Michel Zisman

Cohomologie des variétés de Stiefel

Séminaire Henri Cartan, tome 12, nº 1 (1959-1960), exp. nº 3, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1959-1960__12_1_A3_0>

23 novembre 1959

COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS DE STIEFEL

par Michel ZISMAN

Dans l'exposé 2, on a donné des théorèmes généraux sur la structure de l'algèbre de cohomologie d'un groupe de Lie compact. L'exposé 3 a pour but d'expliciter dans la mesure du possible, la cohomologie des groupes $U(n)$, $SO(n)$ et $Sp(n)$, vérifiant ainsi de visu les résultats précités. Les deux exposés sont donc indépendants. Plus généralement, on va expliciter la cohomologie des variétés de Stiefel, dont les groupes en question ne sont que des cas particuliers.

1. Variétés de Stiefel.

(Par convention on pose $U(0) = SO(0) = Sp(0) = SU(0) = \{1\}$).

(1,1) DÉFINITION. - On désigne par $\underset{\sim}{R}$ le corps des nombres réels, par $\underset{\sim}{C}$ celui des complexes et par $\underset{\sim}{K}$ celui des quaternions. On pose, pour $1 \leq q \leq n$,

$$V_{n,q}(\underset{\sim}{C}) = U(n)/U(n-q) \ , \quad V_{n,q}(\underset{\sim}{K}) = Sp(n)/Sp(n-q) \ , \quad V_{n,q}(\underset{\sim}{R}) = O(n)/O(n-q) \ ;$$

ces variétés sont appelées respectivement variétés de Stiefel complexes, quaternioniennes, réelles.

En particulier, on a

$$V_{n,n}(\underset{\sim}{C}) = U(n) \ , \quad V_{n,n-1}(\underset{\sim}{C}) = SU(n) \ , \quad V_{n,1}(\underset{\sim}{C}) = S_{2n-1}$$

$$V_{n,n}(\underset{\sim}{K}) = Sp(n) \ , \quad V_{n,1}(K) = S_{4n-1}$$

$$V_{n,n}(\underset{\sim}{R}) = O(n) \ , \quad V_{n,n-1}(\underset{\sim}{R}) = SO(n) \ , \quad V_{n,1}(\underset{\sim}{R}) = S_{n-1} \ , \quad V_{n,q}(\underset{\sim}{R}) = SO(n)/SO(q)$$

si $q < n$. Géométriquement, les variétés de Stiefel s'interprètent comme les variétés des suites de q vecteurs orthonormés dans les espaces $\underset{\sim}{C}^n$, $\underset{\sim}{K}^n$ ou $\underset{\sim}{R}^n$.

RAPPEL sur les suites spectrales (cf. [4] et [5]). - Si (F , X , B) est un fibré, il existe une suite spectrale d'algèbres dont le terme $E_2^{p,q}$ est égal à $H^p(B , \mathcal{H}^q(F , \Lambda))$ où Λ désigne un anneau commutatif de coefficients, et $\mathcal{H}^q(F , \Lambda)$ le système de coefficients locaux (sur la base) définie par le fibré et la cohomologie $H^q(F , \Lambda)$ de la fibre. Les espaces vectoriels E_2 , ... , E_r , ... , E_∞ sont des Λ-algèbres anticommutatives et associatives, les différentielles $d_r : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$ des antidérivations pour le degré total $p + q$.

On note J^p l'espace des éléments de filtration p de $H^*(X, \Lambda)$, $J^{p,q} = J^p \cap H^{p+q}(X, \Lambda)$, si bien que $E_\infty^{p,q} = J^{p,q}/J^{p+1,q-1}$ et que

(1,2) $$0 = J^{-1,n+1} \subset J^{o,n} \subset J^{p,n-p} \subset J^{n,o} = H^n(X, \Lambda) .$$

(1,3) LEMME. - Soit A une Λ-algèbre graduée anticommutative ; supposons donnée sur A une filtration décroissante par des sous-modules gradués J^k tels que $J^k . J^{k'} \subset J^{k+k'}$, et soit GA l'algèbre bigraduée associée :

$$(GA)^{k,h} = J^k(A^{k+h})/J^{k+1}(A^{k+h}) .$$

(a) Supposons que GA soit une algèbre extérieure engendrée par des éléments bihomogènes de degré total impair ; alors A est une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degré impair, dans chacun des cas suivants : $\Lambda = Z$; $\Lambda = Z_p$ (p premier impair).

