

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

ADRIEN DOUADY

Variétés et espaces mixtes

Séminaire Henri Cartan, tome 13, n° 1 (1960-1961), exp. n° 2, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1960-1961__13_1_A1_0>

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

7 novembre 1960

VARIÉTÉS ET ESPACES MIXTES

par Adrien DOUADY

I. Catégorie de modèles.

Soit B un espace topologique. On définit la catégorie $\mathbb{S}_B^n$ de la façon suivante : les objets de $\mathbb{S}_B^n$ sont les ouverts de $B \times \mathbb{C}^n$, un morphisme $f : U \rightarrow U'$ d'un ouvert $U \subset B \times \mathbb{C}^n$ dans un ouvert $U' \subset B \times \mathbb{C}^n$ est une application continue $f : U \rightarrow U'$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

1° Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U' \\ \pi_1 \searrow & & \swarrow \pi_1 \\ & B & \end{array}$$

est commutatif, π_1 désignant la projection de $B \times \mathbb{C}^n$ sur B .

Pour tout $x \in B$, l'application $f_x : U_x \rightarrow U'_x$ est holomorphe, où

$$U_x = \{z \in \mathbb{C}^n \mid (x, z) \in U\}, \quad (\text{resp. } U'_x)$$

Lorsque B est muni d'une structure de variété $\mathbb{C}^\infty$ (resp. variété $\mathbb{R}$ -analytique, resp. espace $\mathbb{C}$ -analytique) on obtient une catégorie $\mathbb{C}^\infty \mathbb{S}_B$ (resp. $\mathbb{R} \mathbb{S}_B$, resp. $\mathbb{C} \mathbb{S}_B$) en astreignant les morphismes à être des applications $\mathbb{C}^\infty$ (resp. ...)

Plus généralement, si $f_1 : B \rightarrow B'$ est une application continue d'un espace topologique dans un autre, un morphisme de $\mathbb{S}_{f_1}$ est une application continue f d'un objet U de $\mathbb{S}_B$ dans un objet U' de $\mathbb{S}_{B'}$ telle que

1° le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U' \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ B & \xrightarrow{f_1} & B' \end{array}$$

soit commutatif.

2° $\forall x \in B$, $f_x : U_x \rightarrow U'_{f_1(x)}$ est holomorphe.

Si f_1 est une application C^∞ d'une variété C^∞ dans une autre, f sera un morphisme de $C^\infty S_{f_1}$ si, de plus, c'est une application C^∞ (resp. ...). On obtient ainsi, pour toute catégorie d'espaces topologiques, une catégorie fibrée S^n (resp. $C^\infty S^n$, resp. ...).

II. Définition des espaces et variétés mixtes.

1. Première définition.

Soient B et V des espaces séparés, $\pi: V \rightarrow B$ une application continue. Une structure d'espace mixte sur B est définie sur V par un système de cartes $\varphi_i: U_i \rightarrow V$, où les (U_i) sont des objets de S_B^n ; pour chaque i , φ_i est un homéomorphisme de U_i sur un ouvert de V tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{\varphi_i} & V \\ & \searrow \pi_1 & \swarrow \pi \\ & B & \end{array}$$

soit commutatif; enfin $(\forall i, j)$ le "changement de carte" $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ est un isomorphisme de S_B d'un ouvert de U_i sur un ouvert de U_j .

La structure ainsi définie est une structure d'espace mixte $(C^0, \underline{C})$. Si B est un espace $\underline{C}$ -analytique, et si les changements de cartes sont $\underline{C}$ -analytiques, on a un espace mixte $\underline{C}$ -analytique. Dans ce cas, V est lui-même un espace $\underline{C}$ -analytique, et les fibres $V_x = \pi^{-1}\{x\}$ sont des sous-variétés $\underline{C}$ -analytiques.

Si B est une variété C^∞ (resp. $\underline{R}$ -analytique, resp. $\underline{C}$ -analytique), et si les changements de cartes sont C^∞ (resp. ...), on a une variété mixte $(C^\infty, \underline{C})$ (resp. $(\underline{R}, \underline{C})$, resp. $(\underline{C}, \underline{C})$). V est alors elle-même une variété. Remarquons que la notion de variété mixte $(\underline{C}, \underline{C})$, ou $\underline{C}$ -analytique, se réduit à celle de variété $\underline{C}$ -analytique V , munie d'une projection $\pi: V \rightarrow B$ sur une autre variété $\underline{C}$ -analytique, de rang maximum en tout point.

