

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

HENRI CARTAN

Une suite spectrale. Application à l'algèbre de Steenrod pour $p = 2$

Séminaire Henri Cartan, tome 11, n° 2 (1958-1959), exp. n° 16, p. 1-23

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_2_A7_0>

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE SUITE SPECTRALE.
APPLICATION À L'ALGÈBRE DE STEENROD POUR $p = 2$
par Henri CARTAN

On se propose d'expliciter, jusqu'à un certain point, l'algèbre de cohomologie $H^*(A)$ lorsque A est l'algèbre de Steenrod S^* pour $p = 2$ (cf. [1], [2]). Pour la définition de $H^*(A)$, voir l'exposé 15, paragraphe 2. Cette explication utilise une suite spectrale, ce qui nous conduit à développer d'abord quelques préliminaires théoriques (paragraphe 1 et 2).

Dans cet exposé, K désigne toujours un corps commutatif, et les algèbres considérées sont des K -algèbres graduées associatives, localement finies, avec élément unité 1 de degré 0, et munies d'une augmentation ε . Tous les homomorphismes d'algèbres seront unitaires et respecteront la graduation et l'augmentation.

1. Suite spectrale définie par la donnée d'une sous-algèbre.

Soit C une algèbre graduée, et A une sous-algèbre graduée de C . On va associer fonctoriellement au couple (C, A) une suite spectrale d'algèbres $E_r(C, A)$ (les différentielles d_r étant des différentielles d'algèbres), dont le terme E_∞ est l'algèbre graduée associée à l'algèbre $H^*(C) = \text{Ext}_C(K, K)$ convenablement filtrée.

Rappelons (cf. exposé 15, paragraphe 4) que $H^*(C)$ est l'algèbre de cohomologie de l'algèbre tensorielle $T^*(I(C_*))$, munie de la différentielle δ définie par l'application diagonale $I(C_*) \rightarrow I(C_*) \otimes I(C_*)$ de la coalgèbre C_* . De plus, la graduation de $I(C_*)$ définit sur l'algèbre $T^*(I(C_*))$ une graduation distincte de la "graduation tensorielle" (cette dernière donne le degré q au sous-espace $T^q(I(C_*))$); nous l'appellerons la graduation propre de $T^*(I(C_*))$; elle est compatible avec la graduation tensorielle, et la différentielle conserve la graduation propre. On obtient donc sur $H^*(C)$ une graduation propre; on notera $H^{q,t}(C)$ le sous-espace de $H^q(C)$ formé des éléments de degré propre t . Rappelons que la graduation propre est ≤ 0 .

Ceci dit, définissons une filtration décroissante de $T^*(I(C_*))$ comme suit : $F^p T^*(I(C_*))$ est le sous-espace engendré par les $u_1 \otimes \dots \otimes u_n$ tels que p au

moins des u_i aient une image nulle dans $I(A_*)$ (par l'application naturelle $I(C_*) \rightarrow I(A_*)$ définie par l'inclusion $A \rightarrow C$). Il est immédiat que $F^p T^*(I(C_*))$ est stable pour la différentielle δ , et que le produit d'un élément de F^p et d'un élément de F^q est dans F^{p+q} . Cette filtration définit donc une suite spectrale d'algèbres différentielles $E_r(C, A) = \sum_{p,q} E_r^{p,q}(C, A)$, p désignant le degré filtrant ; le terme $E_\infty(C, A)$ est l'algèbre graduée associée à l'algèbre $H^*(C)$, filtrée par les images des algèbres de cohomologie $H^*(F^p T^*(I(C_*)))$. Comme la filtration est compatible avec la graduation propre, chaque E_r possède une graduation propre, compatible avec la graduation filtrante et la "graduation totale"; les différentielles d_r conservent la graduation propre. L'isomorphisme de E_∞ avec le gradué associé à $H^*(C)$ est compatible avec les graduations propres.

La suite spectrale précédente est fonctorielle : si on a un homomorphisme $C \rightarrow C'$ qui envoie la sous-algèbre A de C dans la sous-algèbre A' de C' , on a un homomorphisme de la suite spectrale des $E_r(C', A')$ dans celle des $E_r(C, A)$, qui aboutit à l'homomorphisme fonctoriel $H^*(C') \rightarrow H^*(C)$.

