Claude Morlet

Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement de Whitney. II. Quelques ouverts fondamentaux des espaces d'applications

Séminaire Henri Cartan, tome 14 (1961-1962), exp. n° 5, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1961-1962__14__A5_0>

LE LEMME DE THOM ET LES THÉORÈMES DE PLONGEMENT DE WHITNEY

par Claude MORLET

II. Quelques ouverts fondamentaux des espaces d'applications.

Étant données deux variétés de classe C^s, soient V et M, on notera $J^r(V, M)$ $(r \leqslant s)$ l'espace des jets d'ordre r de V dans M ; c'est une variété de classe $s - r$, fibrée sur $V \times M$. Si à chaque fonction f de classe $C^{r'}$ de V dans M $(r \leqslant r' \leqslant s)$ on associe l'ensemble de ses jets d'ordre r, on obtient une application de classe $C^{r'-r}$ de V dans $J^r(V, M)$, qui en fait est une section de $J^r(V, M)$ considéré comme fibré sur V ; cette application sera appelée la r-ième dérivée de V, et sera notée f^r. Remarquons que, pour $r = 0$, $J^0(V, M)$ s'identifie à $V \times M$, et que l'application f^0 n'est autre que l'application dont l'image est le graphe de f.

THÉORÈME 1. - Soient V et M deux variétés de classe C^s $(\infty \geqslant s \geqslant r \geqslant 0)$, F un ensemble fermé de $J^r(V, M)$; alors l'ensemble des applications f de V dans M, telles que $f^r(V)$ ne rencontre pas F, est un ouvert de $\mathrm{Hom}^s(V, M)$ pour la topologie $\mathcal{C}^s$.

Démontrons d'abord un lemme.

LEMME 1. - L'application $f \to f^r$ est une application continue de $\mathrm{Hom}^{r'}(V, M)$ dans $\mathrm{Hom}^{r'-r}(V, J^r(V, M))$ quand on munit ces espaces des topologies $\mathcal{C}^{r'}$ et $\mathcal{C}^{r'-r}$ (resp. $C^{r'}$ et $C^{r'-r}$; resp. $K - C^{r'}$ et $K - C^{r'-r}$ pour tout compact K de V).

Il suffit bien entendu de le voir dans le cas des topologies $K - C^{r'}$ et $K - C^{r'-r}$. Il suffit alors de remarquer que localement les dérivées partielles de f^r sont prises parmi les dérivées partielles de f.

A cause du lemme a (exposé 4), il reste alors à prouver le lemme suivant pour avoir le théorème annoncé :

LEMME 2. - Soient V et M deux variétés, F un fermé de M ; l'ensemble des applications de V dans M dont l'image ne rencontre pas F est un ouvert de $\mathrm{Hom}^0(V, M)$ pour la topologie $\mathcal{C}^0$.

Par définition même de la topologie C^o, ce lemme résultera du lemme suivant :

LEMME 3. - Soient V et M deux variétés, F un fermé de M, K un compact de V ; l'ensemble des applications continues de V dans M telles que $f(K) \cap F$ soit vide est ouvert dans $\mathrm{Hom}^o(V, M)$ pour la topologie $K - C^o$.

On peut toujours se placer dans un $\mathrm{Hom}^o(\lambda, V, M)$ et se ramener au cas où K est contenu dans un des ouverts de coordonnées qui ont servi à définir λ. Si l'on note alors d la métrique de la carte locale qui contient l'image de K, et si f est une fonction qui répond à la question, on a $d(f(K), F) = a > 0$ (peut-être même a infini) ; donc si g est suffisamment voisine de f au sens $K - C^o$ pour que l'on ait $d(f(x), g(x)) \leq a/2$ pour tout x de K, g répond aussi à la question.

COROLLAIRE 1. - Soient V et M deux variétés de classe C^s $(1 \leq s \leq \infty)$. L'ensemble des applications de classe C^s de V dans M, qui sont de rang supérieur ou égal à p en tout point, est un ouvert de $\mathrm{Hom}^s(V, M)$ pour la topologie C^s. En particulier (si $\dim M \geq \dim V$) l'ensemble des immersions locales de V dans M est ouvert pour la topologie C^s.

Il suffit d'appliquer le théorème avec $r = 1$, F étant le sous-ensemble de $J^1(V, M)$ formé des jets de rang inférieur à p ; ce sous-espace est fermé puisque localement, au-dessus de $V \times M$, il s'écrit comme l'ensemble des zéros d'un certain nombre de déterminants extraits de la matrice jacobienne dont les coefficients sont continus.

THÉORÈME 2. - Soient M et V deux variétés de classe C^s, et F un fermé de $J^r(V, M) \times J^r(V, M)$ $(0 \leq r \leq s \leq \infty)$; alors à toute application de classe C^s de V dans M on associe $f^r \times f^r : V \times V \to J^r(V, M) \times J^r(V, M)$. Soit U un voisinage ouvert de la diagonale dans $V \times V$. Alors l'ensemble des applications propres de classe C^s de V dans M telles que

$$(f^r \times f^r)(\complement U) \cap F = \emptyset$$

est ouvert dans $\mathrm{Hom}^s(V, M)$ pour la topologie C^s.