(b) Supposons $\Lambda = Z_2$, et que GA admette un système simple de générateurs bihomogènes $x_1, \ldots, x_n$ (ce qui signifie que tous les monômes $\prod_i (x_i)^{\varepsilon_i}$, où $\varepsilon_i = 0$ ou 1, forment une Z_2-base de A). Alors A admet un système simple de générateurs homogènes.

La démonstration est laissée au lecteur : on relève chaque générateur de GA en un élément de A, et on regarde.

REMARQUE. - La conclusion de (a) subsiste si GA est une algèbre extérieure dont les générateurs de degré pair q sont tels que GA soit nulle en degré $2q$.

(1,4) Rappelons encore que le système local des $\mathcal{H}^q(F, \Lambda)$ est constant au-dessus de B dans chacun des suivants : si $\pi_1(B) = 0$, ou si le fibré est un fibré principal de groupe structural connexe, ou si c'est la quotient d'un fibré principal de groupe connexe G par un sous-groupe fermé $H \subset G$; cette dernière hypothèse sera toujours vérifiée dans ce qui suit. De plus, lorsque l'un des modules gradués $H^*(B, \Lambda)$ et $H^*(F, \Lambda)$ est libre, avec une base finie dans chaque degré, alors

(1,5) $$E_2 = H^*(B, \Lambda) \otimes_\Lambda H^*(F, \Lambda) .$$

2. Variétés de Stiefel complexes et quaternioniennes.

(2,1) THÉORÈME. - $V_{n,n-q}(\underset{\sim}{C})$ et $V_{n,n-q}(\underset{\sim}{K})$ sont sans torsion.
$H^*(V_{n,n-q}(\underset{\sim}{C}) ; \underset{\sim}{Z})$ est isomorphe à une algèbre extérieure engendrée par des éléments x_{2i-1} de degrés $2i - 1$, i prenant une fois chaque valeur entière $> q$ et $\leq n$;

$H^*(V_{n,n-q}(\underset{\sim}{F})\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ <u>est isomorphe à une algèbre extérieure engendrée par des éléments</u> x_{4i-1} <u>de degrés</u> $4i-1$, <u>avec</u> $q < i \leq n$.

DÉMONSTRATION. - Occupons-nous d'abord de $V_{n,n-q}(\underset{\sim}{C})$. Le théorème est vrai pour $q = n-1$, puisque $V_{n,1}(\underset{\sim}{C}) = S_{2n-1}$; supposons-le vrai pour $V_{n,n-q-1}(\underset{\sim}{C})$, et considérons le fibré $(S_{2q+1}\ ,\ V_{n,n-q}\ ,\ V_{n,n-q-1})$; l'hypothèse de récurrence entraîne que $V_{n,n-q-1}$ est libre de base finie, et par conséquent, le terme E_2 de la suite spectrale du fibré s'écrit

$$E_2 = H^*(V_{n,n-q-1}\ ;\ \underset{\sim}{Z}) \otimes_{\underset{\sim}{Z}} H^*(S_{2q+1}\ ;\ \underset{\sim}{Z}) \quad .$$

$E_2^{p,p'}$, et par conséquent $E_r^{p,p'}$, est nul pour $p' \neq 0$, $2q+1$, puisque la cohomologie de la fibre est nulle pour les degrés $\neq 0$, $2q+1$.

Comme d_r envoie $E_r^{p,p'}$ dans $E_r^{p+r,p'-r+1}$, on en déduit que $d_r = 0$ pour $r < 2q+2$ et pour $r > 2q+2$. On a donc

$$E_2 = \ldots = E_{2q+2}\ ,\quad E_{2q+3} = E_\infty \quad .$$

Mais $d_{2q+2}\ :\ E_{2q+2}^{o,2q+1} \longrightarrow E_{2q+2}^{2q+2,o} = E_2^{2q+2,o} = 0$, puisque d'après l'hypothèse de récurrence, le générateur de plus petit degré de $H^*(V_{n,n-q-1}\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ est de degré $2q+3$. Comme

$$d_{2q+2}\ :\ E_{2q+2}^{p,o} \longrightarrow E_{2q+2}^{p+2q+2,-(2q+1)} = 0 \quad ,$$

on voit que d_{2q+2} est toujours nul, car cette différentielle est une antidérivation, et que

$$E_{2q+2}^{p,p'} = E_{2q+2}^{p,o} \otimes E_{2q+2}^{o,p'} \quad .$$

Finalement $E_2 = E_\infty$. On conclut à l'aide de (1,3),b.
Démonstration analogue pour $V_{n,n-q}(\underset{\sim}{F})$.