Considérons un cas particulier, celui où $A = K$. Il est immédiat que $F^p T^*(I(C_*)) = \sum_{q \geq p} T^q(I(C_*))$, d'où $E_0^p = T^p(I(C_*))$, la différentielle d_0 étant nulle. Ainsi $E_1 = T^*(I(C_*))$, la différentielle d_1 étant δ , d'où $E_2 = H^*(C)$. Toutes les différentielles d_r sont nulles pour $r \geq 2$. On trouve sur l'algèbre $H^*(C)$ une filtration (dite "filtration naturelle") pour laquelle l'algèbre graduée associée est canoniquement isomorphe à $H^*(C)$.

Revenons au cas général. Soit $C.I(A)$ l'idéal à gauche de C engendré par $I(A)$, et soit B le quotient $C/C.I(A)$. Considérons l'application linéaire

$$\varphi^p : T^*(I(C_*)) \otimes T^p(I(B_*)) \rightarrow F^p T^*(I(C_*))$$

qui envoie $x \otimes y$ dans $x \otimes i(y)$, i désignant l'injection définie par l'application $I(B_*) \rightarrow I(C_*)$, obtenue par transposition de la surjection naturelle $C \rightarrow B$. En composant φ^p et l'application naturelle

$$F^p T^*(I(C_*)) \rightarrow F^p T^*(I(C_*))/F^{p+1} T^*(I(C_*)) = E_0^p(C, A),$$

on obtient une application ψ^p qui passe au quotient pour définir

$$\psi^p : T^*(I(A_*)) \otimes T^p(I(B_*)) \rightarrow E_0^p(C, A).$$

En effet, considérons la surjection naturelle $T^*(I(C_*)) \rightarrow T^*(I(A_*))$, qui est

compatible avec les applications diagonales. Pour montrer que ψ^p passe au quotient, il suffit de faire voir que $\psi^p(x \otimes y) \in F^{p+1}$ chaque fois que x est de la forme $u_1 \otimes \dots \otimes u_n$, l'un au moins des u_i ayant une image nulle dans $I(A_*)$. Or ceci est évident.

On notera $\psi : T^*(I(A_*)) \otimes T^*(I(B_*)) \rightarrow E_0(C, A)$ l'application définie par les ψ^p .

THÉOREME 1. - Supposons que, comme A-module (à droite), C possède une base formée de 1 et d'éléments homogènes de $I(C)$ qui anticommulent avec les éléments de A. Ceci implique $I(A).C = C.I(A)$, et par suite B est munie d'une structure d'algèbre, quotient de l'algèbre C. Alors l'application ψ induit un isomorphisme

$$H^*(A) \otimes H^*(B) \approx E_2(C, A)$$

compatible avec les graduations propres. Plus précisément $H^q(A) \otimes H^p(B) \approx E_2^{p,q}(C, A)$. De plus, cet isomorphisme est compatible avec les structures d'algèbres, si on définit sur $H^*(A) \otimes H^*(B)$ la multiplication du produit tensoriel de deux algèbres bigraduées :

$$(x \otimes y).(x' \otimes y') = (-1)^{pq+tt'}(xx') \otimes (yy') ,$$

pour $y \in H^{p,t}(B)$ et $x' \in H^{q,t'}(A)$.

La démonstration sera un peu longue et délicate. Quant à l'énoncé, il appelle des observations : en effet, il est connu ([3], chapitre XVI, théorème 6.1) que, lorsque $C.I(A)$ est un idéal bilatère et que C est A-libre comme A-module à droite, on a une suite spectrale dont le terme E_2 est

$$E_2^{p,q} = \text{Ext}_B^p(K, \text{Ext}_A^q(K, K))$$

($\text{Ext}_A^q(K, K)$ est en effet un B-module à gauche), et dont le terme E_∞ est le gradué associé à $\text{Ext}_C(K, K)$ convenablement filtré. Il ne serait pas difficile de montrer que, sous l'hypothèse de l'énoncé, B opère trivialement dans $\text{Ext}_A(K, K) = H^*(A)$ (i. e. : un élément $b \in I(B)$ définit une opération nulle), d'où facilement

$$\text{Ext}_B^p(K, \text{Ext}_A^q(K, K)) \approx H^q(A) \otimes H^p(B) .$$

Mais, dans cette suite spectrale, il n'y a rien qui concerne la structure multiplicative, contrairement à ce qui a lieu pour celle du théorème 1. On ignore d'ailleurs si la suite spectrale de [3] est la même que celle du théorème 1 ; la question est de peu d'intérêt, vu que, pour les applications qu'on fera du théorème 1, on aura besoin

d'utiliser la définition explicite de la filtration de $T^*(I(C_*))$ qui conduit à la suite spectrale du théorème 1.