<u>Remarque</u>. - On pourrait énoncer un résultat analogue avec plus de deux facteurs.

Comme pour le théorème 1 (et à cause des lemmes 1 et a (exposé 4)), il suffit de démontrer le lemme suivant :

LEMME 4. — Soient V et M deux variétés, F un fermé de $M \times M$, U un voisinage ouvert de la diagonale dans $V \times V$; l'ensemble des applications continues f de V dans M, propres, et telles que $(f \times f)(\complement U) \cap F = \emptyset$, est ouvert dans $\mathrm{Hom}^0(V, M)$ pour la topologie C^0.

Considérons l'application de $\mathrm{Hom}^0(V, M)$ dans $\mathrm{Hom}^0(V \times V - U, M \times M)$ définie par :

$$f \xrightarrow{\Phi} ((x, y) \to (f(x), f(y))) \quad .$$

Il suffit de montrer qu'elle est continue pour les topologies C^0 sur le sous-espace des applications propres, et d'appliquer le lemme 2.

Or on voit tout de suite qu'elle est continue si l'on met sur le second espace une topologie $(K \times K') - C^0$ et sur le premier la topologie $(K \cup K') - C^r$ correspondante (K et K' étant des compacts disjoints de V). Soit donc une famille localement finie (K_i) de compacts de V tels que les $K_i \times K_j$ (tels que $K_i \cap K_j$ soit vide) recouvrent $V \times V - U$. Soit une fonction f ; pour que g soit telle que $\Phi(g)$ soit dans un voisinage donné de $\Phi(f)$ au sens C^0, il suffit que pour tout couple (i, j) tel que $K_i \cap K_j$ soit vide, $\Phi(g)$ soit dans un certain $(K_i \times K_j) - C^0$ voisinage de $\Phi(f)$; c'est-à-dire, d'après ce qui précède, que pour chacun de ces couples (i, j), g soit dans un voisinage V_{ij} de g (au sens de la topologie $(K_i \cup K_j) - C^0$). Malheureusement l'intersection des V_{ij} n'est pas en général un voisinage de f au sens C^0, car les $K_i \cup K_j$ considérés ne forment pas une famille localement finie. Toutefois si f est propre, on peut choisir $\mathrm{Hom}^0(\lambda, V, M)$ qui contienne f, et alors, pour tout i, il n'existe qu'un nombre fini de j tels que $g(K_i) \cap g(K_j)$ puisse être non vide si g appartient à $\mathrm{Hom}^0(\lambda, V, M)$, et il suffit bien sûr de se restreindre aux couples (i, j) correspondants ; alors les $K_i \cup K_j$ forment une famille localement finie.

COROLLAIRE 2. — Soient V et M deux variétés de classe C^s $(s \geq 1)$. L'ensemble des plongements (applications propres injectives et qui sont des immersions locales) de V dans M est un <u>ouvert</u> de $\mathrm{Hom}^s(V, M)$ pour la topologie C^s. (Cet ouvert peut évidemment être vide.)

En effet, soit f un plongement ; on se place dans un $\mathrm{Hom}^s(\lambda, V, M)$ qui contient f. Si g est dans cet $\mathrm{Hom}^s(\lambda, V, M)$ c'est une application propre, et on sait que si g est suffisamment voisine de f, g est une immersion locale (corollaire 1).

Soit (V_i) le système de cartes locales choisi sur V ; donnons-nous pour chaque i un nombre positif a_i. Les g qui vérifient, pour tout i,

$$\|df_x - dg_x\| \leq a_i \quad \text{pour tout } x \text{ de } V_i$$

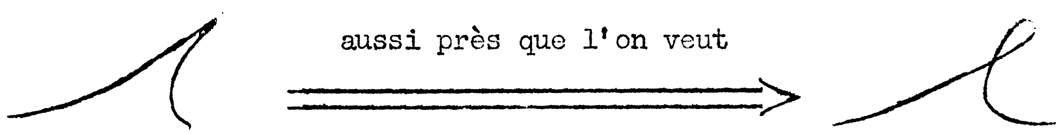
forment un voisinage de f. Mais si les a_i ont été choisis suffisamment petits ceci entraîne des inégalités de la forme

$$\|g(x) - g(y)\| \geq b_i\|x - y\|$$

pourvu que x et y soient assez voisins dans V_i. Et comme ceci est vrai pour tout i, on a donc un voisinage U de la diagonale dans $V \times V$ tel que $g(x) = g(y)$ entraîne $(x , y) \notin U$ (pourvu que g soit suffisamment voisine de f). On applique alors le théorème 2 avec $r = 1$, F étant la diagonale de $J^1(V , M) \times J^1(V , M)$.

Remarque. - Il n'y a aucun espoir d'obtenir un tel résultat sans imposer aux fonctions d'être propres : il suffit de regarder une géodésique non fermée du tore : c'est une application injective et une immersion locale de la droite dans le tore, et pourtant aussi près que l'on se place de cette application on trouvera des applications non injectives.