REMARQUE. - En faisant $q = 0$, on obtient l'algèbre de cohomologie de $U(n)$ et $Sp(n)$; en faisant $q = 1$ (dans le cas complexe), on obtient l'algèbre de cohomologie de $SU(n)$.

(2,2) THÉORÈME. - <u>Soit</u> x_{2i+1} <u>un générateur de</u> $H^{2i+1}(V_{n,n-i}(\underset{\sim}{C})\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ $(i = 0\ ,\ 1\ ,\ \ldots\ ,\ n-1)$, <u>et</u> $p_{n-i}\ :\ U(n) \longrightarrow V_{n,n-i}$ <u>l'application canonique</u>. <u>Alors les</u> $p_{n-i}^*(x_{2i+1})$ <u>forment un système de générateurs de</u> $H^*(U(n)\ ;\ \underset{\sim}{Z})$.

DÉMONSTRATION. - On considère l'application canonique

$$p_{r,r+s}\ :\ V_{n,r+s} \longrightarrow V_{n,r} \quad ;$$

on définit ainsi une fibration de fibre $V_{n-r,s}$. L'algèbre spectrale de cette fibration est triviale d'après (2,1) (on le voit en calculant les différentielles successives sur les générateurs, et en utilisant le fait que ces différentielles sont des antidérivations). Il en résulte alors ceci : $E_2 = E_\infty$, $p^*_{r,r+s}$ est biunivoque, j^* est surjectif (où j désigne l'injection de la fibre dans l'espace total), le noyau de j^* étant l'idéal engendré par l'image de $p^*_{r,r+s}$ (on utilise pour démontrer ce qui précède les homomorphismes de "coins", cf. l'exposé précité de DOUADY). Soient alors $y_1, \dots, y_k$, resp. $y_{k+1}, \dots, y_t$ les générateurs de $H^*(V_{n,r}\ ;\ \underset{\sim}{Z}) \otimes 1$, resp. $1 \otimes H(V_{n-r,s}\ ;\ \underset{\sim}{Z})$; relevons les y_i $(k+1 \leqslant i \leqslant t)$ en des éléments $x_i \in H^*(V_{n,r+s}\ ;\ \underset{\sim}{Z})$, et, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, prenons $x_i = p^*_{r,r+s}(y_i)$. On obtient un système de générateurs de $H^*(V_{n,r+s}\ ;\ \underset{\sim}{Z})$. D'ou le théorème, puisque

$$p_{q,q+r} = p_{q,q+1} \circ p_{q+1,q+2} \circ \dots \circ p_{q+r-1,q+r}$$

et

$$p_r = p_{r,r+s} \circ p_{r+s} .$$

3. Cohomologie des variétés de Stiefel réelles.

Désormais on écrit simplement $V_{n,q}$ au lieu de $V_{n,q}(\underset{\sim}{R})$. On se propose de démontrer les théorèmes suivants :

(3,1) THÉORÈME. - Dans l'algèbre de cohomologie $H^*(V_{n,q}\ ;\ \underset{\sim}{Z})$, l'idéal de torsion se compose d'éléments d'ordre 2 ; le quotient

$$\bar{H}^*(V_{n,q}) = H^*(V_{n,q}\ ;\ \underset{\sim}{Z})/\mathrm{Tors}\ H^*(V_{n,q}\ ;\ \underset{\sim}{Z})$$

est une algèbre extérieure (sur Z) engendrée par des générateurs x_{4i-1} de degrés $4i - 1$ (où i parcourt l'ensemble des entiers tels que $(n-q)/2 < i < n/2$), auxquels il faut encore ajouter un générateur x_{n-1} de degré $n-1$ si n est pair, et un générateur x_{n-q} de degré $n-q$ si $n-q$ est pair. (Ceci fait en tout $\frac{q+1}{2}$ générateurs si q est impair, et sinon $\frac{q}{2} + 1$ ou $\frac{q}{2}$, suivant que n est pair ou impair).

(3,2) THÉORÈME. - L'algèbre de cohomologie $H^*(V_{n,q}\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2)$ possède un système simple de générateurs v_i, où i parcourt l'ensemble des entiers tels que

$$n - q \leqslant i < n .$$

Considérons d'abord le cas où $q = 2$ (le cas où $q = 1$ est résolu, puisque $H^*(V_{n,1}\ ;\ \underset{\sim}{Z}) = H^*(S_{n-1}\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ est connu ; et les théorèmes (3,1) et (3,2) sont bien exacts).