REMARQUE. - Un cas particulier de la situation du théorème 1 a déjà été envisagé dans l'exposé 15 (paragraphe 5) : c'est celui où C est le produit tensoriel $A \otimes B$ de deux algèbres graduées. Dans ce cas, non seulement E_2 est isomorphe à $H^*(A) \otimes H^*(B)$, mais l'algèbre $H^*(C)$ elle-même est canoniquement isomorphe à l'algèbre $H^*(A) \otimes H^*(B)$.

2. Démonstration du théorème 1.

Nous suivrons sensiblement la démonstration d'ADAMS, à cela près que le théorème énoncé par ADAMS ([2], théorème 2.3.1, p. 25) fait des hypothèses plus restrictives : on y suppose en effet que les éléments de A anticommulent avec ceux de C , ce qui implique notamment que A est anticommutative. Bien que cette situation soit la plus intéressante en vue des applications, nous préférons donner ici le théorème en toute généralité, de manière à couvrir en même temps le cas de la proposition 5 de l'exposé 15.

Pour prouver le théorème, on procédera en plusieurs étapes, en introduisant au fur et à mesure des hypothèses de plus en plus restrictives. Reprenons la situation générale où A est simplement supposée sous-algèbre de C , et où l'on définit $B = C/C.I(A)$. On établira successivement les résultats suivants :

PROPOSITION 1. - Si $C.I(A)$ est un idéal bilatère de C (ce qui implique que B est une algèbre quotient de C), alors l'application $\vee^P$ est compatible avec les opérateurs différentiels δ_0 et d_0 , en notant δ_0 l'opérateur différentiel de $T^*(I(A_*)) \otimes T^*(I(B_*))$ qui envoie $x \otimes y$ dans $(\delta x) \otimes y$ (δ désigne la différentielle de l'algèbre $T^*(I(A_*))$, définie par l'application diagonale $I(A_*) \rightarrow I(A_*) \otimes I(A_*)$).

PROPOSITION 2. - Si de plus C possède, comme A -module à droite, une base formée de 1 et d'éléments homogènes de $I(C)$, alors l'application $\vee^* : H^*(A) \otimes T^*(I(B_*)) \rightarrow E_1$ définie par $\vee$ est bijective.

PROPOSITION 3. - Supposons que C possède, comme A -module à droite, une base formée de 1 et d'éléments homogènes de $I(C)$ qui anticommulent avec les éléments de A . Alors :

(i) l'isomorphisme $\vee^*$ (proposition 2) est compatible avec les structures d'algèbres (si on définit sur $H^*(A) \otimes T^*(I(B_*))$ la structure d'algèbre, produit tensoriel

de deux algèbres bigraduées) ;

(ii) si on transporte à $H^*(A) \otimes T^*(I(B_*))$ la différentielle d_1 de E_1 au moyen de l'isomorphisme γ^* , on obtient l'opérateur δ_1 défini par

$$\delta_1(x \otimes y) = (-1)^q x \otimes (\delta y) \quad \text{pour } x \in H^q(A).$$

Donc γ^* induit un isomorphisme d'algèbres $H^*(A) \otimes H^*(B) \approx E_2$

On va prouver successivement ces trois propositions, ce qui entraînera le théorème 1.

