Séminaire Henri Cartan

Alexander Grothendieck

Techniques de construction en géométrie analytique. X. Construction de l'espace de Teichmüller

Séminaire Henri Cartan, tome 13, n° 2 (1960-1961), exp. n° 17, p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1960-1961__13_2_A4_0>

Séminaire Henri CARTAN
13e année, 1960/61, n° 17

8 mai 1961

TECHNIQUES DE CONSTRUCTION EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

par Alexander GROTHENDIECK

X. CONSTRUCTION DE L'ESPACE DE TEICHMÜLLER

INTRODUCTION. - Comme la construction est légèrement différente dans le détail dans le cas du genre $g = 1$ et dans le cas $g \geqslant 2$, nous nous bornerons, pour simplifier, au cas $g \geqslant 2$, en laissant au lecteur le cas $g = 1$. Toutefois on pourra aussi se traiter de façon plus élémentaire directement (sans utiliser le théorème d'existence des espaces modulaires de Hilbert), et en même temps plus généralement, que la construction des espaces de modules pour les tores complexes ou pour les variétés abéliennes polarisées, par une démonstration proprement transcendante consistant à regarder un tore complexe comme le quotient d'un espace vectoriel par un sous-groupe discret de rang maximum, et une "famille de tores complexes" au-dessus d'un espace analytique S comme le quotient d'un fibré vectoriel sur S, associé à un faisceau localement libre de rang g, par un sous-fibré discret de rang maximum.

Il convient cependant de noter que les constructions, indiquées dans ce qui suit, sont de nature essentiellement algébriques, et conduisent en principe à des schémas de modules pour les courbes de genre g, (correspondant par exemple au foncteur rigidifiant de Jacobi d'échelon n, $n \geqslant 3$), qui seront des schémas de type fini sur l'anneau Z des entiers.

La méthode indiquée dans le texte bute cependant, au n° 5, dans le contexte des schémas, sur une difficulté de passage au quotient, qui n'existe pas dans le cas transcendant. Par une méthode voisine, utilisant de façon plus systématique les schémas de Picard et leurs points d'ordre fini, le conférencier a pu construire les schémas modulaires de Jacobi M_n pour des échelons assez élevés, mais faute de savoir si M_n est quasi-projectif, il n'était pas possible de passer au quotient par des groupes finis de façon à obtenir les espaces modulaires d'échelon quelconque, et en particulier l'espace modulaire classique M_1 lui-même. Ces difficultés viennent d'être surmontées par MUMFORD à l'aide d'un nouveau théorème de passage au quotient qui s'applique aux modules des schémas abéliens polarisés, et par là aux courbes. Signalons d'ailleurs que BAILY [1] avait montré déjà auparavant, à l'aide

de la compactification de Baily-Satake de l'espace modulaire de Siegel, que les espaces modulaires de Jacobi M_n sont munis de façon naturelle de structures de variétés algébriques sur $\underset{\sim}{C}$, de telle façon que M_1 soit le normalisé d'un sous-espace algébrique de l'espace modulaire de Siegel ; cela contient implicitement une démonstration, mais par voie transcendante, de l'existence des schémas modulaires M_n sur le corps $\underset{\sim}{Q}$ des rationnels. Bien entendu, ces résultats sont maintenant complètement englobés dans la théorie algébrique. Signalons cependant, pour finir, qu'il resterait à trouver une description algébrico-géométrique directe, en termes de problèmes universels, des compactifications de Baily-Satake des espaces modulaires divers (tant pour les courbes que pour les variétés abéliennes polarisées), description qui devrait s'appliquer également dans le contexte des schémas, et serait le point de départ d'une théorie purement géométrique des fonctions automorphes, telle qu'elle a été développée par IGUSA [4] pour $g = 1$.

1. Rigidification linéaire. L'espace modulaire M_R.

Nous supposons fixé une fois pour toutes l'entier $g \geqslant 2$, et un entier $k \geqslant 2$ tel que, pour toute courbe algébrique X, de genre g au-dessus d'un espace analytique S, $(\underset{\sim}{\Omega}^1_{X/S})^{\otimes k}$ soit un faisceau relativement ample sur X/S ; il suffit par exemple de choisir $k \geqslant 3$ ([3], VIII, 2.2). On pose

$$\mathfrak{L}_{X/S} = (\underset{\sim}{\Omega}^1_{X/S})^{\otimes k} \quad ,$$

et on note que la formation des faisceaux $\mathfrak{L}_{X/S}$ est compatible avec le changement de base $S' \to S$ ([3], VII, 2.1). D'autre part, comme les espaces de cohomologie en dimension 1 pour les faisceaux induits par $\mathfrak{L}_{X/S}$ sur les fibres sont nuls (conséquence immédiate du théorème de Riemann-Roch pour les courbes de genre g), le Module

$$\mathfrak{E}_{X/S} = f_*(\mathfrak{L}_{X/S})$$

sur S est cohérent et localement libre, et sa formation est compatible avec le changement de base $S' \to S$ ([3], VIII, 1.4, (iii)). Son rang r, qui se calcule aisément par la formule de Riemann-Roch à l'aide de g, k, ne dépend plus de X/S.

DÉFINITION 1.1. - Soit X une courbe de genre g au-dessus de l'espace analytique S. On appelle <u>rigidification linéaire</u> de X une suite de sections

$(\omega_1, \ldots, \omega_r)$ de $\mathcal{E}_{X/S}$ formant une base de ce Module localement libre. L'ensemble des rigidifications linéaires de X/S s'identifie (de façon compatible avec le changement de base) à l'ensemble des sections morphiques d'un fibré principal analytique localement trivial sur S, ayant pour groupe structural le groupe linéaire complexe

$$G = \underline{Gl}(r, \underline{C}) \quad ,$$

qu'on désignera par $\mathfrak{R}(X/S)$. On désignera par $\mathfrak{A}_{\mathfrak{R}}(S)$ l'ensemble des classes, à un isomorphisme près, de courbes de genre g au-dessus de S munies d'une rigidification linéaire. Ainsi $\mathfrak{A}_{\mathfrak{R}}$ devient un foncteur contravariant de $(\underline{An})$ dans $(\underline{Ens})$.

Comme on a une immersion canonique

$$X \to \underline{P}(\mathcal{E}_{X/S})$$

compatible avec le changement de base, et fonctorielle en X/S pour S fixé, on voit que tout automorphisme de X qui induit l'identité sur $\mathcal{E}_{X/S}$, en particulier tout automorphisme qui invarie une rigidification linéaire, est l'identité. Ainsi, $\mathfrak{R}(X/S)$ joue, pour X/S variable, le rôle d'un foncteur rigidifiant comme le foncteur rigidifiant de Teichmüller, le groupe discret γ de [3], I, 2.1, étant remplacé ici par le groupe analytique G. Nous allons prouver ici l'analogue du théorème annoncé dans [3], I, 3.1, pour la notion de courbe de Teichmüller :

THÉORÈME 1.2. - Le foncteur contravariant $\mathfrak{A}_{\mathfrak{R}}$ sur la catégorie $(\underline{An})$ introduit dans 1.1. est représentable par un espace analytique $M_{\mathfrak{R}}$, dont tous les anneaux locaux sont réguliers de dimension $3g - 3 + \dim G$.

