 0, 7 \quad .$$

Alors les obstructions pour construire des champs de repères tangentiels sont dans  $H^q(W^{14})$ ;  $\pi_{q-1}(SO(14)) = 0$ , parce que  $\pi_6(SO(14)) = 0$ . Donc  $W^{14}$  est parallélisable. Puisque  $\Theta^{13} \approx \underline{Z}_3$ ,  $\Theta^{13}(\partial\pi) = 0$  [7], on a

$$\tilde{S}^{13} = \partial W^{14} = S^{13} \quad .$$

Alors, d'après le corollaire de la proposition et le lemme 4, on obtient :

THEOREME 3. - Soit  $M^{13}$  une variété différentiable compacte orientée sans bord, 5-connexe, sans torsion de dimension 13. Alors

$$M^{13} = (\overset{r}{\#} (S^7 \times S^6)) \# \tilde{S}^{13}, \quad \tilde{S}^{13} \in \Theta^{13} \approx \underline{Z}_3 \quad .$$

Cette présentation est unique.

COROLLAIRE. - La variété topologique  $S^7 \times S^6$  admet exactement trois structures différentiables orientées.

COROLLAIRE. - Soient  $M_1^{13}$ ,  $M_2^{13}$  deux variétés différentiables compactes orientées sans bord, 5-connexes, sans torsion de dimension 13. Alors  $M_1^{13}$  et  $M_2^{13}$  sont homéomorphes (homotopes) si et seulement si leurs nombres de Betti sont égaux.

COROLLAIRE. - Quel que soit  $\tilde{S}^7 \in \Theta^7$ , la variété différentiable orientée  $\tilde{S}^7 \times S^6$  est difféomorphe à  $S^7 \times S^6$ .

En effet, d'après le théorème 3, on a

$$\tilde{S}^7 \times S^6 = (S^7 \times S^6) \# \tilde{S}^{13}, \quad \tilde{S}^{13} \in \Theta^{13} \quad .$$

Alors, d'après le lemme 1, il existe un difféomorphisme

$$\hat{\varphi} : \tilde{S}^7 \times S^6 - \text{Int } D^{13} \rightarrow S^7 \times S^6 - \text{Int } D^{13} \quad ,$$

tel que

$$\tilde{S}^{13} = D^{13} \cup_{\hat{\varphi}|_{\partial D^{13}}} D^{13} \quad .$$

Soit  $W^{14} = \tilde{S}^7 \times D^7 \cup_{\hat{\varphi}} S^7 \times D^7$  la variété différentiable compacte orientée de dimension 14, obtenue par recollement de  $\tilde{S}^7 \times D^7$  et de  $(S^7 \times D^7)$  au moyen de  $\hat{\varphi}$ . Alors  $W^{14}$  est une  $\pi$ -variété, parce que  $H_i(W^{14}) = 0$  ( $i \neq 0, 7$ ). Donc on a

$$\tilde{S}^{13} = \partial W^{14} = S^{13} \quad .$$

Remarque. - Un résultat plus fort que ce corollaire est démontré dans [15].

7. Les cas  $n = 4k - 1$  ( $k > 1$ ) .

On sait que

$$\pi_{4k-2}(SO) = 0, \quad \pi_{4k-1}(SO(4k-1)) \approx \underline{\underline{Z}}, \quad \pi_{4k-1}(SO(4k)) \approx \underline{\underline{Z}} + \underline{\underline{Z}} \quad (k \geq 1) \quad ,$$

et que la suite

$$0 \rightarrow \pi_{4k-1}(SO(4k-1)) \xrightarrow{\iota_*} \pi_{4k-1}(SO(4k)) \rightarrow \underline{\underline{Z}} \rightarrow 0$$

est exacte (KERVAIRE [6]). Désignons par  $\rho$  un générateur de  $\pi_{4k-1}(SO(4k-1))$  et par  $\iota_*(\rho)$ ,  $\sigma$  un système de générateurs de  $\pi_{4k-1}(SO(4k))$ . Alors on a

