Henri Cartan

Classes d'applications d'un espace dans un groupe topologique, d'après Shih Weishu

Séminaire Henri Cartan, tome 15 (1962-1963), exp. n° 6, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1962-1963__15__A1_0>

Séminaire H. CARTAN
15e année, 1962/63, n° 6

26 novembre 1962

CLASSES D'APPLICATIONS D'UN ESPACE DANS UN GROUPE TOPOLOGIQUE, D'APRÈS SHIH WEISHU

par Henri CARTAN

1. Fibrations attachées au problème.

Soient X un espace topologique, et G un groupe topologique. On se propose d'étudier l'ensemble $[X , G]$ des classes d'applications continues $X \to G$; il porte évidemment une structure de groupe.

Pour des raisons techniques, on se placera dans le cadre simplicial : G sera un groupe simplicial, X un ensemble simplicial ; on notera $\mathrm{Hom}(X , G)$ le groupe simplicial suivant : le groupe $\mathrm{Hom}(X , G)_n$ des n-simplexes de $\mathrm{Hom}(X , G)$ est le groupe des applications simpliciables du produit $\Delta_n \times X$ dans G (rappelons, cf. [5], que Δ_n désigne l'ensemble simplicial dont les p-simplexes sont les applications croissantes (au sens large) de la suite $(0 , 1 , \dots , p)$ dans la suite $(0 , 1 , \dots , n)$, les opérations de face et de dégénérescence étant définies de manière évidente). Pour achever de définir la collection des $\mathrm{Hom}(X , G)_n$ comme un groupe simplicial, on doit associer à chaque application croissante $\varphi : (0 , 1 , \dots , p) \to (0 , 1 , \dots , q)$ un homomorphisme du groupe $\mathrm{Hom}(X , G)_q \to \mathrm{Hom}(X , G)_p$; c'est celui qui, à chaque application simpliciale $f : \Delta_q \times X \to G$, associe l'application composée $\Delta_p \times X \xrightarrow{\psi} \Delta_q \times X \xrightarrow{f} G$, où ψ est induite par φ.

Le groupe $[X , G]$ que l'on se propose d'étudier n'est autre que $\pi_0 \mathrm{Hom}(X , G)$, 0-ième groupe d'homotopie du groupe simplicial $\mathrm{Hom}(X , G)$: c'est le groupe de ses composantes connexes. Plus généralement, on va considérer tous les groupes d'homotopie $\pi_n \mathrm{Hom}(X , G)$, qui sont abéliens pour $n \geqslant 1$.

Pour G, comme pour tout ensemble simplicial (qu'il soit ou non un groupe simplicial), considérons G_p, le sous-ensemble simplicial formé des simplexes dont le $(p - 1)$-squelette est au point-base. Ici, on prend comme point-base l'élément neutre du groupe, et G_p est un sous-groupe invariant de G (i. e. : dans chaque dimension n, les n-simplexes de G_p forment un sous-groupe invariant du groupe des n-simplexes de G). Le groupe-quotient G/G_p est un groupe simplicial : c'est le p-ième système de Postnikov de G (cf. [4]). La suite exacte de groupes simpliciaux et d'homomorphismes

$$(1) \to G_p \to G \to G/G_p \to (1)$$

définit G comme <u>fibré principal</u> de groupe G_p. On a donc une suite exacte d'homotopie

$$\dots \to \pi_n(G_p) \to \pi_n(G) \to \pi_n(G/G_p) \to \pi_{n-1}(G_p) \to \dots$$

Il est immédiat que

$$\begin{cases} \pi_i(G_p) = 0 \quad \text{pour} \quad i < p \ , \\ \pi_i(G_p) \to \pi_i(G) \quad \text{est un isomorphisme pour} \quad i \geqslant p \end{cases}$$

(c'est là un fait général pour les ensembles simpliciaux, non nécessairement des groupes) ; autrement dit, $G_p \to G$ "tue" les groupes d'homotopie $\pi_i(G)$ pour $i < p$.

Alors la suite exacte d'homotopie montre que

$$\begin{cases} \pi_i(G/G_p) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant p \ , \\ \pi_i(G) \to \pi_i(G/G_p) \quad \text{est un isomorphisme pour} \quad i < p \ . \end{cases}$$

Soit $p < q$; remplaçant G par G_p et G_p par G_q, on voit que

$$\pi_i(G_p/G_q) = 0 \quad \text{pour} \quad i < p \quad \text{et pour} \quad i \geqslant q \ ,$$

$$\pi_i(G_p/G_q) \approx \pi_i(G) \quad \text{pour} \quad p \leqslant i < q \ .$$

En particulier, le groupe G_p/G_{p+1} est un groupe $K(\pi_p(G), p)$, c'est-à-dire dont tous les groupes d'homotopie π_i sont nuls, sauf π_p qui est isomorphe à $\pi_p(G)$.

Considérons trois entiers $p < q < r$; on a un fibré principal

$$G_q/G_r \to G_p/G_r \to G_p/G_q \ ,$$

de fibre G_q/G_r, de base G_p/G_q. Il en résulte que la suite de groupes simpliciaux et d'homomorphismes

$$(1) \qquad \mathrm{Hom}(X\ ,\ G_q/G_r) \xrightarrow{f} \mathrm{Hom}(X\ ,\ G_p/G_r) \xrightarrow{g} \mathrm{Hom}(X\ ,\ G_p/G_q)$$

est un <u>fibré</u> au sens de KAN (cf. [5], exposé 3, théorème 1) ; cela signifie, en fait, que la suite (1) est une suite exacte, et que f est injectif ; l'homomorphisme g n'est peut-être pas surjectif, mais son image se compose d'un certain nombre de composantes connexes (cf. relèvement des homotopies dans un fibré). On a donc la suite exacte d'homotopie

$$(A) \qquad \dots \to \pi_n\ \mathrm{Hom}(X\ ,\ G_q/G_r) \to \pi_n\ \mathrm{Hom}(X\ ,\ G_p/G_r) \to \pi_n\ \mathrm{Hom}(X\ ,\ G_p/G_q)$$
$$\xrightarrow{\delta} \pi_{n-1}\ \mathrm{Hom}(G_q/G_r) \to \dots \to \pi_o\ \mathrm{Hom}(X\ ,\ G_p/G_r) \to \pi_o\ \mathrm{Hom}(X\ ,\ G_p/G_q)\ ,$$

la dernière application n'étant peut-être pas surjective.