La démonstration prouvera en même temps que cet espace analytique provient d'un schéma quasi-projectif sur $\underline{C}$ (et même sur $\underline{Z}$), et, a fortiori, est séparé.

Notons d'abord :

LEMME 1.3. - La donnée d'une courbe de genre g munie d'une rigidification linéaire au-dessus de l'espace analytique S est équivalente à la donnée d'un sous-espace analytique fermé X de $P = \underline{P}_S^{r-1} = \underline{P}^{r-1} \times S$, qui soit une courbe de genre g au dessus de S, et d'un isomorphisme de $i^*(\mathcal{O}_P(1))$ sur $\mathcal{E}_{X/S}$ induisant un isomorphisme $\mathcal{O}_S^r = g_*(\mathcal{O}_P(1)) \to \mathcal{E}_{X/S} = f_*(\mathcal{E}_{X/S})$ (où f et g sont les morphismes

structuraux de X et P, et i l'immersion canonique de X dans P).

En effet, si X est une courbe de genre g au-dessus de S, munie d'une rigidification linéaire, i.e. d'un isomorphisme

$$\mathcal{E}_{X/S} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S^r \quad ,$$

on en conclut un isomorphisme

$$\underset{\sim}{P}(\mathcal{E}_{X/S}) \xrightarrow{\sim} \underset{\sim}{P}(\mathcal{O}_S^r) = \underset{\sim}{P}_S^{r-1} = P \quad ,$$

d'où à l'aide de l'immersion canonique $X \to \underset{\sim}{P}(\mathcal{E}_{X/S})$, une immersion

$$X \to P \quad ,$$

d'où un sous-espace analytique fermé de P qui est une courbe de genre g au-dessus de S. D'autre part, par définition même de $X \to \underset{\sim}{P}(\mathcal{E}_{X/S})$, on a un isomorphisme naturel du faisceau $\mathcal{E}_{X/S}$ avec le faisceau image inverse sur X du faisceau $\mathcal{O}_{\underset{\sim}{P}(\mathcal{E}_{X/S})}(1)$, et l'homomorphisme

$$\mathcal{E}_{X/S} \to f_*(\mathcal{L}_{X/S})$$

qui s'en déduit n'est autre que l'isomorphisme identique. Tenant compte de l'isomorphisme donné $\mathcal{E}_{X/S} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S^r$, on en conclut des données comme explicitées dans 1.3, qui permettent de récupérer la X rigidifiée de départ de façon évidente. D'ailleurs, partant d'une situation comme décrite dans 1.3, on constate trivialement qu'elle provient d'une courbe de genre g à rigidification linéaire au-dessus de S, savoir X elle-même, munie de l'isomorphisme $\mathcal{O}_S^r \to \mathcal{E}_{X/S}$ envisagé dans 1.3.

La correspondance établie dans 1.3 est évidemment compatible avec la formation d'images inverses, et permet donc de donner une interprétation plus maniable du foncteur $\mathfrak{N}_R$ qu'il s'agit de représenter. Or, soit $\mathfrak{B}$ le foncteur contravariant de $(\underline{An})$ dans $(\underline{Ens})$, tel que $\mathfrak{B}(S)$ soit l'ensemble des sous-espaces analytiques fermés de $\underset{\sim}{P}_S^r$ qui sont des courbes de genre g au-dessus de X. Nous avons vu ([3], IX, 1.3) que c'est là un foncteur représentable. D'autre part nous avons un homomorphisme fonctoriel

$$\mathfrak{A}_R \to \mathfrak{B} \quad ,$$

de sorte qu'il suffit de prouver que $\mathfrak{A}_R$ est représentable relativement à $\mathfrak{B}$ ([3], IV, 3.3). Nous sommes donc ramenés à prouver ceci :

LEMME 1.4. - Soient S un espace analytique, X un sous-espace analytique fermé de $\underset{\sim}{P}^r_S$ qui soit une courbe de genre g au-dessus de S. Pour tout espace analytique T sur S, soit $F(T)$ l'ensemble des isomorphismes de l'image inverse $\mathcal{L}_{X_T/T}$ de $\mathcal{L}_{X/S}$ par l'image inverse $i_T^*(\mathcal{O}_{\underset{\sim}{P}^r_T}(1))$ de $i^*(\mathcal{O}_{\underset{\sim}{P}^r_S}(1))$, (où $i : X \to \underset{\sim}{P}^r_S$ est l'immersion canonique), tels que l'homomorphisme correspondant $\mathcal{O}_T^r \to \mathcal{E}_{X_T/T}$ soit un isomorphisme. Ce foncteur est représentable.

Si dans la définition de $F(T)$ on laisse tomber la condition "tels que l'homomorphisme correspondant ...", on obtient un ensemble $G(T)$ d'isomorphismes. $G(T)$ est encore un foncteur contravariant en T, et on a un monomorphisme canonique $F \to G$. On voit d'abord facilement que F est représentable relativement à G ; de façon plus précise si $\eta \in G(T)$, alors le foncteur contravariant F_η sur $(\underline{An})_{/T}$ est représentable par un ouvert de T : il suffit de prendre l'ouvert formé des points où $\mathcal{O}_T^r \to \mathcal{E}_{X_T/T}$ est un épimorphisme (donc un isomorphisme, puisque ce sont des Modules localement libres de même rang). Il reste donc à prouver que G est représentable, ce qui est l'objet du

LEMME 1.5. - Soient X un espace analytique projectif sur un autre S, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ deux Modules cohérents sur X, $\mathcal{L}$ étant plat sur S. Pour tout espace analytique T sur S, soit $G(T)$ l'ensemble des isomorphismes de $\mathcal{M}_T$ sur $\mathcal{L}_T$, de sorte qu'on obtient un foncteur contravariant en T. Ce foncteur est représentable.