Soient $\pi: V \rightarrow B$ et $\pi': V' \rightarrow B'$ deux espaces mixtes, $f_1: B \rightarrow B'$ une application continue (resp. ...). Un morphisme de V dans V' au-dessus de f_1 est une application continue $f: V \rightarrow V'$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{f_1} & B' \end{array}$$

(soit commutatif, et que, quelles que soient les cartes $\varphi_i : U_i \rightarrow V$ et $\varphi_j^! : U_j^! \rightarrow V^!$, l'application $\varphi_j^{!-1} \circ f \circ \varphi_i$ soit un morphisme de $\mathcal{S}_{f_1}$ (resp. ...) d'un ouvert de U_i dans $U_j^!$).

2. Définition équivalente.

Donnons un autre mode de définition des espaces mixtes, équivalent au précédent.

Étant donnés deux espaces B et V séparés, et une application continue $\pi : V \rightarrow B$, une structure d'espace pré-mixte consiste en une structure de variété $\mathbb{C}$ -analytique sur chaque fibre $V_x = \pi^{-1}\{x\}$. Étant donnés deux espaces pré-mixtes $\pi : V \rightarrow B$ et $\pi' : V' \rightarrow B'$, et une application continue $f_1 : B \rightarrow B'$, un morphisme d'espaces pré-mixtes au-dessus de f_1 est une application continue $f : V \rightarrow V'$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{f_1} & B' \end{array}$$

soit commutatif, et induise sur chaque fibre une application $\mathbb{C}$ -analytique.

Un espace mixte est un espace pré-mixte $\pi : V \rightarrow B$ tel que tout point $y \in V$ admette un voisinage W dans V isomorphe comme espace pré-mixte à un ouvert de $B \times \mathbb{C}^n$, avec un isomorphisme au-dessus de l'identité. Les morphismes d'espaces mixtes sont les mêmes : les espaces mixtes forment une sous-catégorie pleine.

3. Déformations.

Un espace mixte $\pi : V \rightarrow B$ est dit propre si B est localement compact et si l'application π est propre (i. e. l'image réciproque de tout compact est compacte). Si c'est une variété mixte, on peut montrer que c'est une variété fibrée localement triviale pour la structure C^∞ sous-jacente, mais l'exposé précédent montre bien qu'en général deux fibres ne sont pas isomorphes comme variétés $\mathbb{C}$ -analytiques.

DEFINITION. - Soient V_0 une variété $\mathbb{C}$ -analytique compacte, B un espace localement compact, $b_0 \in B$. Une déformation $\mathbb{C}$ -analytique de V_0 au-dessus de (B, b_0) est constituée par un espace mixte $\mathbb{C}$ -analytique propre $\pi : V \rightarrow B$

et un isomorphisme de variétés $\mathbb{C}$ -analytiques $i : V_0 \rightarrow \pi^{-1}\{b_0\}$.

L'objet de ce séminaire est l'étude, au moins locale, et une tentative de classification des déformations $\mathbb{C}$ -analytiques d'une variété $\mathbb{C}$ -analytique compacte V_0 donnée.

DÉFINITION. - Soient V_0 une variété $\mathbb{C}$ -analytique compacte. Une déformation $\mathbb{C}$ -analytique $(\pi : V \rightarrow B, i : V_0 \rightarrow V)$ de V_0 est dite localement "verselle" (en anglais : "complete") si, pour toute autre déformation $(\pi' : V' \rightarrow B', i' : V_0 \rightarrow V')$ de V_0 , il existe un voisinage B'_1 de b'_0 dans B' , une application analytique $f_1 : B'_1 \rightarrow B$, avec $f_1(b'_0) = b_0$, et un morphisme d'espace mixte $\mathbb{C}$ -analytique $f : \pi'^{-1}(B'_1) \rightarrow V$ au-dessus de f_1 tel que $f \circ i' = i$. La déformation sera dite localement universelle si de plus le germe de f_1 en b'_0 est déterminé de façon unique par cette condition.