DÉMONSTRATION de la proposition 1. - On va définir une filtration croissante sur $T_*(I(C))$. Soit $F_p T_*(I(C))$ le sous-espace engendré par les éléments $u_1 \otimes \dots \otimes u_n$ tels que $n - p$ au moins des u_i appartiennent à $I(A)$; F_p est stable pour l'opérateur différentiel

$$(1) \quad d(u_1 \otimes \dots \otimes u_n) = \sum_{1 \leq r \leq n} (-1)^r u_1 \otimes \dots \otimes (u_r \wedge u_{r+1}) \otimes \dots \otimes u_n.$$

Il est clair que $F^p T^*(I(C_*))$ s'identifie au dual de $T_*(I(C))/F_{p-1} T_*(I(C))$, δ étant transposée de d . De même, $E^p_0 = F^p/F^{p+1}$ s'identifie au dual de F_p/F_{p-1} . L'application

$$\gamma^p : T^*(I(A_*)) \otimes T^p(I(B_*)) \longrightarrow E^p_0$$

est transposée de l'application

$$\gamma_p : F_p/F_{p-1} \longrightarrow T_*(I(A)) \otimes T_p(I(B))$$

définie comme suit : considérons l'application

$$\psi_p : F_p \longrightarrow T_*(I(C)) \otimes T_p(I(B))$$

qui envoie $u_1 \otimes \dots \otimes u_n$ dans

$$u_1 \otimes \dots \otimes u_{n-p} \otimes (\pi u_{n-p+1}) \otimes \dots \otimes (\pi u_n).$$

Elle s'annule sur F_{p-1} et prend en fait ses valeurs dans le sous-espace $T_*(I(A)) \otimes T_p(I(B))$; ce qui définit γ_p .

Pour prouver la proposition 1, il suffit de montrer que γ_p est compatible avec l'opérateur d^0 de F_p/F_{p-1} et avec l'opérateur différentiel de $T_*(I(A)) \otimes T_p(I(B))$ qui envoie $x \otimes y$ dans $(dx) \otimes y$. Tout revient à vérifier

que si $u_{n-p} \in I(A)$ et $u_{n-p+1} \in I(C)$, alors $\pi(u_{n-p} u_{n-p+1}) = 0$. Or il en est ainsi, parce que, $C.I(A)$ étant par hypothèse un idéal bilatère, l'application π est multiplicative.

DÉMONSTRATION de la proposition 2. - Ne faisons d'abord aucune hypothèse de plus que dans la proposition 1. Considérons le complexe standard $S(C) = C \otimes T_*(I(C))$, qui est une résolution libre de K pour l'opérateur différentiel

$$d(u[u_1, \dots, u_n]) = u u_1 [u_2, \dots, u_n] + \sum_{1 \leq r < n} (-1)^r u [u_1, \dots, u_r u_{r+1}, \dots, u_n];$$

et rappelons que l'opérateur différentiel de $T_*(I(C))$ considéré ci-dessus est induit par celui de $S(C)$ quand on identifie $T_*(I(C))$ à $K \otimes_C S(C)$. La filtration de $T_*(I(C))$ définit une filtration de $S(C)$, en posant

$$F_p S(C) = C \otimes F_p T_*(I(C)).$$

$F_p S(C)$ est stable pour d ; et $F_p S(C)/F_{p-1} S(C)$ s'identifie à $C \otimes (F_p/F_{p-1})$, en écrivant F_p/F_{p-1} au lieu de $F_p T_*(I(C))/F_{p-1} T_*(I(C))$. Si on identifie F_p/F_{p-1} à $K \otimes_C (C \otimes (F_p/F_{p-1}))$, on obtient sur F_p/F_{p-1} l'opérateur différentiel considéré dans la démonstration de la proposition 1.

Notons X_p l'image de $A \otimes F_p$ dans $C \otimes (F_p/F_{p-1})$; X_p est stable pour la différentielle de $C \otimes (F_p/F_{p-1})$, car d envoie $A \otimes F_p$ dans $A \otimes F_p + C \otimes F_{p-1}$. Comme A -module à gauche, X_p s'identifie à $A \otimes (F_p/F_{p-1})$, ce qui permet d'identifier F_p/F_{p-1} (avec son opérateur différentiel) à $K \otimes_A X_p$, et, par dualité,

$$E_p^p = F^p/F^{p+1} \approx \text{Hom}_A^*(X_p, K),$$

la notation Hom^* ayant la même signification que dans l'exposé 15 (paragraphe 2). L'application γ^p devient alors l'application

$$(1) \quad \text{Hom}_A^*(S(A) \otimes T_p(I(B)), K) \longrightarrow \text{Hom}_A^*(X_p, K)$$

déduite de l'application A -linéaire

$$f_p : X_p \longrightarrow S(A) \otimes T_p(I(B))$$

qu'on obtient en tensorisant γ_p à gauche par A . Il est immédiat que f_p est compatible avec les opérateurs différentiels.