Soit d'abord $H(T)$ l'ensemble des homomorphismes des $\mathcal{M}_T$ dans $\mathcal{L}_T$, prouvons que H est représentable. En effet, $H(T)$ s'identifie de façon évidente à l'ensemble des Modules cohérents quotients $\mathcal{F}$ de $\mathcal{L}_T \times \mathcal{M}_T = \mathcal{E}_T$ (où $\mathcal{E} = \mathcal{L} + \mathcal{M}$) tels que l'homomorphisme canonique $\mathcal{L}_T \to \mathcal{F}$ soit un isomorphisme (ce qui implique déjà que $\mathcal{F}$ est plat sur T). Soit donc $I(T)$ l'ensemble des Modules cohérents quotients $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}_T$ qui sont plats sur T. On a des homomorphismes fonctoriels

$$G \to H \to I \quad .;$$

nous savons que I est représentable ([3] IX, 1.1), il reste donc à prouver que H est représentable relativement à I , puis que G l'est relativement à H . L'une et l'autre assertion sont alors contenues dans le

LEMME 1.6. - Soit X un espace analytique propre sur S , $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux Modules cohérents sur X , $\mathcal{Q}$ étant plat sur S , $u : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ un homomorphisme de Modules. Pour tout espace analytique T sur S , soit $J(T)$ l'ensemble vide si $u_T : \mathcal{P}_T \to \mathcal{Q}_T$ n'est pas un isomorphisme, l'ensemble réduit à un élément e dans le cas contraire. Considérons J comme un foncteur contravariant en T de façon évidente. Alors J est représentable par un ouvert de S .

En effet, comme la formation d'images inverses de Modules est compatible avec les conoyaux, le fait que u_T soit un épimorphisme s'exprime par la nullité de $\mathcal{R}_T$, où $\mathcal{R}$ est le conoyau de u ; comme le support d'une image inverse de Modules cohérents est l'image inverse du support, cela signifie aussi que T est au-dessus de la partie $S - f(\mathrm{Supp}\ \mathcal{R})$ de S , qui est une partie ouverte. Remplaçant S par cette dernière, on peut déjà supposer u surjectif. Mais comme $\mathcal{Q}$ est plat, on aura alors $\mathrm{Ker}(u_T) = (\mathrm{Ker}\ u)_T$, et l'injectivité de u_T s'exprime encore par la nullité de $(\mathrm{Ker}\ u)_T$, donc par le fait que T se trouve au-dessus de l'ouvert $S - f(\mathrm{Supp}\ \mathrm{Ker}\ u)$, ce qui achève la démonstration.

(Signalons d'ailleurs qu'il y a des démonstrations plus élémentaires de 1.5. et de ses variantes, n'utilisant pas les espaces modulaires généraux introduits dans [3], IX, 1 , et donnant des renseignements plus précis sur les espaces analytiques représentatifs obtenus.)

Le lemme 1.5 est ainsi prouvé, donc aussi la représentabilité du foncteur $\mathfrak{A}_R$ dans 1.2. Pour prouver que l'espace M_R qui le représente est simple sur $\underline{C}$, il suffit, en vertu de [3], VI, 3.1 (ivbis), de prouver que pour toute algèbre de rang fini locale A sur $\underline{C}$, tout quotient B de A par un idéal de carré nul, et tout élément de $\mathfrak{A}_R(B)$, il existe un élément de $\mathfrak{A}_R(A)$ dont il provient. Partons donc avec une courbe de genre g au-dessus de B , munie d'une rigidification linéaire, i. e. d'une base du B-module $H^0(X , \mathcal{C}_{X/B})$. Il suffit évidemment de remonter X en une courbe X' de genre g au-dessus de A , car il sera alors trivial de remonter la base de $H^0(X , \mathcal{C}_{X/B})$ en une base de $H^0(X' , \mathcal{C}_{X'/A})$. Or la possibilité de remonter la courbe X en une courbe X' résulte, comme il a été dit dans [3], VII, 6.3, de la relation

$$H^2(X_o , \mathcal{E}_{X_o}) = 0 \quad ,$$

où X_o désigne la courbe de genre g sur $\underline{C}$ déduite de X par réduction mod l'idéal maximal de B. (La nullité du groupe de cohomologie écrit résulte simplement du fait que X_o est de dimension complexe 1 !).

Il reste à calculer la dimension des anneaux locaux de M_R. Si x est un point de M_R, correspondant à une courbe X_o de genre g, muni d'une base de l'espace de formes $\mathcal{E}_{X_o/\underline{C}}$; la dimension de l'anneau local de x dans M_R est égale à celle de l'espace tangent de Zariski, lequel s'identifie à l'ensemble des classes à un isomorphisme près de courbes X à rigidification linéaire au-dessus de l'anneau

$$A = \underline{C}[t]/(t^2)$$

des nombres duaux, qui prolongent X_o. Pour se donner une telle X, on commence par considérer les courbes de genre g (sans structure rigidifiante) qui prolongent X_o ; on a vu([3], VII, 6.3) qu'elles correspondent aux éléments de $H^1(X_o , \mathcal{E}_{X_o})$, qui est un espace vectoriel de dimension $3g - 3$ en vertu du théorème de Riemann-Roch sur X_o. Pour toute telle courbe, on regarde alors l'ensemble des bases de $H^0(X , \mathcal{E}_{X/S})$ qui relèvent celle relative à X_o ; lorsque X correspond à l'élément nul du H^1, i.e. est isomorphe à la structure produit, on voit aussitôt que l'ensemble de ses relèvements est un espace vectoriel canoniquement isomorphe à l'espace des matrices r fois r, donc de dimension $r^2 = \dim G$. On en conclut facilement que la dimension de M_R en x est $3g - 3 + r^2$. Cela achève de prouver 1.2.

REMARQUES 1.7. - De l'énoncé 1.2, on peut déduire de façon essentiellement formelle, comme dans [3], I, 4.1, que la donnée d'une courbe de genre g au-dessus de l'espace analytique G est équivalente à la donnée d'un espace principal homogène analytique R sur S de groupe $G = Gl(n , \underline{C})$, et d'un morphisme d'espaces analytiques

$$R \to M_R$$

compatible avec les opérations de G, cette description étant fonctorielle et compatible avec le changement de base. On en conclut par exemple que l'espace des modules M introduit dans [3], I, 5 (à l'aide de l'espace de Teichmüller ou ses variantes, qui seront construits plus bas) n'est autre que M_R/G.

PROPOSITION 1.8. - Soit X une courbe de genre g au-dessus d'un espace analytique S. Alors pour tout $s \in S$, il existe un voisinage ouvert U de s, une courbe X' de genre g au-dessus d'un espace analytique simple S', et un morphisme $g : U \to S'$, tels que X soit U-isomorphe à l'image inverse de X' par g.

En effet, on peut prendre $S' = M_R$ et pour X' la courbe de genre g à rigidification linéaire universelle. L'énoncé 1.8 s'obtient en remarquant qu'on peut trouver une base de $\mathcal{E}_{X/S}$ sur un voisinage ouvert convenable U de s, qui fait donc de $X|U$ une courbe à rigidification linéaire.