Toutefois, on peut compléter cette suite par un terme complémentaire à droite, dans le cas où $r = q + 1$. En effet, le fibré

$$(2) \qquad G_q/G_{q+1} \to G_p/G_{q+1} \to G_p/G_q$$

a pour fibre un groupe $K(\pi_q(G)\ ,\ q)$; il est donc (voir par exemple [5], exposé 4) isomorphe à l'image réciproque du fibré universel, de base $K(\pi_q(G)\ ,\ q+1)$ et de fibre $K(\pi_q(G)\ ,\ q)$, pour une application simpliciale

$$f\ :\ G_p/G_q \to K(\pi_q(G)\ ,\ q+1) \quad .$$

Je dis que f est homotopiquement un <u>homomorphisme</u> de groupes simpliciaux, c'est-à-dire que le diagramme

$$\begin{tikzcd} G_p/G_q \times G_p/G_q \arrow[r, "f\times f"] \arrow[d] & K(\pi_q(G)\ ,\ q+1) \times K(\pi_q(G)\ ,\ q+1) \arrow[d] \\ G_p/G_q \arrow[r, "f"] & K(\pi_q(G)\ ,\ q+1) \end{tikzcd}$$

est homotopiquement commutatif. En effet, désignons, pour tout groupe simplicial Γ , par $\overline{W}(\Gamma)$ le classifiant (simplicial) de Γ , base du fibré universel (cf. par exemple [5], exposé 4). Le fibré (2) donne lieu à un fibré

$$\overline{W}(G_q/G_{q+1}) \to \overline{W}(G_p/G_{q+1}) \to \overline{W}(G_p/G_q)$$

(cf. [7], Chap. III, § 5) ; ici, $\overline{W}(G_q/G_{q+1}) = K(\pi_q(G)\ ,\ q+2)$, et le fibré est défini par une classe d'applications

$$\overline{W}(G_p/G_q) \to K(\pi_q(G)\ ,\ q+2) \qquad ,$$

c'est-à-dire par un élément de la cohomologie $H^{q+2}(\overline{W}(G_p/G_q)\ ;\ \pi_q(G))$ (observer que $q \geqslant 1$, puisque $p < q$; donc $\pi_q(G)$ est abélien), dont la suspension, élément de $H^{q+1}(G_p/G_q\ ;\ \pi_q(G))$, définit la classe de l'application f . L'assertion relative à f en résulte. Ainsi f induit un homomorphisme de groupes

(3) $$\pi_o \operatorname{Hom}(X\ ,\ G_p/G_q) \to \pi_o \operatorname{Hom}(X\ ,\ K(\pi_q(G)\ ,\ q+1)) \qquad .$$

Rajoutons-le à droite de la suite exacte (A) (pour $r = q+1$) ; cela donne une suite exacte (A') se terminant ainsi :

$$\pi_o \operatorname{Hom}(X\ ,\ G_p/G_{q+1}) \to \pi_o \operatorname{Hom}(X\ ,\ G_p/G_q) \to \pi_o \operatorname{Hom}(X\ ,\ K(\pi_q(G)\ ,\ q+1) \qquad .$$

Ainsi complétée, la suite (A') est exacte : tout revient à montrer que, pour que $\xi \in \pi_o \operatorname{Hom}(X\ ,\ G_p/G_q)$ ait une image nulle dans $\pi_o \operatorname{Hom}(X\ ,\ K(\pi_q(G)\ ,\ q+1))$, il faut et il suffit qu'il provienne d'un élément de $\pi_o \operatorname{Hom}(X\ ,\ G_p/G_{q+1})$. En effet, dire que l'image de ξ est nulle, c'est dire que le fibré principal de base X , de fibre $G_q/G_{q+1} = K(\pi_q(G)\ ,\ q)$ défini par ξ est trivial, autrement dit que l'application $X \to G_p/G_q$ qui est dans la classe de ξ se relève en une application $X \to G_p/G_{q+1}$; ceci signifie exactement que ξ est dans l'image de $\pi_o \operatorname{Hom}(X\ ,\ G_p/G_{q+1})$.

2. La suite spectrale de Shih.

On va filtrer le groupe $\pi_o \operatorname{Hom}(X\ ,\ G)$ par des sous-groupes invariants. Posons

$$F^p\, \pi_o \operatorname{Hom}(X\ ,\ G) = \operatorname{Im}(\pi_o \operatorname{Hom}(X\ ,\ G_p) \to \pi_o \operatorname{Hom}(X\ ,\ G))$$

$$= \operatorname{Ker}(\pi_o \operatorname{Hom}(X\ ,\ G) \to \pi_o \operatorname{Hom}(X\ ,\ G/G_p)) \qquad ;$$

l'égalité résulte de la suite exacte d'homotopie du fibré

$$\mathrm{Hom}(X , G_p) \to \mathrm{Hom}(X , G) \to \mathrm{Hom}(X , G/G_p) \quad .$$

$F^p \pi_o \mathrm{Hom}(X , G)$ est bien un sous-groupe invariant de $\pi_o \mathrm{Hom}(X , G)$, puisque c'est le noyau d'un homomorphisme. On a évidemment

$$F^{p+1} \pi_o \mathrm{Hom}(X , G) \subset F^p \pi_o \mathrm{Hom}(X , G) \quad ,$$

donc la filtration est décroissante. Observons que

$$F^o \pi_o \mathrm{Hom}(X , G) = \pi_o \mathrm{Hom}(X , G) \quad .$$

On peut former les groupes quotients F^p/F^{p+1} , pour tout entier $p \geqslant 0$, et même pour tout entier $p \geqslant 0$ ou < 0 , en convenant que, pour $p < 0$, $F^p = F^o$. Le groupe gradué associé est

$$\bigoplus_p F^p \pi_o \mathrm{Hom}(X , G)/F^{p+1} \pi_o \mathrm{Hom}(X , G) \quad .$$

On verra que c'est un groupe <u>abélien</u>, sauf peut-être pour $p = 0$ (si G n'est pas connexe).