On doit montrer que, sous l'hypothèse de la proposition 2, l'application (1)

définit un isomorphisme des cohomologies. Comme X_p et $S(A) \otimes T_p(I(B))$ sont A -libres, il suffit donc (d'après un théorème classique d'Algèbre homologique) de montrer :

LEMME. - Sous les hypothèses de la proposition 2, l'application f_p définit un isomorphisme des homologies.

Soit $g_p : X_p \rightarrow T_p(I(B))$ la composée de f_p et de la projection $S(A) \otimes T_p(I(B)) \rightarrow T_p(I(B))$ définie par l'augmentation $S(A) \rightarrow K$. Cette projection définit un isomorphisme des homologies, puisque $S(A)$ est acyclique sur K ; donc il suffit de prouver que g_p définit un isomorphisme des homologies (l'opérateur différentiel de $T_p(I(B))$ étant d'ailleurs nul). Observons que g_p n'est autre que l'application fonctorielle $X_p(C) \rightarrow X_p(B)$ définie par la projection $C \rightarrow B$ (qui envoie A dans K).

L'opérateur d'homotopie s de $S(C)$, qui envoie $u[u_1, \dots, u_n]$ dans $[u, u_1, \dots, u_n]$, laisse stable

$$Y_p = A \otimes F_p + C \otimes F_{p-1} ,$$

qui est aussi stable pour d ; donc Y_p est acyclique sur K . L'application naturelle $A \otimes F_p \rightarrow A \otimes (F_p/F_{p-1}) = X_p$ induit une surjection $Y_p \rightarrow X_p$, compatible avec d , et dont le noyau est $C \otimes F_{p-1}$. Changeons p en $p+1$; dans la surjection $Y_{p+1} \rightarrow X_{p+1}$, il est clair que Y_p va dans 0 ; on a donc une suite exacte

$$(2) \quad 0 \rightarrow N_p \rightarrow Y_{p+1}/Y_p \rightarrow X_{p+1} \rightarrow 0 ,$$

où le noyau N_p est l'image de $C \otimes F_p$ dans Y_{p+1}/Y_p . On va maintenant utiliser l'hypothèse de la proposition 2 pour mettre N_p sous une forme particulière.

Cette hypothèse permet d'écrire $C = B \otimes A$ comme A -module à droite, d'une façon compatible avec les augmentations et les graduations. D'où $C = A + I(B) \otimes A$. Écrivons P au lieu de $I(B) \otimes A$, pour un instant ; l'image de $C \otimes F_p = A \otimes F_p \oplus P \otimes F_p$ dans Y_{p+1}/Y_p est $P \otimes (F_p/F_{p-1}) = I(B) \otimes A \otimes (F_p/F_{p-1}) = I(B) \otimes X_p$, et on vérifie aussitôt que l'opérateur différentiel est déduit de celui de X_p par B -linéarité. Alors la suite exacte (2) donne naissance à une suite exacte d'homologie qui, vu l'acyclicité de Y_{p+1}/Y_p , donne des isomorphismes

$$H_{q+1}(X_{p+1}) \approx I(B) \otimes H_q(X_p) .$$

Vu le caractère fonctoriel vis-à-vis de la projection $C \rightarrow B$, qui envoie

$B \otimes A \rightarrow B$ par l'application $b \otimes a \rightarrow \varepsilon(a) b$, on trouve un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_*(X_{p+1}) & \xrightarrow{(g_{p+1})_*} & T_{p+1}(I(B)) \\ \wr & 1 \otimes (g_p)_* & \wr \\ I(B) \otimes H_*(X_p) & \xrightarrow{\quad} & I(B) \otimes T_p(I(B)) \end{array}$$

Ceci permet de prouver, par récurrence sur p , que $(g_p)_*$ est un isomorphisme ; pour $p = 0$, l'assertion est triviale.