$$\mu = (0, m\rho) \quad m \in \underline{\underline{Z}} \quad .$$

Soient  $(B_{m,n}^{8k-1}, S^{4k}, S^{4k-1}, p)$  et  $(\bar{B}_{m,n}^{8k}, S^{4k}, D^{4k}, \bar{p})$  le fibré de base  $S^{4k}$ , fibre  $S^{4k-1}$  avec l'application caractéristique  $m\iota_*(\rho) + n\sigma$ , et celui de fibre  $D^{4k}$  respectivement.  $B_{m,n}^{8k-1}$  et  $\bar{B}_{m,n}^{8k}$  sont des variétés différentiables compactes orientées comme toujours.  $B_{m,0}^{8k-1}$  admet une section différentiable

$$s : S^{4k} \rightarrow B_{m,0}^{8k-1} \quad .$$

Désignons par  $U(s)$  un voisinage tubulaire de  $s(S^{4k})$  dans  $B_{m,0}^{8k-1}$ . Parce que  $s(S^{4k})$  et la section nulle de  $\bar{B}_{m,0}^{8k}$  sont difféotopes dans  $\bar{B}_{m,0}^{8k}$ ,  $U(s)$  est difféomorphe à  $\bar{B}_m^{8k-1}$ , où  $(\bar{B}_m^{8k-1}, S^{4k}, D^{4k-1})$  désigne le fibré de base  $S^{4k}$ , fibre  $D^{4k-1}$  avec l'application caractéristique  $m\rho$ . Alors on a

$$W_{(0,m\rho)}^{8k-1} = U(s) \cup p^{-1}(D^{4k}) = B_{m,0}^{8k-1} - \text{Int } D^{8k-1} \quad .$$

Donc, d'après le corollaire de la proposition, on en déduit le lemme suivant.

LEMME 5. - Soit  $M^{8k-1}$  une variété différentiable compacte, orientée, sans bord, (4k - 2)-connexe, sans torsion de dimension  $8k - 1$  (k > 1). Alors

$$M^{8k-1} = \left( \#_{i=1}^r B_{m_i, 0}^{8k-1} \right) \# \tilde{S}^{8k-1}, \quad \tilde{S}^{8k-1} \in \Theta^{8k-1}.$$

On va considérer la classification difféomorphe des variétés  $\#_{i=1}^r B_{m_i, 0}^{8k-1}$ .

On sait que les classes de Pontrjagin  $p_{4k}(B_{m, 0}^{8k-1})$ ,  $p_{4k}(\overline{B}_{m, 0}^{8k})$  sont données par

$$p_{4k}(B_{m, 0}^{8k-1}) = c m \alpha, \quad ,$$

$$p_{4k}(\overline{B}_{m, 0}^{8k}) = c \overline{m} \alpha, \quad ,$$

où  $\alpha$  (resp.  $\overline{\alpha}$ ) désigne un générateur de  $H^{4k}(B_{m, 0}^{8k-1}) \approx \underline{\mathbb{Z}}$  (resp.  $H^{4k}(\overline{B}_{m, 0}^{8k}) \approx \underline{\mathbb{Z}}$ ), et

$$c = \begin{cases} 4 & k = 1, \\ 12 & k = 2, \\ 2((2k-1)!) & k \geq 3 \text{ impair}, \\ (2k-1)! & k \geq 4 \text{ pair}, \end{cases}$$

[8], [16].

On va prouver le lemme suivant.

**LEMME 6.** - Deux variétés différentiables orientées  $\#_{i=1}^r B_{m_i, 0}^{8k-1}$  et  $\#_{i=1}^r B_{m'_i, 0}^{8k-1}$  ( $k \geq 1$ ) sont difféomorphes, si et seulement si

$$p. g. d. c. (m_1, m_2, \dots, m_r) = p. g. d. c. (m'_1, m'_2, \dots, m'_r).$$

Démonstration. - D'abord, supposons qu'il existe un difféomorphisme

$$h : \#_{i=1}^r B_{m_i, 0}^{8k-1} \rightarrow \#_{i=1}^r B_{m'_i, 0}^{8k-1}.$$

Alors on a

$$h^*(\alpha_j^i) = \sum_{i=1}^r \xi_{ij} \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

où  $\alpha_i$ ,  $\alpha_i^i$  désignent les éléments de  $H^{4k}(\#_{i=1}^r B_{m_i, 0}^{8k-1})$ ,  $H^{4k}(\#_{i=1}^r B_{m'_i, 0}^{8k-1})$  duals aux classes d'homologie représentées par des sections de  $B_{m_i, 0}^{8k-1}$ ,  $B_{m'_i, 0}^{8k-1}$  respectivement. Evidemment on a

$$(*) \quad \det(\xi_{ij}) = \pm 1.$$

D'autre part, on a

$$(**) \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1r} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{r1} & \xi_{r2} & \cdots & \xi_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m'_1 \\ m'_2 \\ \vdots \\ m'_r \end{pmatrix},$$

parce que

$$h^*(p_{4k}(\prod_{i=1}^r B_{m'_i,0}^{8k-1})) = p_{4k}(\prod_{i=1}^r B_{m_i,0}^{8k-1}) .$$