Plus généralement, on peut filtrer les $\pi_n \mathrm{Hom}(X , G)$ pour tout entier $n \geqslant 0$; par définition, le gradué associé

$$\bigoplus_p F^p \pi_n \mathrm{Hom}(X , G)/F^{p+1} \pi_n \mathrm{Hom}(X , G)$$

sera la composante "de degré total" n du gradué associé

$$\bigoplus_p F^p \pi \mathrm{Hom}(X , G)/F^{p+1} \pi \mathrm{Hom}(X , G) \quad .$$

Comme d'habitude, les éléments de

$$\bigoplus_{n \geqslant 0} F^p \pi_n \mathrm{Hom}(X , G)/F^{p+1} \pi_n \mathrm{Hom}(X , G)$$

sont ceux de <u>degré filtrant</u> p .

On va voir que ce gradué associé est canoniquement isomorphe au terme E_∞ d'une suite spectrale.

Auparavant, introduisons les notations suivantes : pour tout couple d'entiers (p , q) tels que $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$, posons

$$H_n(p , q) = \pi_n \operatorname{Hom}(X , G_p/G_q) \quad \text{pour} \quad n \quad \text{entier} \quad \geqslant 0$$

(en convenant que, pour $q = +\infty$, G_q est réduit à l'élément neutre). Posons en outre, pour $p \geqslant 1$,

$$H_{-1}(p , p+1) = \pi_o \operatorname{Hom}(X , K(\pi_p(G) , p+1)) \quad .$$

Si on se rappelle que le groupe des classes d'applications continues d'un espace X dans un groupe $K(\Pi , q)$ (où Π est abélien) est en correspondance bijective naturelle avec le groupe de cohomologie $H^q(X ; \Pi)$, on voit que

$$H_{-1}(p , p+1) = H^{p+1}(X ; \pi_p(G)) \quad \text{pour} \quad p \geqslant 1 \quad ,$$

$$H_n(p , p+1) = H^{p-n}(X ; \pi_p(G)) \quad \text{pour} \quad n \geqslant 0 , \quad p \geqslant 0 \quad ,$$

en convenant que le groupe de cohomologie H^{p-n} est réduit à l'élément neutre si $n > p$, et que, pour $n = 0$, $p = 0$, il désigne le groupe (non nécessairement abélien) $\operatorname{Hom}(X , \pi_o(G))$ des applications continues de X dans le groupe discret des composantes connexes de G . On observera que $H_n(p , p+1)$ est un groupe abélien, sauf pour $n = 0$, $p = 0$.

Cela étant, nous pouvons décrire la situation abstraite dans laquelle nous nous trouvons ici :

(i) Pour tout couple d'entiers (p , q) tels que $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$, et pour tout entier $n \geqslant 0$, on a des groupes $H_n(p , q)$, nuls si $p = q$; et on a aussi un groupe abélien $H_{-1}(p , p+1)$ pour $p \geqslant 1$. On peut convenir de définir $H_n(p , q)$ pour $n \geqslant 0$, $p < 0$, $q \geqslant 0$, en posant alors $H_n(p , q) = H_n(0 , q)$.

(ii) Chaque fois que $p \leqslant p'$ et $q \leqslant q'$ (avec $p \leqslant q$, $p' \leqslant q'$), on a un homomorphisme de groupes

$$H_n(p' , q') \xrightarrow{\varphi} H_n(p , q) \qquad (\text{pour} \quad n \geqslant 0) \quad ,$$

ces homomorphismes satisfaisant à une condition de transitivité évidente. Pour $p = p'$, $q = q'$, φ est l'identité.

(iii) Pour $p \leqslant q \leqslant r$, on a des homomorphismes

$$H_n(p\ ,\ q) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(q\ ,\ r) \qquad (\text{pour } n \geqslant 1)$$
$$H_o(p\ ,\ q) \xrightarrow{\delta} H_{-1}(q\ ,\ q+1) \qquad .$$

Les données (i), (ii) et (iii) satisfont aux axiomes suivants (outre ceux qui ont déjà été formulés) :

AXIOME (I). - Lorsque $p \leqslant p'$, $q \leqslant q'$, $r \leqslant r'$ (avec $p \leqslant q \leqslant r$, $p' \leqslant q' \leqslant r'$), le diagramme suivant est commutatif (pour $n \geqslant 1$) :

$$\begin{array}{ccc} H_n(p'\ ,\ q') & \xrightarrow{\delta} & H_{n-1}(q'\ ,\ r') \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ H_n(p\ ,\ q) & \xrightarrow{\delta} & H_{n-1}(q\ ,\ r) \end{array} \qquad .$$

De plus, pour $p \leqslant p' \leqslant q$, $q \geqslant 1$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_o(p'\ ,\ q) & \xrightarrow{\delta} & H_{-1}(q\ ,\ q+1) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \text{id.} \\ H_o(p\ ,\ q) & \xrightarrow{\delta} & H_{-1}(q\ ,\ q+1) \end{array} \qquad .$$

AXIOME (II). - Pour $p \leqslant q \leqslant r$, la suite

$$\ldots \to H_n(q\ ,\ r) \xrightarrow{\varphi} H_n(p\ ,\ r) \xrightarrow{\varphi} H_n(p\ ,\ q) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(q\ ,\ r) \xrightarrow{\varphi} \ldots$$
$$\xrightarrow{\varphi} H_1(p\ ,\ q) \xrightarrow{\delta} H_o(q\ ,\ r) \xrightarrow{\varphi} H_o(p\ ,\ r) \xrightarrow{\varphi} H_o(p\ ,\ q)$$

est exacte. De plus, lorsque $r = q + 1$, $q \geqslant 1$, on peut rajouter, à droite de $H_o(p\ ,\ q)$, l'homomorphisme $H_o(p\ ,\ q) \xrightarrow{\delta} H_{-1}(q\ ,\ q+1)$, et la suite ainsi complétée est encore exacte.