(3,3) PROPOSITION. - Si n est pair $(n \geqslant 4)$, $H^*(V_{n,2} ; \mathbb{Z})$ est une algèbre extérieure engendrée par deux générateurs x_{n-1} et x_{n-2}.

Si n est impair, le sous-groupe de torsion de $H^*(V_{n,2} ; \mathbb{Z})$ se réduit à $H^{n-1} \approx Z_2$; et $\bar{H}^*(V_{n,2})$ est une algèbre extérieure engendrée par un élément de degré $2n-3$. Dans tous les cas, $H^*(V_{n,2} ; \mathbb{Z}_2)$ est une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degrés $n-1$ et $n-2$.

DÉMONSTRATION. - On considère le fibré $V_{n,2} \longrightarrow S_{n-1}$ de fibre S_{n-2}. Si n est pair, ce fibré admet une section, donc les différentielles de la suite spectrale (à coefficients entiers) sont nulles ; il s'ensuit que $E_\infty = E_2 = H^*(S_{n-1}) \otimes H^*(S_{n-2})$, d'où la conclusion grâce à (1,3), a. et à la remarque qui le suit.

Reste le cas où n est impair. Admettons le lemme suivant (qui sera démontré en appendice) :

(3,4) LEMME. - Lorsque n est impair, on a

$$\pi_i(V_{n,2}) = 0 \quad \text{pour} \quad i < n-2 \, , \quad \pi_{n-2}(V_{n,2}) = Z_2 \quad .$$

Cela signifie que, dans la suite exacte d'homotopie du fibré, l'application $\pi_{n-1}(S_{n-1}) \longrightarrow \pi_{n-2}(S_{n-2})$ envoie le générateur du premier groupe sur le double du générateur du second (au signe près). Il s'ensuit que dans la suite spectrale à coefficients entiers, la seule différentielle non nulle est d_{n-1}, qui envoie

$$E_{n-1}^{o,n-2} = E_2^{o,n-2} = H^{n-2}(S_{n-2})$$

dans

$$E_{n-1}^{n-1,o} = E_2^{n-1,o} = H^{n-1}(S_{n-1}) \quad ,$$

l'image se composant des éléments de $E_{n-1}^{n-1,o}$ divisibles par 2. Si on calcule avec coefficients dans Z_2 ; d_{n-1} est nulle ; donc E_∞ est une algèbre extérieure avec deux générateurs de degrés $n-2$ et $n-1$. Ceci achève la démonstration.

Ainsi les théorèmes (3,1) et (3,2) sont établis pour $q = 1$ et 2. On va considérer les deux fibrations

(3,5) $$S_{n-q} \longrightarrow V_{n,q} \longrightarrow V_{n,q-1} \qquad (q \geqslant 2) \quad ,$$

(3,6) $$V_{n-q+2,2} \longrightarrow V_{n,q} \longrightarrow V_{n,q-2} \qquad (q \geqslant 3) \quad .$$

Montrons d'abord la proposition suivante :

(3,7) PROPOSITION. - Avec coefficients dans Z_2, toutes les différentielles des suites spectrales des fibrations (3,5) et (3,6) sont nulles.

DÉMONSTRATION. - On a $H^i(V_{n,q}\ ; \mathbb{Z}_2) = 0$ pour $0 < i < n - q$; en effet, c'est vrai pour $q = 1$; la récurrence sur q se fait en utilisant la fibration (3,5) : par l'hypothèse de récurrence, le terme $E_2 = H^*(V_{n,q-1}\ ; \mathbb{Z}_2) \otimes H^*(S_{n-q}\ ; \mathbb{Z}_2)$ ne contient pas de termes de degré $< n - q$; il en est à fortiori de même de E_∞, donc de $H^*(V_{n,q}\ ; \mathbb{Z}_2)$.

On a $H^{n-q}(V_{n,q}\ ; \mathbb{Z}_2) = Z_2$: c'est vrai pour $q = 1$ et $q = 2$ (d'après (3,3)) ; et si $q \geqslant 3$, la fibration (3,6) donne un terme

$$E_2 = H^*(V_{n,q-2}\ ; \mathbb{Z}_2) \otimes \Lambda(x_{n-q+1}\ , x_{n-q}) \quad ,$$

où $\Lambda(x_{n-q+1}\ , x_{n-q})$ est une algèbre extérieure à 2 générateurs ; la différentielle d_{n-q+1} est nulle sur x_{n-q}, parce que $H^{n-q+1}(V_{n,q-2}\ ; \mathbb{Z}_2) = 0$ d'après ce qu'on a vu plus haut ; donc E_∞ a, en degré total $n - q$, une base formée d'un élément, ce qui démontre que $H^{n-q}(V_{n,q}\ ; \mathbb{Z}_2) = Z_2$.