DÉMONSTRATION de la proposition 3. - Prenons une A -base de C formée de 1 et d'éléments homogènes de $I(C)$ qui anticommulent avec les éléments de A . Soit C' la sous-algèbre de C engendrée par ces éléments de base. L'application

$$A \otimes C' \rightarrow C$$

définie par la multiplication de C est compatible avec les structures d'algèbres, si on munit $A \otimes C'$ de la structure d'algèbre, produit tensoriel de deux algèbres graduées. La suite spectrale de C s'en va donc dans celle de $A \otimes C'$. On est ainsi amené à étudier la suite spectrale d'un produit tensoriel d'algèbres.

Ouvrons donc une parenthèse, et écrivons $A \otimes B$ au lieu de $A \otimes C'$. On va étudier la suite spectrale du couple (C, A) , C désignant l'algèbre $A \otimes B$. On a deux applications naturelles

$$S(A) \otimes S(B) \xrightarrow{f} S(C) \xrightarrow{g} S(A) \otimes S(B)$$

compatibles avec les opérateurs différentiels (celui de $S(A) \otimes S(B)$ étant défini à la manière habituelle d'un produit tensoriel, pour la graduation de $S(A)$ qui donne le degré p aux éléments de $A \otimes T_p(I(A))$) ; la composée de ces applications est l'identité. Les formules sont celles de [3] (chapitre XI, formules (1) et (3) du paragraphe 7), à cela près que les signes de la formule (1) de [3] doivent être modifiés pour tenir compte de la graduation propre : le signe que l'on doit mettre devant une permutation de $\zeta_1, \dots, \zeta_{p+q}$ dans la formule (1) est le produit de la signature de cette permutation par un nombre $\varepsilon = \pm 1$ obtenu par application de la règle de Koszul aux degrés propres des ζ_i .

Par transposition, on obtient des applications

$$T^*(I(A_*)) \otimes T^*(I(B_*)) \xrightarrow{g'} T^*(I(C_*)) \xrightarrow{f'} T^*(I(A_*)) \otimes T^*(I(B_*))$$

compatibles avec les différentielles δ , et dont la composée est l'identité. Il est utile d'explicitier g' et f' :

$$g'(u \otimes v) = i_1(u) \otimes i_2(v) \quad ,$$

où i_1 et i_2 sont induits par les injections $A_* \rightarrow C_*$ et $B_* \rightarrow C_*$ (transposées des deux projections $C \rightarrow A$ et $C \rightarrow B$ définies respectivement par l'augmentation de B et par celle de A dans $A \otimes B$). Quant à $f'(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$, c'est une somme d'éléments obtenus comme suit : pour chaque partition de la suite $(1, \dots, n)$ en deux sous-ensembles I et J , on envoie x_i dans $I(A_*)$ si $i \in I$, et dans $I(B_*)$ si $i \in J$ (par les applications naturelles), on fait sur les éléments obtenus la permutation qui, sans changer l'ordre interne des $i \in I$ ni celui des $i \in J$, ramène les $i \in I$ avant les $i \in J$; ceci définit un élément de $\sum_{p+q=n} T^p(I(A_*)) \otimes T^q(I(B_*))$, qu'on affecte d'un signe comme il a été dit plus haut lors de la définition de f . La somme des termes ainsi obtenus est $f'(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$.

Définissons maintenant une filtration sur $T^*(I(B_*))$, en posant $F^p T^*(I(B_*)) = \sum_{q \geq p} T^q(I(B_*))$. D'où, par produit tensoriel avec $T^*(I(A_*))$, une filtration sur $T^*(I(A_*)) \otimes T^*(I(B_*))$, stable pour la différentielle. Il est immédiat que g' et f' sont compatibles avec les filtrations (celle de $T^*(I(C_*))$ a été définie au paragraphe 1, à l'aide de la sous-algèbre A). Donc g' et f' définissent des homomorphismes des suites spectrales, et le composé de ces homomorphismes est l'identité.

Regardons $g'_0 : T^*(I(A_*)) \otimes T^*(I(B_*)) \rightarrow E_0^p(C, A)$.