3. La suite spectrale (suite).

Un système de données (i), (ii) et (iii), avec les axiomes (I) et (II) précédents, nous place dans la situation habituelle donnant naissance à une suite spectrale (cf. [2], Chap. XV, § 7), sauf que, contrairement à l'habitude :

1° Les groupes $H_n(p\ ,\ q)$ ne sont pas nécessairement abéliens (toutefois les $H_{-1}(p\ ,\ p+1)$ le sont) ;

2° La suite exacte de l'axiome (II) s'interrompt à droite (éventuellement prolongée par un terme de degré -1 lorsque $r = q+1\ ,\ q \geqslant 1$).

On va voir que la théorie de la suite spectrale est encore applicable. On s'intéresse au calcul du groupe $H_n(0\ ,\ +\infty)$, qu'on notera simplement H_n (dans le cas présent, c'est $\pi_n\ \mathrm{Hom}(X\ ,\ G)$). On filtre H_n , pour $n \geqslant 0$, en posant :

$$F^p\,H^n = \mathrm{Im}\ (H_n(p\ ,\ +\infty) \xrightarrow{\varphi} H_n(0\ ,\ +\infty))$$
$$= \mathrm{Ker}\ (H_n(0\ ,\ +\infty) \xrightarrow{\varphi} H_n(0\ ,\ p)) \qquad ;$$

$F^p\,H_n$ est un sous-groupe invariant de H_n . Posons, pour tout entier r tel que $1 \leqslant r \leqslant +\infty$,

$$\begin{cases} Z_r^{p,-n} = \mathrm{Im}\ (H_n(p\ ,\ p+r) \xrightarrow{\varphi} H_n(p\ ,\ p+1)) & \text{si } n \geqslant 0 \quad , \\ Z_r^{p,1} = H_{-1}(p\ ,\ p+1) & \text{si } p \geqslant 1 \quad . \end{cases}$$

(On écrit $-n$ en indice supérieur, parce que n figure en indice inférieur dans H_n , et doit donc être compté comme un degré "négatif".) Posons aussi, pour $n \geqslant -1$,

$$\begin{cases} B_r^{p,-n} = \mathrm{Im}\ (H_{n+1}(p-r+1\ ,\ p) \xrightarrow{\delta} H_n(p\ ,\ p+1)) & \text{pour } p \geqslant 1 \\ B_r^{o,-n} = 0 & . \end{cases}$$

Tous les groupes $B_r^{p,-n}$ sont des sous-groupes invariants de $H_n(p\ ,\ p+1)$; de plus, il est immédiat que $B_r^{p,-n} \subset Z_r^{p,-n}$, donc on peut considérer le groupe quotient

$$E_r^{p,-n} = Z_r^{p,-n}/B_r^{p,-n} \qquad (n \geqslant 0\ ;\ \text{et}\ \ n = -1\ ,\ \ p \geqslant 1) \qquad .$$

On notera que $E_1^{p,-n} = H_n(p\ ,\ p+1)$

PROPOSITION 1. - <u>Pour tout entier</u> $n \geqslant 0$, <u>on a un isomorphisme naturel de groupes</u>

$$E_{\infty}^{p,-n} \approx F^p H_n / F^{p+1} H_n \quad .$$

En effet, écrivons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & H_{n+1}(0 , p) \arrow[d] \arrow[dr, "\delta'"] & \\ H_n(p+1 , +\infty) \arrow[r] \arrow[dr, "\delta"'] & H_n(p , +\infty) \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\varphi"] & H_n(p , p+1) \\ & H_n(0 , +\infty) & \end{tikzcd}$$

dont les lignes et les colonnes sont exactes. Il définit, comme bien connu, un isomorphisme

$$\mathrm{Im}\ \varphi / \mathrm{Im}\ \delta \approx \mathrm{Im}\ \varphi' / \mathrm{Im}\ \delta' \quad .$$

C. Q. F. D.

PROPOSITION 2. - <u>On a, pour tout entier</u> $n \geqslant 0$, <u>et pour</u> $r < +\infty$, <u>un isomorphisme naturel</u>

$$Z_r^{p,-n} / Z_{r+1}^{p,-n} \approx B_{r+1}^{p+r,-n+1} / B_r^{p+r,-n+1} \quad .$$

En effet, écrivons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & H_n(p+1 , p+r) \arrow[d] \arrow[dr, "\delta'"] & \\ H_n(p , p+r+1) \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi'"'] & H_n(p , p+r) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\varphi"] & H_{n-1}(p+r , p+r+1) \\ & H_n(p , p+1) & \end{tikzcd}$$

dont les lignes et les colonnes sont exactes. Il montre d'abord que l'image de $H_n(p , p+r+1) \to H_n(p , p+r)$ est un sous-groupe invariant ; donc $\mathrm{Im}\ \varphi'$ est un sous-groupe invariant de $\mathrm{Im}\ \varphi$; cela permet de considérer le groupe quotient $Z_r^{p,-n}/Z_{r+1}^{p,-n}$. Puis le diagramme définit un isomorphisme de groupes

$$\mathrm{Im}\ \varphi/\mathrm{Im}\ \varphi' \approx \mathrm{Im}\ \delta/\mathrm{Im}\ \delta' \quad .$$

C. Q. F. D.

<u>Définition, pour</u> $n \geqslant 0$ (et $r < +\infty$) <u>de l'homomorphisme</u>

$$d_r : E_r^{p,-n} \to E_r^{p+r,-n+1} \quad .$$

C'est, par définition, le composé des trois homomorphismes

$$Z_r^{p,-n}/B_r^{p,-n} \longrightarrow Z_r^{p,-n}/Z_{r+1}^{p,-n} \approx B_{r+1}^{p+r,-n+1}/B_r^{p+r,-n+1} \longrightarrow Z_r^{p+r,-n+1}/B_r^{p+r,-n+1}$$

dont le premier est surjectif, le second est l'isomorphisme de la proposition 2, et le troisième est injectif.