Montrons que, pour $q \geqslant 2$, les différentielles de la suite spectrale de la fibration (3,5) sont nulles : en effet, la seule qui pourrait ne pas être nulle est d_{n-q+1} ; si elle n'était pas nulle, on aurait $H^{n-q}(V_{n,q}\ ; \mathbb{Z}_2) = 0$, contrairement à ce qui a été établi. Il s'ensuit que $E_2 \approx E_\infty$; puisque $H^{n-q+1}(V_{n,q-1}\ ; \mathbb{Z}_2) = Z_2$, on conclut que $H^{n-q+1}(V_{n,q}\ ; \mathbb{Z}_2) = Z_2$.

Enfin, pour $q \geqslant 3$, les différentielles de la suite spectrale de la fibration (3,6) sont nulles : on l'a déjà vu pour d_{n-q+1}, et il suffit de vérifier que $d_{n-q+2} = 0$. Or si c'était $\neq 0$, il n'y aurait pas de terme de degré $n - q + 1$ dans E_∞, donc dans $H^*(V_{n,q}\ ; \mathbb{Z}_2)$, contrairement à ce qu'on vient de voir.

DÉMONSTRATION du théorème (3,2). - Il est vrai pour $q = 1$. Si $q \geqslant 2$, on fait une récurrence sur q, en utilisant la fibration (3,5), dont la suite spectrale (à coefficients Z_2) a ses différentielles nulles (d'après (3,7)). Le théorème (3,2) s'ensuit aussitôt, compte tenu de (1,3), b.

On peut compléter le théorème (3,2) comme suit :

(3,8) THÉORÈME. - <u>Soit, pour chaque</u> i, $(0 \leq i < n)$, <u>un générateur</u> x_i <u>de</u> $H^i(V_{n,n-i}\ ; \mathbb{Z}_2)$; <u>et soit</u>

$$p_i : O(n) \longrightarrow V_{n,n-i}$$

<u>l'application canonique. Alors les</u> $p_i^*(x_i)$ <u>forment un système simple de générateurs de</u> $H^*(O(n)\ ; Z_2)$.

Démonstration analogue à celle de (2,2). Il y a un énoncé semblable pour $H^*(SO(n)\ ; Z_2)$.

Il reste à démontrer le théorème (3,1). Dans ce but, on va d'abord montrer la proposition suivante :

(3,9) PROPOSITION. - Avec coefficients dans le corps Z_0 des rationnels, toutes les différentielles de la suite spectrale de (3,5) sont nulles si $n - q$ est pair ; toutes les différentielles de la suite spectrale de (3,6) sont nulles si $n - q$ est impair.

La démonstration est toute semblable à celle de (3,7), et est laissée au lecteur. Bien entendu, il faut d'abord observer que (3,9) est vrai pour $q = 2$, en vertu de la proposition (3,3).

DÉMONSTRATION du théorème (3,1). - Il est vrai pour $q = 1$ et pour $q = 2$ (cf. (3,3)). On va le prouver par récurrence sur q, en utilisant la fibration (3,5) si $n - q$ est pair, et la fibration (3,6) si $n - q$ est impair. Dans chacune de ces fibrations, nous avons un fibré X de base B, de fibre F ; nous savons que $H^*(B\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ et $H^*(F\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ sont des groupes de type fini dont le sous-groupe de torsion se compose d'éléments d'ordre 2. Nous savons de plus que, dans la suite spectrale calculée avec coefficients dans Z_0 ou dans Z_2, toutes les différentielles sont nulles. La récurrence du théorème (3,1) va alors résulter de la proposition suivante.