Inversement, supposons qu'il existe une matrice  $(\xi_{ij})$  satisfaisant à (\*), (\*\*). On notera par  $\bar{a}_i$  l'élément de  $H_{4k}(\prod_{i=1}^r B_{m'_i,0}^{8k})$  représenté par une section de  $\bar{B}_{m'_i,0}^{8k}$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ). Soient

$$h_i : S^{4k} \rightarrow \text{Int} \left( \prod_{i=1}^r \bar{B}_{m'_i,0}^{8k} \right)$$

des applications telles que

$$[h_i(S^{4k})] = \sum_{j=1}^r \xi_{ij} \bar{a}_j \quad i = 1, 2, \dots, r .$$

$[h_i(S^{4k})]$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) est un système de générateurs de  $H_{4k}(\prod_{i=1}^r \bar{B}_{m'_i,0}^{8k})$ . On peut supposer que les  $h_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) sont des plongements dans  $\text{Int}(\prod_{i=1}^r \bar{B}_{m'_i,0}^{8k})$  tels que

$$h_i(S^{4k}) \cap h_j(S^{4k}) = \emptyset \quad (i \neq j) .$$

Soient  $N(h_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) des voisinages tubulaires des  $h_i(S^{4k})$  tels que

$$N(h_i) \cap N(h_j) = \emptyset \quad (i \neq j) .$$

Alors on a

$$\begin{aligned} p_{4k}(N(h_i)) &= \iota_i^*(p_{4k}(\prod_{i=1}^r \bar{B}_{m'_i,0}^{8k})) , \\ &= c \sum_{j=1}^r \xi_{ij} m'_j \{h_i(S^{4k})\} , \\ &= cm_i \{h_i(S^{4k})\} , \end{aligned}$$

où  $\iota_i : N(h_i) \rightarrow \prod_{i=1}^r \bar{B}_{m'_i,0}^{8k}$  est le plongement canonique, et  $\{h_i(S^{4k})\}$  désigne un générateur de  $H^{4k}(N(h_i)) \approx \mathbb{Z}$ . Donc

$$N(h_i) = \bar{B}_{m'_i,0}^{8k} \quad (i = 1, 2, \dots, r) .$$

Soit  $\bigsqcup_{i=1}^r N(h_i)$  la somme connexe à bord des  $N(h_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) réalisée dans  $\text{Int} \bigsqcup_{i=1}^r B_{m_i, 0}^{8k}$ . On peut vérifier que les injections

$$\bigsqcup_{i=1}^r B_{m_i, 0}^{8k-1} \rightarrow \bigsqcup_{i=1}^r B_{m_i, 0}^{8k} - \text{Int} \left( \bigsqcup_{i=1}^r N(h_i) \right),$$

$$\partial \left( \bigsqcup_{i=1}^r N(h_i) \right) \rightarrow \bigsqcup_{i=1}^r B_{m_i, 0}^{8k} - \text{Int} \left( \bigsqcup_{i=1}^r N(h_i) \right)$$

sont des homotopie-équivalences. Alors  $\bigsqcup_{i=1}^r B_{m_i, 0}^{8k-1}$  et  $\partial \left( \bigsqcup_{i=1}^r N(h_i) \right) = \bigsqcup_{i=1}^r B_{m_i, 0}^{8k-1}$

sont  $h$ -cobordantes. Donc, d'après un théorème de SMALE [13], [15],  $\bigsqcup_{i=1}^r B_{m_i, 0}^{8k-1}$  et  $\bigsqcup_{i=1}^r B_{m_i, 0}^{8k-1}$  sont difféomorphes.

L'existence de la matrice satisfaisant à (\*), (\*\*) est équivalente à la relation :

$$p \cdot \text{g. d. c.} (m_1, m_2, \dots, m_r) = p \cdot \text{g. d. c.} (m'_1, m'_2, \dots, m'_r) \quad .$$

Ainsi le lemme est démontré.