Comme il est connu que X' doit être un fibré localement trivial du point de vue topologique, il résulte de 1.8 qu'une courbe de genre g au-dessus de S est un fibré localement trivial du point de vue topologique, comme annoncé dans [3], I, 2.1. Cela permet donc, comme il a été explicité dans [3], I, 2.1, de construire les foncteurs rigidifiants de Teichmüller et ses variantes.

2. M_R comme espace à opérateurs, et les espaces $\underline{\mathrm{Isom}}_S(X, Y)$.

Comme le foncteur contravariant

$$h_G : S \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(S, G) = \underline{\mathrm{Gl}}(r, \mathcal{O}_S)$$

sur $(\underline{An})$, à valeurs dans la catégorie des groupes, "opère" de façon évidente à droite sur le foncteur $\mathcal{U}_R$, on voit que M_R est un espace analytique à groupe analytique d'opérateurs (à droite) G. On en conclut comme d'habitude un morphisme canonique

$$M_R \times G \to M_R \times M_R$$

défini par la première projection pr_1, et le morphisme $M_R \times G \to M_R$ exprimant les opérations de G sur M_R. Nous allons interpréter ce morphisme en termes des

foncteurs représentés par les deux membres : il est évident d'abord qu'un morphisme d'un espace analytique S dans le deuxième membre $M_R \times M_R$ correspond à la donnée de deux courbes X , Y à rigidification linéaire au-dessus de S ; et alors les morphismes de S dans $M_R \times G$ qui relèvent le morphisme donné sont en correspondance biunivoque avec l'ensemble des $g \in h_G(S)$ tels que $X.g$ (la courbe linéairement rigidifiée au-dessus de S déduite de X en transformant sa rigidification à l'aide de g) soit isomorphe à Y . Comme le foncteur R est rigidifiant, i. e. l'isomorphisme précédent nécessairement unique, et que $h_G(S)$ opère de façon simplement transitive sur l'ensemble des rigidifications linéaires de la courbe au-dessus de S sous-jacente à X , on voit que l'ensemble des $g \in h_G(S)$ envisagé est en correspondance biunivoque avec l'ensemble $\underline{Isom}_S(X , Y)$ des S-isomorphismes des courbes au-dessus de S sous-jacentes à X , Y . Comme ces correspondances sont évidemment fonctorielles en S , on trouve :

PROPOSITION 2.1. - Soient S un espace analytique, X et Y deux courbes au-dessus de S induites par des morphismes f , g de S dans M_R ; alors l'image inverse par le morphisme $(f , g) : S \to M_R \times M_R$ de l'espace analytique $M_R \times G$ au-dessus de $M_R \times M_R$ est canoniquement isomorphe à $\underline{Isom}_S(X , Y)$; en particulier ses sections sur S (i. e. les $M_R \times M_R$ morphismes de S dans $M_R \times G$) sont en correspondance biunivoque avec l'ensemble des S-isomorphismes de X dans Y .

On notera que si on part de deux courbes de genre g quelconques X et Y au-dessus de S , elles peuvent toujours s'obtenir, au voisinage de tout point de S , par des morphismes f , g d'un voisinage du point dans M_R ; donc pratiquement, l'étude de $M_R \times G$ au-dessus de $M_R \times M_R$ est équivalente à celle des espaces analytiques de la forme $\underline{Isom}_S(X , Y)$. Signalons en passant :

COROLLAIRE 2.2. - Soient X et Y deux courbes de genre $g \geqslant 2$, alors $\underline{Isom}(X , Y)$ est un espace analytique fini et réduit. En particulier, le groupe des automorphismes d'une courbe de genre $g \geqslant 2$ est fini.

En effet, en vertu de 2.1, $\underline{Isom}(X , Y)$ est un sous-espace analytique fermé de G , qui provient même d'un sous-espace algébrique fermé du groupe algébrique qui définit G . Il suffit donc de montrer que ce dernier sous-espace algébrique est fini et réduit, et pour ceci il suffit de montrer que pour chacun de ses points, l'espace tangent de Zariski en ce point est réduit à 0 . Or, le dit espace est

canoniquement isomorphe à $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ ([3], VII, 5.3), qui est nul comme il résulte facilement du théorème de Riemann-Roch et de $g \geqslant 2$.

Nous aurons besoin du résultat plus général :

PROPOSITION 2.3. - Le morphisme canonique $M_R \times G \to M_R \times M_R$ est fini.

Cette proposition équivaut manifestement à la suivante, qui s'énonce sans faire intervenir de foncteur tel que R :

COROLLAIRE 2.4. - Soient X et Y deux courbes de genre $g \geqslant 2$ au-dessus de l'espace analytique S. Alors le morphisme structural $\underline{\mathrm{Isom}}_S(X, Y) \to S$ est <u>fini</u> i. e. propre et à fibres finies.

On a déjà vu dans 2.2 que les fibres sont finies, il reste à prouver que le morphisme est propre. Revenant à la forme 2.3, on est ramené à le prouver dans le contexte de la géométrie algébrique sur $\underline{C}$, où M_R et G désignent maintenant les schémas sur $\underline{C}$ construits de façon analogue à celle décrite ici dans le cadre de la géométrie analytique. Donc il suffit de prouver l'analogue de 2.4 dans le cadre de la géométrie algébrique sur $\underline{C}$, et a fortiori dans le cadre des schémas localement noethériens quelconques. Utilisant le critère valuatif de propreté ([2], II, 7.3.8), l'énoncé 2.4 (ou plutôt l'assertion de propreté dedans contenue) est équivalent au suivant pour $g \geqslant 2$, dû à CHOW-LANG :

LEMME 2.5. - Soient V un anneau de valuation discrète, K son corps des fractions, X et Y deux schémas en courbes de genre $g \geqslant 1$ sur V, et $u_K : X_K \xrightarrow{\sim} Y_K$ un isomorphisme des schémas sur K qui s'en déduisent par extension de la base. Alors il existe un V-isomorphisme unique $u : X \xrightarrow{\sim} Y$ tel que u_K se déduise de u par extension de la base.

(Bien entendu, on appellera <u>courbe de genre</u> g <u>au-dessus d'un préschéma</u> S un préschéma X simple et propre sur S dont les fibres géométriques sont des courbes de genre g connexes.) Pour être complet, nous allons indiquer ici la démonstration d'un résultat plus général. Notons en effet d'abord qu'il suffit évidemment de prouver 2.5 quand on y remplace les mots "isomorphisme" par "morphisme". Or on a alors :

LEMME 2.6. - Soient A et B deux S-schémas, S étant un préschéma localement noethérien et régulier, A étant simple sur S, et B un schéma abélien sur S,

ou plus généralement un schéma propre sur S tel que toute fibre géométrique B_k de B, relativement à une extension algébriquement close k d'un corps résiduel de S, ait la propriété suivante (bien connue pour les variétés abéliennes) : un morphisme d'une courbe rationnelle P^1_k dans B_k est constant. Alors toute S-application rationnelle de A dans B est partout définie.