(3,10) PROPOSITION. - Soit $(F\ ,\ X\ ,\ B)$ un fibré tel que (à coefficients entiers) le système local $\mathcal{H}^*(F)$ soit constant au-dessus de la base B. Supposons que $H^*(B\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ et $H^*(F\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ soient des groupes de type fini dont les éléments de torsion soient d'ordre 2, et que les différentielles de la suite spectrale soient nulles pour les coefficients Z_0 et pour les coefficients Z_2. Alors les différentielles de la suite spectrale sont nulles pour les coefficients entiers ; de plus, $H^*(X\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ est isomorphe (comme groupe abélien gradué) à $E_\infty = E_2$ (coefficients entiers), et ses éléments de torsion sont d'ordre 2 ; enfin, l'algèbre graduée associée à $\bar{H}^*(X) = H^*(X\ ;\ \underset{\sim}{Z})/\text{Tors}\ H^*(X\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ est sans torsion, et isomorphe à l'algèbre

$$E_\infty/\text{Tors}\ E_\infty \approx \bar{H}^*(B) \otimes \bar{H}^*(F) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Notons E_r (resp. ${}^2E_r$, resp. ${}^0E_r$) le r-ième terme de la suite spectrale du fibré, à coefficients dans Z (resp. dans Z_2, resp. dans Z_0) ; E_r (resp. $H^*(X\ ;\ \underset{\sim}{Z})$) est somme directe de m_r (resp. m) groupes cycliques infinis et d'un groupe fini d'ordre N_r (resp. d'ordre N). Il est clair que

(3,11) $$N \text{ divise } N_\infty \quad .$$

Puisque les différentielles de la suite spectrale à coefficients dans Z_0 sont nulles, on a

$$m_2 = m_r = m_\infty = m \quad .$$

La relation $m_r = m_{r+1}$ montre qu'un d_r-cocycle d'ordre infini de E_r n'est pas un cobord, donc d_r applique E_r dans Tors. E_r . Il s'ensuit que Tors. E_{r+1} s'identifie à la d_r-cohomologie de Tors. E_r , et par suite

$$(3,12) \qquad N_2 \geqslant N_r \geqslant N_\infty \quad .$$

L'égalité $N_2 = N_\infty$ signifiera que toutes les différentielles d_r de la suite spectrale (à coefficients entiers) sont nulles.

La formule de Künneth donne

$$(3,13) \qquad E_2 \approx H^*(B\ ;\ \underset{\sim}{Z}) \otimes H^*(F\ ;\ \underset{\sim}{Z}) \oplus \mathrm{Tor}(H^*(B\ ;\ \underset{\sim}{Z})\ ,\ H^*(F\ ;\ \underset{\sim}{Z})) \quad ;$$

elle montre que les éléments de Tors E_2 sont d'ordre 2 ; il s'ensuit, par récurrence sur r , que les éléments de Tors E_r sont d'ordre 2 , et ceci est donc vrai aussi pour Tors E_∞ .
D'après (3,11), N est une puissance de 2 ; donc Tors $H^*(X\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ est somme directe de groupes cycliques d'ordres 2^i $(i = 1\ ,\ \dots\ ,\ n)$, avec $N = 2^{\Sigma i}$.

D'après la formule des coefficients universels, $H^*(X\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2)$ est somme directe de $m + 2n$ groupes cycliques d'ordre 2 ; il en est de même de son gradué associé ${}^2E_\infty$. Puisque toutes les différentielles de la suite spectrale à coefficients dans Z_2 sont nulles par hypothèse, le terme ${}^2E_2$ est aussi somme directe de $m + 2n$ groupes Z_2 . Or on a

$$ {}^2E_2 = H^*(B\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2) \otimes H^*(F\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2) = H^*(B \times F\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2) \quad ,$$

tandis que, d'après (3,13), E_2 est isomorphe (non canoniquement) à $H^*(B \times F\ ;\ \underset{\sim}{Z})$. Le passage de E_2 à ${}^2E_2$ peut donc se faire par la formule des coefficients universels ; d'une façon précise, soit n_2 le nombre des groupes Z_2 dont Tors E_2 est la somme directe :

$$2^{n_2} = N_2 \quad ;$$

alors ${}^2E_2$ est somme directe de $m_2 + 2n_2$ groupes Z_2 .

En comparant, on voit que $m + 2n = m_2 + 2n_2$, et puisque $m_2 = m$, on conclut $n_2 = n$. Or, d'après (3,12) et (3,11), on a

$$2^{n_2} \geqslant 2^{\Sigma i} \quad ,$$

donc $n_2 \geqslant \Sigma i$; et puisque n_2 est égal au nombre n des entiers i , il s'ensuit que tous les entiers i sont égaux à 1, et que $N = N_\infty = N_2$.