D'après les lemmes 5, 6, on a :

**THÉOREME 4.** - Soit  $M^{8k-1}$  une variété différentiable compacte orientée, sans bord,  $(4k - 2)$ -connexe, sans torsion de dimension  $8k - 1$  ( $k > 1$ ). Alors

$$M^{8k-1} = B_{m, 0}^{8k-1} \# \left( \#_{i=1}^{r-1} (S^{4k} \times S^{4k-1}) \right) \# \tilde{S}^{8k-1}, \quad \tilde{S}^{8k-1} \in \Theta^{8k-1}, \quad m \geq 0 \quad .$$

D'après un théorème de THOM [17], on a

**COROLLAIRE.** - Soient  $M_1^{8k-1}$ ,  $M_2^{8k-1}$  deux variétés différentiables compactes orientées, sans bord,  $(4k - 2)$ -connexes, sans torsion de dimension  $8k - 1$  ( $k > 1$ ). Alors  $M_1^{8k-1}$  et  $M_2^{8k-1}$  sont combinatoirement homéomorphes par rapport à des triangulations compatibles avec leurs structures différentiables, si et seulement si leurs nombres de Betti et les plus grands entiers qui divisent leurs classes de Pontrjagin sont égaux.

8. Les sommes connexes  $B_{m, 0}^{8k-1} \# \left( \#_{i=1}^{r-1} (S^{4k} \times S^{4k-1}) \right) \# \tilde{S}^{8k-1}$ ,  $\tilde{S}^{8k-1} \in \Theta^{8k-1}$ ,

$k = 1, 2$  .

D'abord supposons que

$$B_{m, 0}^7 \# \left( \#_{i=1}^{r-1} (S_i^4 \times S_i^3) \right) \# \tilde{S}^7 \quad (\tilde{S}^7 \in \Theta^7) \quad \text{et} \quad B_{m, 0}^7 \# \left( \#_{i=1}^{r-1} (S_i^4 \times S_i^3) \right)$$

soient difféomorphes. Alors, d'après le lemme 1, il existe un difféomorphisme  $\hat{\varphi} : B_{m,0}^7 \# \left( \prod_{i=1}^{r-1} (S_i^4 \times S_i^3) \right) - \text{Int } D^7 \rightarrow B_{m,0}^7 \# \left( \prod_{i=1}^{r-1} (S_i^4 \times S_i^3) \right) - \text{Int } D^7$ , tel que  $\tilde{S}^7 = D^7 \cup_{\hat{\varphi}|_{\partial D^7}} D^7$ .

Soit

$$W^8 = (\overline{B}_{m,0}^8 \sqcup \left( \prod_{i=1}^{r-1} (S_i^4 \times D_i^4) \right)) \cup_{\hat{\varphi}} (\overline{B}_{m,0}^8 \sqcup \left( \prod_{i=1}^{r-1} (S_i^4 \times D_i^4) \right))$$

la variété différentiable compacte orientée de dimension 8, obtenue par recollement de  $\overline{B}_{m,0}^8 \sqcup \left( \prod_{i=1}^{r-1} (S_i^4 \times D_i^4) \right)$  et de  $-\left( \overline{B}_{m,0}^8 \sqcup \left( \prod_{i=1}^{r-1} (S_i^4 \times D_i^4) \right) \right)$  au moyen de  $\hat{\varphi}$ . Evidemment, on a  $\partial W^8 = \tilde{S}^7$ .

D'après la suite exacte de Mayer-Vietoris, il est aisé de voir que  $W^8$  est 3-connexe, et que

$$H_4(W^8) = \bigoplus_{i=0}^{2r} \mathbb{Z}.$$

$H_4(W^8)$  a un système de générateurs  $a_0, a_1, \dots, a_{r-1}, a'_0, a'_1, \dots, a'_{r-1}$ , tels que  $a_0$  soit représenté par une section de  $\overline{B}_{m,0}^8$ , que  $a_i$  soit représenté par  $S_i^4 \times 0$  ( $i = 1, 2, \dots, r-1$ ), et que les  $a'_i$  ( $i = 0, 1, \dots, r-1$ ) soient représentés par des cycles  $c_i$ , dont les intersections,

$$c_0 \cap \left( \overline{B}_{m,0}^8 \sqcup \left( \prod_{i=1}^{r-1} (S_i^4 \times D_i^4) \right) \right),$$

$$c_i \cap \left( \overline{B}_{m,0}^8 \sqcup \left( \prod_{i=1}^{r-1} (S_i^4 \times D_i^4) \right) \right),$$

sont  $p^{-1}(x)$  ( $x \in S^4$ ),  $x_i \times D_i^4$  ( $x_i \in S_i^4$ ) respectivement ( $i = 1, 2, \dots, r-1$ ). On peut trouver des plongements

$$f_i : S^4 \rightarrow \text{Int } W^8, \quad i = 0, 1, \dots, r-1$$

tels que  $[f_i(S^4)] = a'_i$ .