Faisant le changement de base $A \to S$ et notant que $S' = A$ est également localement noethérien et régulier, et que $B' = B \times_S S'$ possède la même propriété sur S' que B sur S, on est ramené au cas $S = A$, i.e. au cas où on s'est donné une section g de B/S sur un ouvert partout dense U de S. Soit T l'adhérence de $g(U)$, munissons-le de la structure réduite induite par B, tout revient à montrer que le morphisme $T \to S$ induit par le morphisme structural $B \to S$ est un isomorphisme. On peut supposer S, donc T, intégré d'après un théorème de MURRE [6], (établi dans [6] dans le cas d'égales caractéristiques, suffisant pour la géométrie algébrique sur un corps, mais étendu par CHOW au cas général), $T \to S$ étant un morphisme propre dominant birationnel de préschémas intègre, avec S régulier, les fibres géométriques de T sont "connexes par courbes rationnelles". Comme elles sont contenues dans les fibres géométriques de B, elles sont réduites à un point d'après l'hypothèse sur ces dernières. Donc le morphisme propre birationnel T est à fibres réduites à un point, ce qui implique (S étant normal) que c'est un isomorphisme, et achève la démonstration de 2.6.

3. Rigidité du foncteur de Jacobi d'échelon $n \geqslant 3$.

THÉORÈME 3.1. - Soit n un entier $\geqslant 3$. Alors le foncteur cartésien de Jacobi d'échelon n sur la catégorie fibrée des courbes de genre g sur des espaces analytiques S ([3], I, 2), est rigidifiant.

C'est, sous une forme un peu plus précise, le résultat annoncé dans [3], I, 2.4.

Rappelons pour mémoire (cf. [3], IX, 2.1) :

LEMME 3.2. - Soient X un espace analytique propre et plat sur S, s un point de S, u un S-automorphisme de X induisant l'identité sur la fibre X_s. Supposons

$$H^0(X_s, \mathcal{G}_{X_s}) = 0$$

(où $\mathcal{G}_{X_s}$ est le faisceau tangent à X_s). Alors il existe un voisinage ouvert U de s tel que la restriction de u à $X|U$ soit l'identité.

Utilisant la formule de Riemann-Roch, on voit que l'hypothèse de nullité du H^0 est vérifiée lorsque X est une courbe de genre $g \geqslant 2$ au-dessus de S , donc on obtient :

COROLLAIRE 3.3. - Soit X une courbe de genre $g \geqslant 2$ au-dessus de S . Alors tout S-automorphisme de X qui induit l'identité sur les fibres de X , est l'identité.

LEMME 3.4. - Soient X une courbe de genre g sur un corps k , A sa jacobienne homogène, u un automorphisme de X induisant l'identité dans A . Alors u est l'identité.

La connaissance de l'endomorphisme u_0 de A défini par u permet, à l'aide de la formule de Lefschetz, de calculer le nombre algébrique de points fixes de u , on trouve ici $1 - 2g + 1 = 2(1 - g)$. (N. B. - En caractéristique 0 et sur le corps $\underline{C}$ on peut prendre la formule de Lefschetz classique des variétés différentiables, compte tenu du fait que $H^i(X , \underline{Z})$ s'identifie fonctoriellement à $H^i(A , \underline{Z})$; en caractéristique quelconque, il faut utiliser la formule de Lefschetz pour les courbes, due à André WEIL [7].) Comme ce nombre est $\neq 0$, il y a au moins un point fixe, soit a . Ce dernier peut être utilisé pour définir l'immersion soi-disant canonique de X dans sa jacobienne, de sorte que u est induit par u_0 . Comme u_0 est l'identité, on en conclut que u est l'identité.

LEMME 3.5. - Soient A une variété abélienne sur un corps k algébriquement clos ; soit n un entier $\geqslant 3$ et premier à la caractéristique, enfin soit u un automorphisme d'ordre fini de A laissant fixes les points d'ordre n de A . Alors u est l'identité.

(Cf. Appendice.)

Soit maintenant X une courbe de genre g au-dessus de l'espace analytique S : considérons le revêtement de Jacobi $\underline{P}_n(X/S)$, correspondant au système local de la 1-cohomologie des fibres à coefficients dans $\underline{Z}/n\underline{Z}$, soit u un automorphisme de X/S induisant l'identité sur $\underline{P}_n(X/S)$; prouvons que u est l'identité. En vertu de 3.3, on peut supposer que S est réduit à un point, d'anneau local $\underline{C}$,

i. e. que X est une courbe de genre g au sens habituel. On sait que $H^1(C, \underline{Z}/n\underline{Z})$ s'identifie fonctoriellement au $\underline{Z}/n\underline{Z}$-module dual du groupe des points d'ordre divisant n sur la jacobienne homogène A de C, et l'hypothèse sur u signifie aussi que l'endomorphisme de ce dernier groupe induit par u est l'identité. En vertu de 3.5, l'endomorphisme de A induit par u est l'identité (On utilise le fait bien connu que le groupe des automorphismes d'une courbe algébrique de genre $g \geqslant 2$ est fini, d'après 2.2.

4. Les espaces modulaires mixtes $M_{\mathcal{R},\mathcal{P}}$ comme revêtements de $M_{\mathcal{R}}$.

Soit $\mathcal{P}$ un foncteur rigidifiant sur la catégorie fibrée des courbes de genre g au-dessus d'espaces analytiques, associé à un groupe discret G ([3], I, 2). On peut prendre par exemple en vertu de 2.1 le foncteur de Jacobi d'échelon $n \geqslant 3$.

Alors à toute courbe X de genre g au-dessus d'un S, est associé le fibré principal analytique

$$\mathcal{R}(X/S) \times \mathcal{P}(X/S) = \mathcal{Q}(X/S)$$

sur S, de groupe structural $G \times \gamma$, dont la formation est fonctorielle en X/S et compatible avec le changement de base. On appellera rigidification mixte sur X/S la donnée d'une section de $\mathcal{Q}(X/S)$ sur S, ou ce qui revient au même, d'une section de $\mathcal{R}(X/S)$ et d'une section de $\mathcal{P}(X/S)$, i. e. d'une rigidification linéaire et d'une rigidification par $\mathcal{P}$ (ou, comme nous avions dit, d'une $\mathcal{P}$-structure) sur X. Cela conduit donc à introduire, pour tout espace analytique S, l'ensemble $\mathcal{I}_{\mathcal{R},\mathcal{P}}(S)$ des classes à un isomorphisme près de courbes de genre g au-dessus de S, munies d'une rigidification mixte. De cette façon, $\mathcal{I}_{\mathcal{R},\mathcal{P}}$ devient un foncteur contravariant de $(\underline{An})$ dans la catégorie des ensembles. Noter aussi que pour tout S, $\mathcal{I}_{\mathcal{R},\mathcal{P}}(S)$ est un ensemble à groupe d'opérateurs $(G \times \gamma)(S) = \mathrm{Hom}(S, G \times \gamma)$.