Ainsi $\operatorname{Tors} H^*(X ; \mathbb{Z})$ est somme directe de n groupes cycliques d'ordre 2 ; et puisque $N_2 = N_\infty$, les différentielles d_r de la suite spectrale à coefficients entiers sont nulles. Il est évident que $H^*(X ; \mathbb{Z})$ est additivement isomorphe à E_2 (puisque chacun d'eux est somme directe de m groupes cycliques infinis et de n groupes cycliques d'ordre 2). Le fait que $N = N_\infty$ implique que le gradué associé à $\bar{H}^*(X)$ est sans torsion ; il est alors immédiat qu'il est canoniquement isomorphe à $E_\infty / \operatorname{Tors} E_\infty$, et que cet isomorphisme est un isomorphisme d'algèbres graduées.

(3,14) COROLLAIRE. - Sous les hypothèses de la proposition (3,10), supposons que $\bar{H}^*(B) \otimes \bar{H}^*(F)$ soit une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degrés impairs, sauf un au plus de degré pair q, et que, dans ce dernier cas, $\bar{H}^*(B) \otimes \bar{H}^*(F)$ soit nulle en degré $2q$. Alors $\bar{H}^*(X ; \mathbb{Z})$ est une algèbre extérieure (sur l'anneau $\mathbb{Z}$) isomorphe à $\bar{H}^*(B) \otimes \bar{H}^*(F)$.

C'est une conséquence immédiate de la proposition (3,10) et de (1,3).

Nous pouvons enfin démontrer le théorème (3,1), par récurrence sur $q \geq 3$. Dans la fibration utilisée pour la récurrence ((3,5) si $n - q$ est pair, (3,6) si $n - q$ est impair), $\bar{H}^*(B)$ est une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degrés impairs, par l'hypothèse de récurrence ; et $\bar{H}^*(F)$ est une algèbre extérieure engendrée par un seul élément de degré pair $n - q$ (dans le cas (3,5)), resp. de degré impair $2n - 2q + 1$ (dans le cas (3,6)). Dans le premier cas, $2(n - q)$ est strictement plus petit que le plus petit degré des générateurs de $\bar{H}^*(B)$, sauf éventuellement le générateur de degré $n - 1$ si n est pair (mais alors, dans ce cas, $2(n - q) \neq n - 1$) ; donc $\bar{H}^*(B) \otimes \bar{H}^*(F)$ est bien nul en degré $2(n - q)$. Et ceci achève entièrement la démonstration.

4. Informations complémentaires sur la cohomologie des variétés de Stiefel réelles.

Le théorème (3,2) ne donne qu'en partie la structure d'algèbre de $H^*(V_{n,q} ; \mathbb{Z}_2)$. Pour achever de la déterminer, on doit expliciter la valeur du carré $(y_i)^2$ de chacun des générateurs y_i. Or, plus généralement, on peut expliciter les opérations de Steenrod Sq^j dans la cohomologie $H^*(V_{n,q} ; \mathbb{Z}_2)$:

(4,1) THÉORÈME. - Les Sq^j opèrent comme suit sur les générateurs y_i de $H^*(V_{n,q} ; \mathbb{Z}_2)$ (cf. théorème (3,2)) :

$$Sq^j \, y_i = (i - j \, , \, j) \, y_{i+j} \quad ,$$

où $(i - j\ , j)$ désigne le coefficient binomial, en convenant que $y_{i+j} = 0$ si $i + j \geqslant n$.

(4,2) COROLLAIRE. - $(y_i)^2 = y_{2i}$ si $2i < n$, $(y_i)^2 = 0$ si $2i \geqslant n$. Les y_i relatifs aux entiers i $(n - q \leqslant i < n)$ tels que $i/2$ ne soit pas entier et $\geqslant n - q$, forment un système minimal de générateurs de $H^*(V_{n,q}\ ; Z_2)$, et ils sont astreints aux seules relations

$$(y_i)^{s_i} = 0 \quad ,$$

s_i désignant la plus petite puissance de 2 telle que $is_i \geqslant n$.

Nous ne démontrerons pas ici le théorème (4,1), qui fait notamment appel à la notion d'élément "universellement transgressif" (voir [2], théorème 9,1). Il suffit de faire la démonstration dans le cas de $SO(n) = V_{n,n-1}$; on utilise pour cela la cohomologie mod 2 de l'espace classifiant de $SO(n)$, qui est une algèbre de polynômes dans laquelle on connaît les Sq^j .