Supposons que  $\sigma$  soit la classe d'homotopie contenant l'application

$$\sigma' : S^3 \rightarrow SO(4)$$

définie par  $\sigma'(q)q' = qq'$ , où  $q$  et  $q'$  désignent des quaternions de norme 1, et que l'application caractéristique du voisinage tubulaire de  $f_i(S^4)$  dans  $W^8$  soit  $m_i' \nu + n_i' \sigma$  ( $i = 0, 1, \dots, r-1$ ). Alors, la matrice des nombres d'intersection de

$$a_0, a_1, \dots, a_{r-1}, a'_0, a'_1, \dots, a'_{r-1}$$

est donnée par (cf. [16]) :

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & S \end{pmatrix} \quad E = (\delta_{ij}) , \quad S = (s_{ij}) , \quad s_{ij} = s_{ji} , \quad s_{ii} = n_i' ,$$

dont la signature est égale à zéro.

Soit  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha'_0, \alpha'_1, \dots, \alpha'_{r-1})$  un système de générateurs de  $H^4(W^8)$  dual à  $(a_0, a_1, \dots, a_{r-1}, a'_0, a'_1, \dots, a'_{r-1})$ . Alors la matrice de produits de ce système est donnée par

$$\begin{pmatrix} -S & E \\ E & 0 \end{pmatrix} .$$

On sait que

$$p_4(\overline{B}_{m_i', n_i'}^8) = 2(2m_i' + n_i') \{S^4\} ,$$

où  $\{S^4\}$  est un générateur de  $H^4(\overline{B}_{m_i', n_i'}^8)$  représenté par une section [16].

Puisqu'il existe un plongement

$$\iota' : \overline{B}_{m_i', n_i'}^8 \rightarrow W^8 ,$$

tel que

$$\iota'^*(\alpha_i') = \{S^4\} ,$$

la classe de Pontrjagin de  $W^8$  est donnée par

$$p_4(W^8) = 4m\alpha_1 + \sum_{i=0}^{r-1} 2(2m_i' + n_i') \alpha_i' .$$

Donc, d'après le lemme 2, on a

$$(***) \quad \lambda'(\tilde{S}^7) = -mm'_0 + \frac{m(m-1)}{2} n'_0 \pmod{28} .$$

Ensuite, soit

$$Q = (U(s) \cup p^{-1}(D^4)) \natural_{i=1}^{r-1} ((S_i^4 \times D_i^3) \cup (D_i^4 \times S_i^3))$$

la somme connexe à bord de

$$U(s) \cup p^{-1}(D^4) \subset B_{m,0}^7 \text{ et de } (S_i^4 \times D_i^3) \cup (D_i^4 \times S_i^3) \subset S_i^4 \times S_i^3 \quad (i=1,2,\dots,r-1)$$

réalisée dans  $B_{m,0}^7 \natural_{i=1}^{r-1} (S_i^4 \times S_i^3)$ . Evidemment on a

$$B_{m,0}^7 \natural_{i=1}^{r-1} (S_i^4 \times S_i^3) - \text{Int } Q = D^7 .$$

Soit

$$\hat{\varphi}' : Q^7 \rightarrow Q^7$$

un difféomorphisme défini par

$$\hat{\varphi}: (U(s) \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{r-1} ((S_i^4 \times D_i^3) \cup (D_i^4 \times S_i^3))) = \text{identité} \quad ,$$

$$\hat{\varphi}'(y, y') = (\gamma(y') y, y') \quad ,$$

où  $(y, y') \in D^4 \times S^3 = p^{-1}(D^4)$ , et  $\gamma$  est une application

$$\gamma: S^3 \rightarrow SO(4)$$

telle que

$$\{\gamma\} = m_0 \iota_*(\rho) + n_0 \sigma \in \pi_3(SO(4)) \quad .$$

Soit

$$\tilde{S}^7 = D^7 \cup_{\hat{\varphi}'|_{\partial D^7}} D^7 \quad ,$$

alors, d'après le lemme 1, on a

$$B_{m,0}^7 \# \left( \bigsqcup_{i=1}^{r-1} (S_i^4 \times S_i^3) \right) \# \tilde{S}^7 = B_{m,0}^7 \# \left( \bigsqcup_{i=1}^{r-1} (S_i^4 \times S_i^3) \right) \quad .$$