PROPOSITION 3. - <u>Pour</u> $n \geqslant 0$, <u>le noyau de</u> $d_r : E_r^{p,-n} \to E_r^{p+r,-n+1}$ <u>est</u> $Z_{r+1}^{p,-n}/B_r^{p,-n}$; <u>l'image de</u> $d_r : E_r^{p-r,-n-1} \to E_r^{p,-n}$ <u>est</u> $B_{r+1}^{p,-n}/B_r^{p,-n}$. <u>Donc</u> $\mathrm{Im}\ d_r$ <u>est un sous-groupe invariant de</u> $\mathrm{Ker}\ d_r$, <u>et</u>

$$\mathrm{Ker}\ d_r/\mathrm{Im}\ d_r \approx Z_{r+1}^{p,-n}/B_{r+1}^{p,-n} = E_{r+1}^{p,-n} \quad .$$

Ces assertions sont évidentes.

Ainsi le groupe E_{r+1} s'identifie au "groupe d'homologie" de E_r pour l'opérateur différentiel d_r, du moins pour $n \geqslant 0$. Mais il en est encore ainsi pour $n = -1$: vérification immédiate, à condition de convenir que d_r s'annule sur $E_r^{p,+1} = H_{-1}(p, p+1)$.

4. <u>Quelques explicitations.</u>

Ayant ainsi exposé la théorie générale de la suite spectrale attachée à des données du type (i), (ii), (iii), nous allons maintenant expliciter les choses dans le cas qui nous intéresse. On a vu que

$$E_1^{p,-n} = H_n(p, p+1) = H^{p-n}(X ; \pi_p(G)) \quad ,$$

en convenant que c'est 0 si $p < n$, et que c'est $\mathrm{Hom}(X, \pi_o(G))$ si $n = 0$, $p = 0$. Tous ces groupes sont abéliens, excepté peut-être pour $(n, p) = (0, 0)$. Par suite, pour $(n, p) \neq (0, 0)$, tous les groupes $E_r^{p,-n}$ (dont chacun est un quotient d'un sous-groupe de $E_1^{p,-n}$) sont abéliens. On vérifie facilement que, pour tout r, $E_r^{o,o} = \mathrm{Hom}(X, \pi_o(G))$.

On va expliciter l'opérateur différentiel d_1 du terme E_1.

THÉORÈME. - Soit

$$\xi^{p+2} \in H^{p+2}(K(\pi_p(G), p) ; \pi_{p+1}(G))$$

l'invariant de Postnikov du fibré

$$G_{p+1}/G_{p+2} \to G_p/G_{p+2} \to G_p/G_{p+1} .$$

Alors, pour $p \geq n \geq 0$, l'application

$$d_1 : H^{p-n}(X, \pi_p(G)) \to H^{p-n+2}(X ; \pi_{p+1}(G))$$

du terme E_1 de la suite spectrale est l'opération cohomologique (de degré 2) définie par l'élément de

$$H^{p-n+2}(K(\pi_p(G), p - n) ; \pi_{p+1}(G))$$

que l'on déduit par suspension itérée n fois de l'élément ξ^{p+2}.

(Remarque : l'application d_1 est nulle si $p = n$, même pour $p = n = 0$; si $p > 0$, l'invariant de Postnikov ξ^{p+2} est dans l'image de la suspension (cf. n° 1), et par suite d_1 est un homomorphisme de groupes abéliens, même pour $n = 0$.)

Démonstration. - Etudions d'abord le cas où $n = 0$. D'après le n° 1, l'application d_1 n'est autre que l'homomorphisme (3) (relatif au cas où $q = p + 1$) qu'on rajoute à droite de la suite exacte (A). Cet homomorphisme

$$(3) \qquad \pi_o \mathrm{Hom}(X, G_p/G_{p+1}) \to \pi_o \mathrm{Hom}(X, K(\pi_{p+1}(G), p + 2))$$

est défini par l'application

$$f : G_p/G_{p+1} \to K(\pi_{p+1}(G) , p + 2)$$

qui définit le fibré

$$G_{p+1}/G_{p+2} \to G_p/G_{p+2} \to G_p/G_{p+1} \qquad ;$$

la classe de f est l'élément de $H^{p+2}(G_p/G_{p+1} ; \pi_{p+1}(G))$, invariant de Postnikov de ce fibré (par définition de l'invariant de Postnikov). Compte tenu du fait que G_p/G_{p+1} est un espace $K(\pi_p(G) , p)$, la classe de f est définie par l'élément ξ^{p+2} de l'énoncé. Alors l'application (3) associe, à chaque classe d'applications $g : X \to G_p/G_{p+1}$, la classe de l'application composée $f \circ g$; or une classe d'applications $X \to G_p/G_{p+1}$ est définie par un élément de $H^p(X ; \pi_p(G))$; et (3) est donc l'application

$$H^p(X ; \pi_p(G)) \to H^{p+2}(X ; \pi_{p+2}(G)) \qquad ,$$

opération cohomologique définie par l'élément ξ^{p+2} (ceci, en vertu même de la définition d'une telle opération cohomologique).

Le théorème est donc prouvé dans le cas où $n = 0$. Le cas où $n > 0$ s'y ramène en remplaçant le groupe G par l'espace des lacets $\Omega^n G$; on doit alors tout suspendre n fois. D'où le théorème dans le cas général.