PROPOSITION 4.1. - Le foncteur $\mathcal{I}_{\mathcal{R},\mathcal{P}}$ est représentable par un espace analytique $M_{\mathcal{R},\mathcal{P}}$, séparé, et simple de dimension $3g - 3 + \dim G$ en tous ses points.

Lorsqu'on le regarde comme espace à opérateurs sous $G \times G$, et par suite sous G , le groupe G y opère <u>librement</u> et avec un <u>graphe fermé</u> ; de façon précise le morphisme naturel

$$M_{\mathcal{R},\mathcal{P}} \times G \to M_{\mathcal{R},\mathcal{P}} \times M_{\mathcal{R},\mathcal{P}}$$

est une immersion fermée.

DÉMONSTRATION. - Considérons l'homomorphisme fonctoriel canonique

$$\mathcal{A}_{\mathcal{R},\mathcal{P}} \to \mathcal{A}_{\mathcal{R}} \quad .$$

On sait par 1.2 que le foncteur du deuxième membre est représentable ; pour prouver que celui du premier membre l'est, il suffit de prouver qu'il est relativement représentable([3], IV, 3.7). Mais cela est évident sur les définitions, et de façon précise, si $X_{\mathcal{R}}$ est la courbe de genre g à rigidification linéaire universelle sur $M_{\mathcal{R}}$, le foncteur $M_{\mathcal{R},\mathcal{P}}$ est représenté par $\mathcal{P}(X_{\mathcal{R}}/M_{\mathcal{R}})$, qui est un revêtement principal de $M_{\mathcal{R}}$, de groupe G . Comme $M_{\mathcal{R}}$ est séparé, et simple de dimension $3g - 3 + \dim G$ en chacun de ses points par 2.1, il en résulte qu'il en est de même de $M_{\mathcal{R},\mathcal{P}}$. Reste à montrer que le morphisme envisagé dans 4.1 est bien une immersion fermée, ou ce qui revient au même, est un <u>monomorphisme</u> et un <u>morphisme propre</u>. Le premier point signifie que, pour tout S , le groupe $G(S)$ opère librement sur l'ensemble $\mathcal{A}_{\mathcal{R},\mathcal{P}}(S)$, i. e. que si l'on a au-dessus de S une courbe à structure mixte, un élément g de $G(S)$, et un S-automorphisme u de X qui conserve sa $\mathcal{P}$-structure et change sa $\mathcal{R}$-structure par l'opération g , alors g est l'élément unité. En effet, $\mathcal{P}$ étant rigidifiant, u est l'identité, donc ne change pas la $\mathcal{R}$-structure, donc g est l'élément unité puisque $G(S)$ opère librement sur l'ensemble des $\mathcal{R}$-structures sur X/S . Pour montrer que le morphisme envisagé est propre, on considère le diagramme commutatif de morphismes canoniques

$$\begin{array}{ccc} M_{\mathcal{R},\mathcal{P}} \times G & \xrightarrow{\ j\ } & M_{\mathcal{R},\mathcal{P}} \times M_{\mathcal{R},\mathcal{P}} \\ \Big\downarrow p & & \Big\downarrow q \\ M_{\mathcal{R}} \times G & \xrightarrow{\ i\ } & M_{\mathcal{R}} \times M_{\mathcal{R}} \end{array}$$

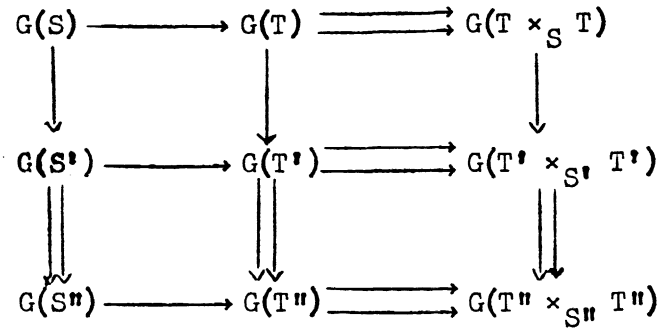
On sait que i est propre (2.3), d'autre part, G étant fini, p est propre, donc $ip = qj$ l'est ; enfin q étant séparé, j est propre. Cela achève la démonstration. Si on ne suppose plus G fini, on peut aussi, au lieu de se ramener à 2.3, invoquer directement 2.4, qui est encore une forme équivalente de l'assertion de propreté (comme on voit par le raisonnement du n° 2.)

5. L'espace modulaire $M_{\mathfrak{P}}$ comme quotient $M_{\mathfrak{P},\mathfrak{R}}/G$.

Considérons maintenant l'homomorphisme de foncteurs

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{R},\mathfrak{P}} \to \mathfrak{A}_{\mathfrak{P}} \quad ;$$

nous savons déjà que le premier membre est un foncteur représentable, représenté par $M_{\mathfrak{R},\mathfrak{P}}$, nous voulons en conclure le représentabilitédu deuxième membre, par application du critère [3], IV, 4.7. Nous prendrons, avec les notations de [3], IV, 4.7, $\mathfrak{S}$ = ensemble des morphismes simples et surjectifs. Nous devons vérifier les conditions (ii) (a), (b), (c). Pour (a), cela est trivial, car si on a un élément η de $G(S) = \mathfrak{A}_{\mathfrak{P}}(S)$, i. e. une courbe X munie d'une $\mathfrak{P}$-structure au-dessus de S , alors le foncteur $F_\eta = F \times_G G_\eta$ sur $(\underline{An})/S$ est représenté par le fibré principal homogène $\mathfrak{R}(X/S)$ sur S de groupe G , et le morphisme structural $\mathfrak{R}(X/S) \to S$ est bien simple et surjectif. Il faut montrer (b), i. e. que les morphismes simples et surjectifs $f : T \to S$ sont des morphismes de G-descente effective. Or f étant simple, il résulte du critère [3], VI, 3.1, (iv) que pour tout $s \in S$, il existe un voisinage U de s au-dessus duquel T ait une section, donc il existe un espace analytique S' , somme d'ouverts recouvrant S , tel que $T' = T \times_S S'$ ait une section au-dessus de S' . Il en résulte que le morphisme $f' : T' \to S'$ est un morphisme de descente effective pour tout foncteur contravariant sur $(\underline{An})$, et en particulier pour G ; cela reste vrai par toute extension de la base, en particulier pour le morphisme $T'' = T \times_S S'' \to S''$, où $S'' = S' \times_S S'$. D'autre part, il est trivial que G est un foncteur de nature locale ([3], VI, 5.4), donc $S' \to S$, est un morphisme de G-descente effective, et il en est de même des morphismes $T' \to T$ et $T' \times_{S'} T' \to T \times_S T$ qui s'en déduisent par simple changement de base. Considérons alors le diagramme d'applications ensemblistes



dans ce diagramme, les deux dernières lignes et toutes les colonnes sont exactes, d'où on conclut facilement que la première ligne est exacte.