Donnons encore un complément :

(4,3) THÉORÈME. - Au point de vue additif, $V_{n,q}$ a même cohomologie (à coefficients dans Z) qu'un produit de variétés de Stiefel $V_{i,2}$ (où i parcourt l'ensemble des entiers impairs tels que $n - q + 2 \leqslant i \leqslant n$), d'une sphère S_{n-1} (si n est pair) et d'une sphère S_{n-q} (si $n - q$ est pair).

La démonstration se fait par récurrence sur q , en utilisant la fibration (3,5) si $n - q$ est pair, la fibration (3,6) si $n - q$ est impair ; la cohomologie du fibré est additivement isomorphe à la cohomologie du produit de la base par la fibre (proposition 3,9), d'où le résultat. Il faut bien entendu vérifier que le théorème est exact pour $q = 1$ et $q = 2$.

APPENDICE

DÉMONSTRATION du lemme. - Si n est pair, on a :

(a) $\pi_i(V_{n+1,2}) = 0$, $i < n - 1$;

(b) $\pi_{n-1}(V_{n+1,2}) = Z_2$.

On considère le fibré

$$S_{n-1} \longrightarrow V_{n+1,2} \xrightarrow{p} S_n$$

et sa suite exacte d'homotopie. Alors (a) est immédiat. Pour prouver (b), tout revient à montrer que l'homomorphisme

$$\partial : \pi_n(S_n) \longrightarrow \pi_{n-1}(S_{n-1})$$

de la suite exacte envoie le générateur du premier groupe sur ± 2 fois le générateur du second.

Or $V_{n+1,2}$ s'identifie à l'espace des directions de vecteurs tangents $\neq 0$ à S_n, l'application p étant celle qui, à chaque vecteur tangent, associe son origine ; S_{n-1} s'identifie à l'espace des directions de vecteurs tangents au point base P de S_n. D'après la définition de l'homomorphisme ∂, on l'obtient comme suit : soit $f : (B_n, S_{n-1}) \longrightarrow (S_n, P)$ l'application qui identifie S_n à un quotient de B_n ; relevons f en une application g qui envoie B_n dans $V_{n+1,2}$, et envoie donc S_{n-1} dans la fibre S_{n-1} du point P : alors $g|S_{n-1}$ définit l'élément cherché $\alpha \in \pi_{n-1}(S_{n-1})$. Pour obtenir un tel relèvement, faisons une projection stéréographique de pôle P sur un plan R^n ; la transformation réciproque est un homéomorphisme de R^n sur $S_n - P$; un champ constant de vecteurs tangents $\neq 0$ dans R^n est transformé en un champ de vecteurs $\neq 0$ de $S_n - P$, et lorsqu'un point $M \in S_n - P$ tend vers P, la longueur du vecteur du champ tend vers 0 ; de plus, la direction de ce vecteur a une limite quand M tend vers P suivant une courbe ayant une tangente au point P. Il en résulte que l'élément $\alpha \in \pi_{n-1}(S_{n-1})$ est, au signe près, le produit du générateur de $\pi_{n-1}(S_{n-1})$ par l'indice (au point P) du champ de vecteurs obtenu sur S_n. Puisque P est l'unique zéro du champ de vecteurs, cet indice est égal à la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(S_n)$ (cf. HOPF-ALEXANDROFF, [1], chapitre XIV, Satz 1, p. 549). Comme bien connu, $\chi(S_n) = 1 + (-1)^n$ est égal à 2 si n est pair, ce qui achève la démonstration. Si on désire éviter de se référer au théorème liant l'indice à $\chi(S_n)$, il suffit de faire un calcul explicite du champ de vecteurs.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ALEXANDROFF (Paul) und HOPF (Heinz). - Topologie. - Berlin, J. Springer, 1935.

[2] BOREL (Armand). - La cohomologie mod 2 de certaines espèces homogènes, Comment. Math. Helvet., t. 27, 1953, p. 165-197.

[3] BOREL (Armand). - Topology of Lie groups and characteristic classes, Bull. Amer. math. Soc., t. 61, 1955, p. 397-432.

[4] DOUADY (Adrien). - La suite spectrale des espaces fibrés, Séminaire Cartan, t. 11, 1958/59 : Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires, n° 2.

[5] DOUADY (Adrien). - Applications de la suite spectrale des espaces fibrés, Séminaire Cartan, t. 11, 1958/59 : Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires, n° 3.

[6] MILLER (Carman E.). - The topology of rotation groups, Annals of Math., t. 57, 1953, p. 95-110.