En fait, nous nous intéressons surtout au calcul des $E_r^{p,-n}$ lorsque $n = 0$. Pour passer de $E_r^{p,o}$ à $E_{r+1}^{p,o}$, on prend d'abord le noyau de $d_r : E_r^{p,o} \to E_r^{p+r,1}$, où $E_r^{p+r,1}$ est un quotient de $E_1^{p+r,1} = H^{p+r+1}(X ; \pi_{p+r}(G))$. Alors $E_{r+1}^{p,o}$ est isomorphe au quotient de ce noyau par l'image de l'homomorphisme

$$d_r : E_r^{p-r,-1} \to E_r^{p,o} \qquad ,$$

lequel provient d'un homomorphisme

$$Z_r^{p-r,-1} \to E_r^{p,o} \qquad .$$

Le noyau de ce dernier est précisément $Z_{r+1}^{p-r,-1}$. On voit que, <u>pour calculer les termes</u> $E_r^{p,o}$, tout se passe comme si l'on avait une suite spectrale que nous noterons ${}'E_r^{p,-n}$, où

$$\begin{cases} {}'E_r^{p,-n} = 0 \quad \text{si } n \text{ est distinct de } -1 \text{ , } 0 \text{ ou } +1 \text{ ,} \\ {}'E_r^{p,-1} = Z_r^{p,-1} \text{ , sous-groupe de } H^{p-1}(X \ ; \ \pi_p(G)) \text{ ,} \\ {}'E_r^{p,o} = E_r^{p,o} \text{ , quotient d'un sous-groupe de } H^p(X \ ; \ \pi_p(G)) \text{ ,} \\ {}'E_r^{p,1} = E_r^{p,1} \text{ , quotient de } H^{p+1}(X \ ; \ \pi_p(G)) \text{ .} \end{cases}$$

Pour $r = 1$, on a

$$'E_1^{p,-1} = H^{p-1}(X \ ; \ \pi_p(G)) \quad ,$$

$$'E_1^{p,o} = H^p(X \ ; \ \pi_p(G)) \quad ,$$

$$'E_1^{p,1} = H^{p+1}(X \ ; \ \pi_p(G)) \quad ,$$

et le terme $'E_2^{p,o}$ est le groupe d'homologie de la suite

$$H^{p-2}(X \ ; \ \pi_{p-1}(G)) \xrightarrow{d_1} H^p(X \ ; \ \pi_p(G)) \xrightarrow{d_1} H^{p+2}(X \ ; \ \pi_{p+1}(G)) \quad ,$$

les homomorphismes d_1 étant définis par les invariants de Postnikov du groupe G.

5. Convergence de la suite spectrale.

Comme pour toute suite spectrale, il y a deux problèmes de "convergence" :

1° Dans la filtration décroissante de $\pi_o \operatorname{Hom}(X , G)$, l'intersection des $F^p \pi_o \operatorname{Hom}(X , G)$ est-elle réduite à 0 ?

2° Le terme $E_\infty^{p,o}$ est-il la "limite", lorsque r fini tend vers $+\infty$, du terme $E_r^{p,o}$? D'une façon plus précise, dans le cas présent, il est évident, d'après les définitions du n° 3, que

$$B_\infty^{p,o} = B_r^{p,o} \quad \text{dès que} \quad r \geqslant p + 1 \quad ,$$

et que par suite $E_{r+1}^{p,o}$ est un sous-groupe de $E_r^{p,o}$ pour r grand (en fait, pour $r \geqslant p + 1$) ; la question est alors : $E_\infty^{p,o}$ est-il l'intersection des $E_r^{p,o}$ quand

r (suffisamment grand) tend vers $+\infty$? (Dans tous les cas, $E_\infty^{p,o}$ est <u>contenu</u> dans cette intersection.)

Si la réponse aux deux questions précédentes est affirmative, on dit que la suite spectrale est <u>convergente</u> (au moins dans le degré $n = 0$, le seul qui nous intéresse).

Analysons la question 1° : on considère une application $f : X \to G$, et on suppose que, pour tout p, l'application composée

$$X \xrightarrow{f} G \longrightarrow G/G_p$$

est homotope à l'application neutre (constante) ; il s'agit de savoir si cela implique que l'application f elle-même est homotope à l'application neutre.

Analysons la question 2° : il s'agit de savoir si l'intersection (quand r varie) des images des applications

$$\pi_o \operatorname{Hom}(X , G_p/G_{p+r}) \to \pi_o \operatorname{Hom}(X , G_p/G_{p+1})$$

se réduit à l'image de

$$\pi_o \operatorname{Hom}(X , G_p) \to \pi_o \operatorname{Hom}(X , G_p/G_{p+1}) .$$

En d'autres termes, si une application $g : X \to G_p/G_{p+1}$ peut, pour tout r, se relever en une application $X \to G_p/G_{p+r}$, peut-elle se relever en une application $X \to G_p$? On peut encore transformer cette question : considérons le fibré

$$G_{p+1} \to G_p \to G_p/G_{p+1} \qquad ;$$

il est induit par une application

$$\varphi : G_p/G_{p+1} \to \overline{W}(G_{p+1}) \qquad ;$$

soit $h : X \to \overline{W}(G_{p+1})$ l'application composée $\varphi \circ g$. On suppose que, pour tout r, l'application composée

$$X \xrightarrow{h} \overline{W}(G_{p+1}) \longrightarrow \overline{W}(G_{p+1}/G_{p+r})$$

est homotope à une application constante ; et il s'agit de savoir si on peut en conclure que h est elle-même homotope à une application constante. Si on pose $\overline{W}(G_{p+1}) = Y$, $\overline{W}(G_{p+1}/G_{p+r})$ n'est autre que le système de Postnikov $Y^{(p+r+1)}$, quotient de Y (on identifie deux simplexes qui ont même squelette de dimension $p + r$).