C. Q. F. D.

Il reste à vérifier la condition (c). Pour ceci, notons d'abord que le graphe d'équivalence R dans $X = M_{R,\mathfrak{P}}$ qui représente $F \times_G F$ n'est autre que le sous-objet défini par le monomorphisme canonique

$$M_{R,\mathfrak{P}} \times G \to M_{R,\mathfrak{P}} \times M_{R,\mathfrak{P}} \quad ,$$

i. e. par le groupe à opérateurs G opérant librement à droite sur $M_{R,\mathfrak{P}}$. Donc la condition (c) est vérifiée si nous prouvons que l'espace analytique quotient $Y = X/G$ existe, et que X est un fibré principal homogène sur Y de groupe G (ce qui implique en effet que R est effectif et que $X \to Y$ est un morphisme simple et surjectif). Or X est en fait une variété analytique, et G y opère librement et avec un graphe fermé (4.1). On sait alors que dans la catégorie des variétés analytiques, il existe un quotient Y et que X est un fibré principal homogène sur Y de groupe G. Mais alors on en conclut facilement que Y est également un quotient de X par G dans la catégorie des espaces analytiques quelconques. De plus on voit par la même occasion que ce quotient Y est une variété, et en vertu de 4.1 sa dimension en chaque point est égale à $\dim X - \dim G = 3g - 3$. On voit aussi facilement, X étant séparé et le graphe de G opérant dans X étant fermé, que $Y = X/R$ est également séparé. En résumé, on a prouvé le théorème fondamental annoncé dans [3], I, 3.1 avec les compléments qui y sont indiqués dans la remarque 3.2, 1°.

REMARQUE 5.1. - Ce raisonnement s'applique en fait à n'importe quel foncteur rigidifiant $\mathfrak{P}$ du type envisagé dans [3], I, et en particulier les développements de [3], I, 8 ne sont pas indispensables. On notera cependant que lorsqu'on part du théorème d'existence analogue en théorie des schémas, on est obligé de se borner d'abord à des foncteurs rigidifiants tels que les foncteurs de Jacobi, avec 6 fini, et le cas d'un foncteur rigidifiant plus général s'en déduit alors formellement comme il a été indiqué dans [3], I, 8.

Pour terminer, nous allons indiquer la démonstration des faits annoncés dans [3], I, 6.2, concernant les "automorphismes universels" des courbes de genre g. On suppose seulement par la suite $g \geq 1$. On sait du résultat suivant, qui est une conséquence immédiate de la définition et de [3], VII, 6.3 :

PROPOSITION 5.2. - Soient $\mathfrak{P}$ un foncteur rigidifiant pour les courbes de genre g ([3], I, 2.3), et T un espace analytique qui représente $\mathfrak{P}$. Soient $t \in T$, et X_t la courbe de genre g correspondante. Alors l'espace tangent à T en t est canoniquement isomorphe à $H^1(X_t, \mathcal{O}_{X_t})$.

(N. B. - Ce résultat s'exprime encore en disant que le germe de T en t est un espace modulaire local pour les déformations de l'espace analytique X_t, Cf. [3], IX, 2). Soit maintenant γ_t le groupe des automorphismes de X_t, i.e. le stabilisateur de t dans γ ([3], I, 3.4). Comme c'est un groupe fini (2.2), et que l'anneau local $\mathcal{O}_t$ de t dans T est de caractéristique 0, il s'ensuit que tout élément de γ_t qui opère trivialement dans l'espace tangent à T en t, ou ce qui revient au même dans $\mathfrak{m}_t/\mathfrak{m}_t^2$, opère trivialement dans $\mathcal{O}_t$, donc opère trivialement dans la composante connexe de t dans T (puisque T est séparé), la réciproque étant d'ailleurs évidente. Donc :

COROLLAIRE 5.3. - Le groupe des automorphismes universels des courbes de genre g ([3], I, 6) est isomorphe au sous-groupe du groupe des automorphismes d'une courbe X de genre g qui opèrent trivialement sur $H^1(X, \mathcal{O}_X)$.

On notera que cette courbe X peut être choisie arbitrairement. Notons que d'après la formule de dualité, $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est dual à $H^0(X, (\Omega_X^1)^{\otimes 2})$, espace des "différentielles quadratiques" sur X. Or nous avons vu que pour le genre $g \geq 3$, les formes biquadratiques suffisent à définir une immersion projective de

la courbe X ([3], VIII, 2.2), donc tout automorphisme de X induisant l'identité sur lesdites formes est l'identité. Dans le cas général, on note que pour toute $\omega \in H^0(X, \underset{\sim}{\Omega}^1_X)$ et tout automorphisme universel s, comme $s.(\omega \otimes \omega) = (s\omega) \otimes (s\omega)$ doit être égal à $\omega \otimes \omega$, on aura $s\omega = \varepsilon\omega$, avec $\varepsilon = \pm 1$, et bien entendu ε sera le même pour tous les ω. Cela implique donc que <u>l'automorphisme de la jacobienne de X induit par un automorphisme universel de X est trivial, ou est la symétrie de la jacobienne</u>. Cela montre que pour $g = 1$ ou 2, un automorphisme universel est l'identité ou la "symétrie" de la courbe (hyperelliptique) envisagée. On a donc bien prouvé :

COROLLAIRE 5.4. - Le groupe des automorphismes universels des courbes de genre g est réduit à l'identité si $g \geqslant 3$, et est le groupe $\underline{Z/2Z}$ engendré par la "symétrie" dans le cas $g = 1$ et $g = 2$.

Reste à montrer que pour tout $g \geqslant 1$, l'ensemble T_{in} est non vide, i. e. il existe une courbe de genre g ayant un groupe d'automorphismes strictement plus grand que le groupe des automorphismes universels. Il suffit pour ceci de construire pour tout g une courbe de genre g hyperelliptique (i. e. ayant un automorphisme induisant la symétrie sur la jacobienne), qui a un automorphisme non trivial distinct de la symétrie canonique. Ecrivant X par une équation

$$y^2 = f(x) \quad ,$$

où f est un polynôme en x de degré $2g + 1$ sans zéros multiples, il suffit de s'arranger pour que f soit invariante par un automorphisme non trivial du plan affine, ce qui est évidemment possible de bien des façons!