D'autre part, en vertu de (\*\*), on a

$$\lambda'(\tilde{S}^7) = -mm_0 + \frac{m(m-1)}{2} n_0 \pmod{28} \quad .$$

Donc, d'après le lemme 6, on en déduit le théorème suivant.

**THÉOREME 5.** -  $\left( \bigsqcup_{i=1}^r B_{m_i,0}^7 \right) \# \tilde{S}^7$  ( $\tilde{S}^7 \in \Theta^7$ ) et  $\left( \bigsqcup_{i=1}^r B_{m_i,0}^7 \right)$  sont difféomorphes,

si et seulement si  $\lambda'(\tilde{S}^7)$  est divisible par  $m \pmod{28}$  ( $m$  impair), resp. par  $m/2 \pmod{28}$  ( $m$  pair), où  $m$  désigne le plus grand diviseur commun de

$m_1, m_2, \dots, m_r$ .

**COROLLAIRE.** - La variété topologique  $S^4 \times S^3$  admet au moins 28 structures différentiables orientées.

On sait que

$$\Theta^{15} \approx \mathbb{Z}_{8128} + \mathbb{Z}_2, \quad \Theta^{15}(\partial\pi) \approx \mathbb{Z}_{8128} \quad .$$

Supposons que  $B_{m,0}^{15} \# \left( \bigsqcup_{i=1}^{r-1} (S^8 \times S^7) \right) \# \tilde{S}^{15}$  ( $\tilde{S}^{15} \in \Theta^{15}$ ) et  $B_{m,0}^{15} \# \left( \bigsqcup_{i=1}^{r-1} (S^8 \times S^7) \right)$  soient difféomorphes. Alors, d'après le lemme 1, il existe un difféomorphisme

$$\hat{\varphi}: B_{m,0}^{15} \# \left( \bigsqcup_{i=1}^{r-1} (S^8 \times S^7) \right) - \text{Int } D^{15} \rightarrow B_{m,0}^{15} \# \left( \bigsqcup_{i=1}^{r-1} (S^8 \times S^7) \right) - \text{Int } D^{15} \quad ,$$

tel que

$$\tilde{S}^{15} = D^{15} \cup_{\hat{\varphi}|\partial D^{15}} D^{15} .$$

Soit

$$W^{16} = (\overline{B}_{m,o}^{16} \natural (\natural^{r-1} (S^8 \times D^8))) \cup_{\hat{\varphi}} (\overline{B}_{m,o}^{16} \natural (\natural^{r-1} (S^8 \times D^8)))$$

la variété différentiable orientée obtenue par recollement de  $\overline{B}_{m,o}^{16} \natural (\natural^{r-1} (S^8 \times D^8))$  et de  $-\overline{B}_{m,o}^{16} \natural (\natural^{r-1} (S^8 \times D^8))$  au moyen de  $\hat{\varphi}$ . Alors  $W^{16}$  est 7-connexe. Donc, d'après un résultat de WALL [18], on a

$$\tilde{S}^{15} = \partial W^{16} \in \Theta^{15}(\partial\pi) .$$

Alors, d'après un calcul semblable à celui conduisant au théorème 5, on a le théorème suivant.

THÉOREME 6. -  $(\#_{i=1}^r B_{m_i,o}^{15}) \# \tilde{S}^{15}$  ( $\tilde{S}^{15} \in \Theta^{15}$ ) et  $(\#_{i=1}^r B_{m_i,o}^{15})$  sont difféomorphes, si et seulement si  $\tilde{S}^{15} \in \Theta^{15}(\partial\pi)$  et  $\lambda'(\tilde{S}^{15})$  est divisible par  $m$  mod 8128 ( $m$  impair), resp. par  $m/2$  mod 8128 ( $m$  pair), où  $m$  désigne le plus grand diviseur commun de  $m_1, m_2, \dots, m_r$ .