Il n'y a pas non plus de résultat semblable si l'on enlève la condition d'être une immersion locale (en particulier si l'on travaille au sens C^0) : il suffit de remarquer qu'aussi près que l'on veut d'une courbe à point de rebroussement (application injective de la droite) on trouvera des courbes à point double :



COROLLAIRE 3. - Soit V une variété sans bord, connexe, de classe C^s $(s \geq 1)$. L'ensemble des automorphismes différentiables de classe C^s de V sur elle-même est un ouvert de $\mathrm{Hom}^s(V , V)$ pour la topologie C^s.

Il suffit de voir que ces automorphismes sont les plongements de V dans elle-même. Il est évident que les automorphismes sont des plongements ; réciproquement un plongement est une immersion locale, donc (les dimensions étant égales) sont image est un ouvert de V ; mais c'est aussi un fermé, car un plongement est une application propre, d'où le résultat par raison de connexité.

<u>Définition</u>. - Étant données trois variétés V, W, M de classe C^s $(s \geqslant 1)$, on dira que les applications f de V dans M et g de W dans M (f et g de classe C^s) sont <u>transversales</u> si, chaque fois que l'on a un point x de V et un point y de W tels que $f(x) = g(y) (= z)$, on a la relation

$$f(T_V^x) + g(T_W^y) = T_M^z \quad . \tag{1}$$

Si $\dim V + \dim W < \dim M$, la relation (1) ne peut pas être vérifiée, donc " f et g transversales" équivaut alors à " $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \emptyset$ ". Dans ce cas on peut donc étendre la définition aux fonctions de classe C^0 ; c'est ce que l'on fera.

Si V et M sont deux variétés et N une sous-variété de M, on dira que l'application f de V dans M est <u>transversale sur</u> N si f et l'injection de N dans M sont transversales.

THÉORÈME 3. - Soient V et M deux variétés de classe C^s, N une sous-variété de classe C^{s-r} de $J^r(V , M)$ (avec $s > r$ si $\dim V \geqslant \operatorname{codim} N$, et $s \geqslant r$ si $\dim V < \operatorname{codim} N$). Alors l'ensemble des applications de classe C^s de V dans M, telles que f^r soit transversale sur N, est <u>ouvert</u> dans $\mathrm{Hom}^s(V , M)$ pour la topologie $\mathcal{C}^s$.

Seul le cas où $\dim V \geqslant \operatorname{codim} N$ est à démontrer, l'autre rentre dans le cadre du théorème 1. Dans ce cas, f^r est supposé de classe C^1 au moins ; considérons alors $(f^r)^1$, c'est une application continue de V dans $J^1(V , J^r(V , M))$; la condition " f^r transversale sur N " équivaut alors à dire que $(f^r)^1(V)$ ne rencontre pas un certain fermé F défini de la façon suivante : F est l'ensemble des points de $J^1(V , J^r(V , M))$ qui se projettent sur N, et tels que les dérivées partielles du jet en ce point, jointes à une base de l'espace tangent à N en ce point, forment une matrice qui n'est pas de rang maximum (c'est bien un fermé, car localement au-dessus de N c'est l'ensemble des zéros d'un certain nombre de déterminants dont les coefficients sont des fonctions continues de N). On applique alors le théorème 1 et le lemme 1.

THÉORÈME 4. - Soient V et M deux variétés de classe C^s, N une sous-variété de classe C^{s-r} de $J^r(V, M) \times J^r(V, M)$ (avec $r > s$ si $\dim V \geq \operatorname{codim} N$, et $r \geq s$ si $\dim V < \operatorname{codim} N$). Alors si U est un voisinage ouvert de la diagonale dans $V \times V$, l'ensemble des applications propres f de classe C^s de V dans M telles que $f^r \times f^r$, restreinte au complémentaire de U, soit une application transversale sur N, est <u>ouvert</u> dans $\mathrm{Hom}^s(V, M)$ pour la topologie C^s.

On se ramène au théorème 2 de la même façon que pour le théorème 3 on s'est ramené au théorème 1.

<u>Remarque</u>. - Dans les applications, N sera en général l'ensemble des jets de rang au moins égal à un certain entier p, donc ce ne sera pas une "vraie" sous-variété. Ce sera un fermé qui se décompose en sous-variétés localement fermées N_i de dimensions croissantes et qui vérifiera la condition suivante : une seule de ces sous-variétés est de codimension inférieure ou égale à la dimension de V. Alors f sera transversale sur un tel fermé si son image ne rencontre pas les composantes N_i de codimension strictement supérieure à la dimension de V ; et si, considérée alors comme une application de V dans la variété d'arrivée moins ces composantes, elle est transversale sur le dernier N_i (qui est une sous-variété fermée de ce qui reste).

Il est facile de voir, grâce au lemme b, que les théorèmes 3 et 4 sont encore vrais dans le cas où N est une telle "bonne sous-variété stratifiée".