Finalement, on voit que les questions 1° et 2° se résolvent affirmativement chaque fois que X jouit de la propriété suivante :

(C) <u>étant donnée une application simpliciale</u> $f : X \to Y$ (où Y est un ensemble simplicial quelconque, muni d'un point-base), <u>si l'application composée</u> $X \xrightarrow{f} Y \to Y^{(r+1)}$ est, pour r grand, homotope à l'application constante (à valeur au point-base), il s'ensuit que f est homotope à l'application constante.

On peut formuler la propriété (C) d'une manière équivalente. Notons $X_{[r]}$ le squelette de dimension $r - 1$ de X , c'est-à-dire le sous-ensemble simplicial de X engendré par les simplexes de dimension $\leq r - 1$. Il est évident qu'on a une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_o(X_{[r]} , Y) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_o(X , Y^{(r)}) ,$$

quels que soient les ensembles simpliciaux X et Y (on note Hom_o l'ensemble des applications simpliciales). En d'autres termes, les foncteurs $X \rightsquigarrow X_{[r]}$ et $Y \rightsquigarrow Y^{(r)}$ sont "adjoints" au sens de KAN. La propriété (C), pour X , se formule alors :

(C') pour tout ensemble simplicial Y muni d'un point-base, si une application simpliciale $f : X \to Y$ jouit de la propriété que la composée $X_{[r]} \to X \xrightarrow{f} Y$ est, pour r grand, homotope à l'application constante, alors f est homotope à l'application constante.

Il est vraisemblable que la propriété (C') n'est pas vraie en général, quoique le conférencier ne sache pas donner de contre-exemple. Mais si X est de dimension finie (i. e. si $X = X_{[r]}$ pour r grand), la propriété est évidemment vraie. Ainsi :

<u>Si</u> X <u>est de dimension finie, la suite spectrale de Shih est convergente.</u>

6. Première application : suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch [1].

Soit U le groupe, limite inductive des groupes unitaires $U(n)$; le classifiant BU est limite inductive des classifiants $BU(n)$. Le groupe de Grothendieck $K(X)$ des fibrés vectoriels complexes de base X s'identifie au groupe $\pi_0 \operatorname{Hom}(X, BU \times \underset{\sim}{Z})$ des classes d'applications de X dans $BU \times \underset{\sim}{Z}$ (cf. [1]). La structure de groupe de $\pi_0 \operatorname{Hom}(X, BU \times \underset{\sim}{Z})$ provient de la loi de composition de l'espace de Hopf BU et de l'addition du groupe des entiers $\underset{\sim}{Z}$. Or, d'après le théorème de périodicité de Bott (voir notamment [6]), $BU \times \underset{\sim}{Z}$ a même type d'homotopie faible (comme espace de Hopf) que l'espace des lacets ΩU ; ce dernier possède une structure de groupe (provenant de la structure de groupe de U). Ainsi

$$K(X) = \pi_0 \operatorname{Hom}(X, \Omega U) \qquad ,$$

$$\text{avec} \begin{cases} \pi_i(\Omega U) = \underset{\sim}{Z} \quad \text{si } i \text{ est pair} & , \\ \pi_i(\Omega U) = 0 \quad \text{si } i \text{ est impair} & . \end{cases}$$

Dans la suite spectrale de Shih, on a donc

$$\begin{cases} E_1^{p,-n} = H^{p-n}(X ; \underset{\sim}{Z}) \quad \text{si } p \text{ est pair} & , \\ E_1^{p,-n} = 0 \quad \text{si } p \text{ est impair} & . \end{cases}$$

Il en résulte que les différentielles d_r sont nulles pour r impair. Donc $E_2^{p,-n} = E_1^{p,-n}$; et, par exemple, $E_3^{p,o} = E_4^{p,o}$ est, pour $p = 2k$, l'homologie de la suite

$$H^{2k-3}(X ; \underset{\sim}{Z}) \to H^{2k}(X ; \underset{\sim}{Z}) \to H^{2k+3}(X ; \underset{\sim}{Z})$$

où les homomorphismes sont des opérations cohomologiques de degré 3. On peut montrer que c'est l'opération Sq^3 de Steenrod.

Cette suite spectrale n'est pas tout à fait la même que celle d'Atiyah-Hirzebruch (dans cette dernière, les d_r sont nulles pour p pair) ; toutefois, il est très facile de voir que les deux filtrations de $\pi_0 \operatorname{Hom}(X, \Omega U)$ sont les mêmes. Les éléments de filtration p de $\pi_n \operatorname{Hom}(X, \Omega U)$ sont, chez Atiyah-Hirzebruch, de filtration $p - n$. Compte tenu de ce décalage, il semble probable que le terme

E_r de Shih s'identifie au terme E_{r+1} d'Λ-H, la différentielle d_r devenant d_{r+1} .

On peut procéder pour le groupe orthogonal comme pour le groupe unitaire : le groupe de Grothendieck des fibrés vectoriels réels est cette fois

$$\pi_o \operatorname{Hom}(X , BO \times \underset{\sim}{Z}) = \pi_o \operatorname{Hom}(X , \Omega^7(0)) \qquad ,$$

compte tenu de la périodicité de Bott. Les groupes d'homotopie $\pi_p(BO \times \underset{\sim}{Z})$ sont égaux respectivement à

$$\underset{\sim}{Z} , \underset{\sim}{Z}_2 , \underset{\sim}{Z}_2 , 0 , \underset{\sim}{Z} , 0 , 0 , 0$$

suivant que p est congru, mod 8 , à 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 . On en déduit notamment $E_r^{p,-n} = 0$ si p est congru, mod 8 , à l'un des entiers 3 , 5 , 6 , 7 . Et l'on a, par exemple :

$$E_2^{8k,o} = \operatorname{Ker} H^{8k}(X ; \underset{\sim}{Z}) \xrightarrow{Sq^2} H^{8k+2}(X ; \underset{\sim}{Z}_2)$$

$$E_2^{8k+1,o} = \text{homologie de } H^{8k-1}(X ; \underset{\sim}{Z}) \xrightarrow{Sq^2} H^{8k+1}(X ; \underset{\sim}{Z}_2) \xrightarrow{Sq^2} H^{8k+3}(X ; \underset{\sim}{Z}_2)$$