APPENDICE

<u>Rigidité du foncteur de Jacobi d'échelon $n \geqslant 3$</u>.

(par J.-P. SERRE)

Soit A une variété abélienne, et soit u un endomorphisme de A. Si n est un entier $\geqslant 1$, et s'il existe un endomorphisme v de A tel que $u = nv$, nous dirons que u s'annule sur le noyau de la multiplication par n, et nous écrirons $u \equiv 0 \mod n$. Cette terminologie est justifiée, en caractéristique p ne divisant pas n, par le fait que $u \equiv 0 \mod n$ équivaut à $u(x) = 0$ pour tout $x \in A$ tel

que $nx = 0$ (démonstration immédiate) ; dans le cas général, cela signifie aussi que u annule le noyau (qui peut être à éléments nilpotents) de la multiplication par n.

THÉORÈME. - *Soit u un automorphisme de A d'ordre fini, et soit n un entier ≥ 1 tel que $u - 1 \equiv 0 \mod n$. Si $n = 2$, ceci entraîne $u^2 = 1$; si $n \geq 3$, ceci entraîne $u = 1$.*

(La condition $u \equiv 1 \mod n$ signifie que u *est l'identité* sur le noyau de la multiplication par n.)

Soit donc $u = 1 + nv$. Soit $C = \underset{\sim}{Z}[v]$ le sous-anneau de l'anneau des endomorphismes de A engendré par v. On sait (WEIL - C'est d'ailleurs trivial en caractéristique zéro) que cet anneau est de type fini sur $\underset{\sim}{Z}$, et sans torsion. De plus, l'algèbre $C_{\underset{\sim}{Q}} = \underset{\sim}{Q} \otimes C$ est engendrée sur $\underset{\sim}{Q}$ par u, et l'on sait qu'il y a un entier $N \geq 1$ tel que $u^N = 1$. Il en résulte que $C_{\underset{\sim}{Q}}$ est une algèbre semi-simple sur $\underset{\sim}{Q}$ (en effet, c'est un quotient de $\underset{\sim}{Q}[T]/(T^N - 1)$, qui est une algèbre semi-simple puisque $T^N - 1$ est sans facteur multiples). Ainsi, $C_{\underset{\sim}{Q}}$ est un produit de corps, extensions finies de $\underset{\sim}{Q}$ (en fait, ce sont des corps cyclotomiques, mais peu importe), et l'image de u dans chacun de ces corps K_α est un élément u_α, d'ordre N, et congru à $1 \mod n$ (dans l'anneau des entiers de K_α). Nous sommes donc ramenés à démontrer le lemme suivant :

LEMME. - *Soit z une racine N-ième de l'unité (dans une clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}$), et soit n un entier ≥ 1 tel que $z - 1 \equiv 0 \mod n$. Alors, si $n = 2$, on a $z = \pm 1$, et si $n \geq 3$, on a $z = 1$.*

On peut évidemment supposer (quitte à changer N), que z est une racine primitive N-ième de l'unité. Considérons d'abord le cas où N est une puissance p^ν d'un nombre premier v. Prolongeons la valuation p-adique v de $\underset{\sim}{Q}$ en une valuation réelle (notée encore v) de la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}$; on sait (Cf. par exemple HILBERT, Zahlbericht, théorème 120) que l'on a :

$$v(z - 1) = 1/(p - 1)\, p^{\nu - 1} \quad .$$

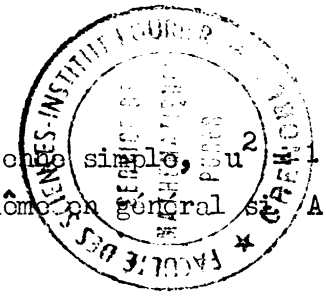
En particulier, on a $v(z - 1) < 1$ (sauf si $p = 2$, $\nu = 1$). Comme d'autre part on doit avoir $v(z - 1) \geq v(n)$, on en conclut que (sauf si $p^\nu = 2$, c'est-à-dire

si $z^2 = 1$) $v(n) = 0$, c'est-à-dire que p ne divise pas n (dans le cas exceptionnel, on en conclut que 4 ne divise pas n). D'autre part, si w est un prolongement d'une valuation p'-adique de $\underline{Q}(p' \neq p)$, on a $w(z - 1) = 0$ (même référence), ce qui n'est possible que si p' ne divise pas n . Finalement, si $n \geqslant 3$, on obtient une contradiction, et si $n = 2$, on a $z^2 = 1$.

Dans le cas général, soit $N = p_1^{m_1} \dots p_i^{m_i}$ la décomposition de N en facteurs premiers. Le groupe multiplicatif engendré par v se décompose en produit de groupes cycliques d'ordres $p_1^{m_1}$, ... , etc. On en conclut que $z = z_1 \dots z_i$,

où z_h est racine primitive $p_h^{m_h}$-ième de l'unité, et est une puissance de z . On a donc aussi $z_h \equiv 1 \mod n$, d'où, d'après ce qu'on vient de voir, $z_h = 1$ si $n \geqslant 3$, et $z_h^2 = 1$ si $n = 2$; d'où le même résultat pour z .

C. Q. F. D.



REMARQUE. - Si A est une variété abélienne simple, $u^2 = 1$ entraîne $u = \pm 1$; il n'en est évidemment plus de même en général si A n'est pas simple.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAILY (Walter L.). - On the moduli of Jacobian varieties and curves, Contributions to function theory, Papers of the International colloquium on funtion theory [1960. Bombay] ; p. 51-62. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1960.

[2] DIEUDONNÉ (J.) et GROTHENDIECK (A.). - Eléments de géométrie algébrique, I-III. - Paris, Presses universitaires de France, 1960-1961 (Institut des hautes Etudes scientifiques, Publications mathématiques, 4 et 8) ; III-IV (à paraître).

[3] GROTHENDIECK (A.). - Techniques de construction en géométrie analytique, I-IX. ; Séminaire Cartan, t. 13, 1960/61, n° 7-16.

[4] IGUSA (Jun-Ichi). - Kroneckerian model of fields of elliptic modular functions, Amer. J. of Math., t. 81, 1959, p. 561-577.

[5] MUMFORD (.). - An elementary theorem in geometric invariant theory (à paraître).

[6] MURRE (J. P.). - On a connectedness theorem for a birational transformation at a simple point, Amer. J. of Math., t. 80, 1958, p. 3-15.

[7] WEIL (André). - Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, - Paris, Hermann, 1948c(Act. scient. et ind., 1041 ; Publ. Inst. Math. Univ. strasbourg, 7).