Il semble que toute variété $\mathbb{C}$ -analytique compacte V_0 admette une déformation $\mathbb{C}$ -analytique localement "verselle", et localement universelle si le groupe des automorphismes de V_0 est discret.

III. Champs de vecteurs.

1. Étude sur les modèles.

Soient B un espace, U un objet de $\mathcal{S}_B$, i. e. un ouvert de $B \times \mathbb{C}^n$, b_0 un point de B , $U_0 = \pi^{-1}\{b_0\}$.

Un champ holomorphe de vecteurs tangents sur U_0 (i. e. une application holomorphe de U_0 dans $\mathbb{C}^n$) sera dit champ vertical holomorphe sur U_0 . Un champ vertical holomorphe sur U est une application continue (resp. ...)

$\theta : U \rightarrow \mathbb{C}^n$, qui induise sur chaque fibre U_x un champ vertical holomorphe. Si $f : U \rightarrow U'$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}_B$, le transporté $f_* \theta$ de θ par f , est défini par

$$f_* \theta(f(x, z)) = D_2 f_{x,z} \cdot \theta(x, z),$$

où $D_2 f_{x,z}$ est l'application linéaire de $\mathbb{C}^n$ dans lui-même, tangente à f_x au point $z \in U_x$. C'est encore un champ vertical holomorphe, car il résulte d'une intégrale de Cauchy que la matrice $Df_{x,z}$ dépend continuellement du couple (x, z) .

Supposons maintenant que B soit une variété $\mathbb{C}^\infty$, pour fixer les idées, et soit T_0 l'espace tangent à B en b_0 . Un champ défini sur U_0 de vecteurs tangents

à U , i. e. une application $\omega : U_0 \rightarrow T_0 \times \mathbb{C}^n$, sera dit champ projetable holomorphe si $\omega(b_0, z) = (t_0, \theta(z))$, où $t_0 \in T_0$ est un vecteur ne dépendant pas de z , appelé projection du champ ω , et $\theta(z)$ est un champ de vecteurs holomorphe. Si B est un espace $\mathbb{C}$ -analytique, pouvant présenter une singularité en b_0 , on donne la même définition, T_0 étant alors l'espace tangent à B en b_0 au sens de ZARISKI, i. e. le dual de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, où $\mathfrak{m}$ est l'idéal des germes en b_0 de fonctions holomorphes sur B , nulles en b_0 .

Si $f : U \rightarrow U'$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}^\infty \mathbb{S}_B$ (resp. ...), le transporté $f_* \omega$ est défini par $f_* \omega(f(b_0, z)) = Df_{b_0, z} \omega(b_0, z)$, où $Df_{b_0, z} : T_0 \times \mathbb{C}^n \rightarrow T_0 \times \mathbb{C}^n$ est maintenant l'application linéaire tangente à f au point (b_0, z) . C'est un champ projetable holomorphe. En effet, la matrice $Df_{b_0, z}$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ D_1 f & D_2 f \end{pmatrix},$$

et

$$D_1 f : T \rightarrow \mathbb{C}^n \text{ et } D_2 f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

dépendent holomorphiquement de z (pour $D_1 f$, cela résulte de ce que f_x est holomorphe pour tout x). En posant $f_* \omega(b_0, z') = (t_0, \theta'(z'))$, on a

$$\theta'(z') = D_1 f_{b_0, z}(t_0) + D_2 f_{b_0, z}(\omega(z)) \quad \text{si } z' = f_{b_0}(z),$$

ce qui montre bien que $f_* \omega$ est un champ projetable holomorphe.

Un champ projetable holomorphe sur U est un champ $\mathcal{C}^\infty$ (resp. ...) de vecteurs tangents à U , qui induise sur chaque fibre un champ projetable holomorphe.

2. Champs de vecteurs sur une variété mixte.

Soit $\pi : V \rightarrow B$ une variété mixte $(\mathcal{C}^\infty, \mathbb{C})$ (resp. ..., resp. un espace mixte $\mathbb{C}$ -analytique). On définit par transport à partir des cartes les notions de :

- champ vertical holomorphe sur un ouvert d'une fibre
- champ vertical holomorphe sur un ouvert de V
- champ projetable holomorphe sur un ouvert d'une fibre
- champ projetable holomorphe sur un ouvert de V .