$$E_2^{8k+2,o} = \operatorname{Coker} H^{8k}(X ; \underset{\sim}{Z}_2) \xrightarrow{Sq^2} H^{8k+2}(X ; \underset{\sim}{Z}_2)$$

$$E_2^{8k+4,o} = H^{8k+4}(X ; \underset{\sim}{Z}) \qquad .$$

7. Deuxième application : groupes de cohomotopie.

Rappelons (cf. par ex. [3]) que tout espace Y tel que

$$\pi_i(Y) = 0 \quad \text{pour} \quad i \leqslant n - 1 \quad \text{et} \quad i \geqslant 2n - 1$$

a même type d'homotopie qu'un espace de Hopf, et par conséquent a même type d'homotopie qu'un groupe topologique. Appliquons ce résultat à l'espace $Y = (S^n)^{2n-1}$, $(2n - 1)$-ième système de Postnikov de la sphère S^n . Pour tout CW-complexe X de dimension $\leqslant 2n - 2$, l'ensemble $[X , S^n]$ des classes d'applications continues de X dans la sphère S^n s'identifie à l'ensemble $[X , Y]$ des classes d'applications continues de X dans un groupe topologique Y ; il possède donc une structure de groupe : c'est, par définition, le groupe de cohomotopie $\pi^n(X)$.

La suite spectrale de Shih s'applique : $[X , S^n] = \pi_o \operatorname{Hom}(X , Y)$ est filtré, et le gradué associé est le terme $E_\infty^{p,o}$ d'une suite spectrale dont le terme E_1 est

$$'E_1^{p,-1} = H^{p-1}(X ; \pi_p(S^n))$$

$$'E_1^{p,o} = H^p(X ; \pi_p(S^n))$$

$$'E_1^{p,1} = H^{p+1}(X ; \pi_p(S^n)) \quad .$$

La convergence est assurée, sans nouvelle hypothèse sur X.

Le terme $'E_2^{p,o}$ est l'homologie de la suite

$$H^{p-2}(X ; \pi_{p-1}(S^n)) \xrightarrow{d_1} H^p(X ; \pi_p(S^n)) \xrightarrow{d_1} H^{p+2}(X ; \pi_{p+1}(S^n)) \quad ,$$

les homomorphismes d_1 étant les opérations cohomologiques définies par les invariants de Postnikov de la sphère S^n. En particulier, pour $p = n + 1$, l'homomorphisme

$$d_1 : H^{n-1}(X ; \pi_n(S^n)) \to H^{n+1}(X ; \pi_{n+1}(S^n))$$

n'est autre que l'opération de Steenrod

$$Sq^2 : H^{n-1}(X ; \underset{\sim}{Z}) \to H^{n+1}(X ; \underset{\sim}{Z}_2) \quad .$$

COROLLAIRE. - Si X est un CW-complexe de dimension $n + 1$, on a une suite exacte

$$H^{n-1}(X ; \underset{\sim}{Z}) \xrightarrow{Sq^2} H^{n+1}(X ; \underset{\sim}{Z}_2) \xrightarrow{q} \pi^n(X) \xrightarrow{p} H^n(X ; \underset{\sim}{Z}) \longrightarrow 0 \quad ,$$

où l'homomorphisme p associe à chaque classe d'applications $f : X \to S^n$ l'image de la classe fondamentale de S^n par l'homomorphisme $f^* : H^n(S^n;\underset{\sim}{Z}) \to H^n(X;\underset{\sim}{Z})$. L'homomorphisme q est le composé

$$H^{n+1}(X ; \underset{\sim}{Z}_2) = [X , K(\underset{\sim}{Z}_2 , n + 1)] \to [X , (S^n)^{(n+2)}] = [X , S^n] = \pi^n(X) ,$$

où la flèche du milieu est induite par l'injection de la fibre $K(Z_2 , n + 1)$ du fibré $(S^n)^{(n+2)} \to (S^n)^{(n+1)}$.

8. Remarque finale.

Soit SX la suspension de X. On a

$$\pi_0 \operatorname{Hom}(SX , \overline{W}(G)) = \pi_1 \operatorname{Hom}(X , \overline{W}(G)) = \pi_0 \operatorname{Hom}(X , G)$$

comme le montre la suite exacte d'homotopie du fibré principal $W(G) \to \overline{W}(G)$, de groupe G. Autrement dit, le groupe $\pi_0 \operatorname{Hom}(X , G) = [X , G]$ qu'on a étudié au moyen de la suite spectrale de Shih n'est autre que le groupe des classes de fibrés principaux de groupe G et de base SX (suspension de X).

La classification des fibrés principaux de groupe G et de base X est un problème beaucoup plus difficile, qu'on n'abordera pas ici.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATIYAH (M. F.) and HIRZEBRUCH (F.). - Vector bundles and homogeneous spaces, Differential geometry ; p. 7-37. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Proceedings of Symposia in pure Mathematics, 8).

[2] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[3] MEYER (Jean-Pierre). - Whitehead products and Postnikov systems, Amer. J. of Math., t. 82, 1960, p. 271-279.

[4] MOORE (J. C.). - Semi-simplicial complexes and Postnikov systems, Symposium internacional de Topologia algebraica [1958. Mexico] ; p. 232-247. - Mexico, Universidad nacional autonoma, 1958.

[5] Séminaire H. CARTAN, t. 9, 1956/57 : Quelques questions de topologie. - Paris, Secrétariat mathématique, 1958.

[6] Séminaire H. CARTAN, t. 12, 1959/60 : Périodicité des groupes d'homotopie stables des groupes classiques, d'après Bott. - Paris, Secrétariat mathématique, 1961.

[7] SHIH Weishu. - Homologie des espaces fibrés (Thèse Sc. math. Paris. 1962). - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes scientifiques, Publications mathématiques, 13).