COROLLAIRE. - La variété topologique  $S^8 \times S^7$  admet au moins 16256 structures différentiables orientées.

D'après les théorèmes 4 et 6, on obtient

THÉOREME 7. - Soit  $M^{15}$  une variété différentiable compacte orientée, sans bord, 6-connexe, sans torsion de dimension 15. Alors

$$M^{15} = B_{m,o}^{15} \# (\#^{r-1} (S^8 \times S^7)) \# \tilde{S}^{15}, \quad \tilde{S}^{15} \in \Theta^{15},$$

où

$$\begin{aligned} \{\tilde{S}^{15}\} &\in \Theta^{15}/m(\Theta^{15}(\partial\pi)) && m \text{ impair} , \\ &\in \Theta^{15}/m/2(\Theta^{15}(\partial\pi)) && m \text{ pair} . \end{aligned}$$

Cette présentation est unique.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ATIYAH (M. F.) and HIRZEBRUCH (F.). - Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 65, 1959, p. 276-281.
- [2] BOREL (A.) and HIRZEBRUCH (F.). - Characteristic classes and homogeneous spaces, III., *Amer. J. of Math.*, t. 82, 1960, p. 491-504.
- [3] CERF (Jean). - Travaux de Smale sur la structure des variétés différentiables, *Séminaire Cartan*, t. 14, 1961/62 : Topologie différentielle, n° 16-18 (à paraître).
- [4] HAEFLIGER (André). - Plongements différentiables de variétés dans variétés, *Comment. Math. Helvet.*, t. 36, 1961, p. 47-82.
- [5] HIRZEBRUCH (Friedrich). - Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. - Berlin, J. Springer, 1956 (*Ergebnisse der Mathematik, Neue Folge*, 9).
- [6] KERVAIRE (M.). - Some non-stable homotopy groups of Lie groups, *Illinois J. of Math.*, t. 4, 1960, p. 161-169.
- [7] KERVAIRE (M.) and MILNOR (J.). - Groups of homotopy spheres, I. - New York, New York University, 1961 (multigraphié).
- [8] MILNOR (J.). - Some consequences of a theorem of Bott, *Annals of Math.*, t. 68, 1958, p. 444-449.
- [9] MILNOR (J.). - Differentiable structures on spheres, *Amer. J. of Math.*, t. 81, 1959, p. 962-972.
- [10] MILNOR (J.). - Differentiable manifolds which are homotopy spheres. - Princeton, Princeton University Press, 1959 (multigraphié).
- [11] MORIN (Bernard). - Sur les suites spectrales de Kervaire-Milnor, *Séminaire Cartan*, t. 14, 1961/62 : Topologie différentielle, 2e partie, n° 8-13 (à paraître).
- [12] MORLET (Claude). - Les homomorphismes des algèbres de cobordismes dans  $\mathbb{Q}$ , *Séminaire Cartan*, t. 15, 1962/63 : Topologie différentielle, n° 1-4 (à paraître).
- [13] SMALE (S.). - Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four, *Annals of Math.*, t. 74, 1961, p. 391-406.
- [14] SMALE (S.). - On the structure of 5-manifolds, *Annals of Math.*, t. 75, 1962, p. 38-46.
- [15] SMALE (S.). - On the structure of manifolds, *Amer. J. of Math.*, t. 84, 1962, p. 387-399.
- [16] TAMURA (I.). - On Pontrjagin classes and homotopy types of manifolds, *J. Math. Soc. Japan*, t. 9, 1957, p. 250-262.
- [17] THOM (René). - Les classes caractéristiques de Pontrjagin des variétés triangulées, *Symposium internacional de topologia algebraica [1958. Mexico]* ; p. 54-67. - Mexico, UNESCO, 1958.
- [18] WALL (C. T. C.). - Classification of  $(n-1)$ -connected  $2n$ -manifolds, *Annals of Math.*, t. 74, 1962, p. 163-189.
- [19] WHITEHEAD (J. H. C.) and JAMES (I. M.). - The homotopy theory of sphere bundles over spheres, *Proc. London math. Soc.*, t. 4, 1954, p. 196-218.
- [20] WHITNEY (H.). - The self-intersections of a smooth  $n$ -manifold in  $2n$ -space, *Annals of Math.*, t. 45, 1944, p. 220-246.