Soit ξ un champ de vecteurs C^∞ (resp. ...) sur V . On obtient en intégrant ξ une application C^∞ , notée e^ξ , d'un ouvert $W \subset \mathbb{R} \times V$ contenant $\{0\} \times V$ (resp. $\mathbb{C}$ -analytique d'un ouvert $W \subset \mathbb{C} \times V$) dans V , caractérisée par

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad e^\xi(t_1 + t_2, y) = e^\xi(t_1, e^\xi(t_2, y)) \text{ , le premier membre étant défini} \\ \text{chaque fois que le second l'est.} \\ (2) \quad \frac{\partial}{\partial t} e^\xi(t, y)|_{0,y} = \xi(y) . \end{array} \right.$$

Remarquons que W est une variété mixte sur $\mathbb{R} \times B$ (resp. un espace mixte sur $\mathbb{C} \times B$).

PROPOSITION. - Pour que $e^\xi : W \rightarrow V$ soit un morphisme d'espace mixte au-dessus de la projection $\mathbb{R} \times B \rightarrow B$, il faut et il suffit que ξ soit un champ vertical holomorphe. Pour que $e^\xi : W \rightarrow V$ soit un morphisme d'espace mixte au-dessus d'une application d'un ouvert de $\mathbb{R} \times B$ contenant $\{0\} \times B$ dans B , il faut et il suffit que ξ soit un champ projetable holomorphe.

La démonstration est laissée au lecteur.

IV. L'application de Spencer-Kodaira.

Soient $\pi : V \rightarrow B$ une variété mixte (resp. un espace mixte $\mathbb{C}$ -analytique), $b_0 \in B$, $V_0 = \pi^{-1}\{b_0\}$. Soit T_0 l'espace tangent à B en b_0 (resp. au sens de ZARISKI). Nous introduisons les faisceaux suivants sur V_0 :

Θ_0 : faisceau des germes de champs verticaux holomorphes sur V_0 ;

Π_0 : faisceau des germes de champs localement projetables holomorphes sur V_0 ;

Λ_0 : faisceau $\pi^* T_0$, i. e. faisceau des germes d'applications localement constantes de V_0 dans T_0 .

On a une suite exacte de faisceaux sur V_0 :

$$0 \rightarrow \Theta_0 \rightarrow \Pi_0 \rightarrow \Lambda_0 \rightarrow 0$$

qui donne naissance à la suite exacte de cohomologie

$$\dots \rightarrow H^\bullet(V_0 ; \Pi_0) \rightarrow H^0(V_0 ; \Lambda_0) \xrightarrow{\delta} H^1(V_0 ; \Theta_0) \rightarrow \dots$$

D'autre part, on a une application canonique

$$\iota : T_0 \rightarrow H^0(V_0 ; \Lambda_0) ,$$

qui est injective si V_0 est non vide, et surjective si V_0 est connexe.

DÉFINITION. - L'application de Spencer-Kodaira est la composée

$$\delta \circ \iota : T_0 \rightarrow H^1(V_0 ; \Theta_0) .$$

Cette application est un outil essentiel pour l'étude locale des déformations de variétés $\mathbb{C}$ -analytiques. Remarquons que Θ_0 n'est autre que le faisceau des germes de champs holomorphes de vecteurs tangents à V_0 , donc ne dépend que de V_0 , tandis que T_0 ne dépend que de la base. D'autre part, Θ_0 est un faisceau analytique cohérent sur V_0 , et si V_0 est compacte, $H^1(V_0 ; \Theta_0)$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ ([1]). On voit donc que dans ce cas, qui est le seul où on puisse dire quelque chose de non trivial, ρ_0 pourra être accessible au calcul.

Il est clair que, si la variété mixte donnée est triviale, i. e. $V = B \times V_0$, Π étant la projection sur B , l'application ρ_0 est nulle. Le prochain exposé a pour but de montrer que, dans une certaine mesure, ρ_0 indique la non-trivialité de V au voisinage de V_0 .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CARTAN (Henri). - Un théorème de finitude, Séminaire H. Cartan, t. 6, 1953/54 : Variétés analytiques complexes et fonctions automorphes, n° 17, 11 p.
- [2] KODAIRA (K.) and SPENCER (D.). - On deformation of complex analytic structures, I., Annals of Math., Series 2, t. 67, 1958, p. 328-401.