Il est immédiat que ce n'est pas autre chose que $\vee^p$, dans le cas particulier considéré ici. Donc, d'après la proposition 2,

$$g'_1 : H^*(A) \otimes T^*(I(B_*)) \rightarrow E_1(C, A)$$

est bijective. Il s'ensuit que $f'_1 : E_1(C, A) \rightarrow H^*(A) \otimes T^*(I(B_*))$ est la bijection réciproque. De plus, g'_1 et f'_1 sont compatibles avec les différentielles d_1 , celle de $H^*(A) \otimes T^*(I(B_*))$ étant évidemment définie par

$$d_1(u \otimes v) = (-1)^q u \otimes (\delta v) \quad ,$$

pour $u \in H^q(A)$.

Enfin, montrons que g'_1 est compatible avec les structures d'algèbres, lorsqu'on munit $H^*(A) \otimes T^*(I(B_*))$ de la structure d'algèbre, produit tensoriel de deux algèbres bigraduées. Il suffit de montrer que si $u \in H^{q,t}(A)$ et $v \in H^{p,r}(B)$, on a

$$g'_1(v) g'_1(u) = (-1)^{pq+rt} g'_1(u \otimes v) .$$

Il suffit pour cela de vérifier que les images des deux membres par la bijection f'_1 sont égales ; or cela résulte aussitôt de la définition explicite f' .

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 3. Revenons aux notations antérieures, et à l'homomorphisme d'algèbres $A \otimes C' \rightarrow C$; B désigne à nouveau le quotient de C par l'idéal engendré par $I(A)$. Le composé de l'injection $C' \rightarrow C$ et de la projection $C \rightarrow B$ est un homomorphisme d'algèbres $C' \rightarrow B$; c'est celui qui est induit par $A \otimes C' \rightarrow C$ quand on passe aux quotients. Envoyons la suite spectrale de (C, A) dans celle de $(A \otimes C', A)$; on a notamment un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^*(A) \otimes T^*(I(B_*)) & \xrightarrow[\cong]{\vee^*} & E_1(C, A) \\ \downarrow \vee & & \downarrow \\ H^*(A) \otimes T^*(I(C'_*)) & \xrightarrow[\cong]{g'_1} & E_1(A \otimes C', A) \end{array}$$

où le premier homomorphisme vertical est l'injection définie par l'injection naturelle $B_* \rightarrow C'_*$. Le second homomorphisme vertical est donc une injection. Les deux homomorphismes verticaux sont compatibles avec les structures multiplicatives, et il en est de même de g'_1 (comme on vient de le voir). Il s'ensuit que $\vee^*$ est compatible avec les structures multiplicatives : c'est l'assertion (i) de l'énoncé.

Le même raisonnement montre, puisque g'_1 est compatible avec les différentielles d_1 (comme on vient de le voir) que $\vee^*$ est compatible avec les différentielles, comme il est dit dans l'assertion (ii) de l'énoncé.

De cette façon, le théorème 1 est entièrement démontré.

REMARQUE FINALE. - Lorsque $C.I(A)$ est un idéal bilatère de C , on dit que A est une sous-algèbre normale de C , et on note $C//A$ l'algèbre $B = C/C.I(A)$. Lorsqu'en outre C est une algèbre de Hopf (au sens de l'exposé 10), et A une sous-algèbre de Hopf (normale), on a $I(A).C = C.I(A)$, et C possède une A -base (pour sa structure de A -module à gauche, resp. à droite) formée de 1 et d'éléments homogènes de $I(C)$ (autrement dit, l'hypothèse de la proposition 2 est alors remplie d'elle-même). Pour la démonstration, voir l'appendice, et [4].

3. Cohomologie de l'algèbre de Steenrod pour $p = 2$.

Considérons l'algèbre de Steenrod S^* pour $p = 2$, et sa duale S_* . On sait (exposés 10 et 11) que S_* est une algèbre de polynômes (sur le corps Z_2)

engendrée par des éléments ξ_i ($i = 1, 2, \dots$), ξ_i ayant le degré $2^i - 1$. De plus l'application diagonale de S_* (qui définit la multiplication de S^*) est définie par la formule (exposé 11, formule (10))

$$(1) \quad \delta \xi_k = \sum_{0 < i < n} (\xi_{k-i})^{2^i} \otimes \xi_i ;$$

on écrit ici l'application $\delta : I(S_*) \rightarrow I(S_*) \otimes I(S_*)$, qui sert à définir la différentielle de l'algèbre tensorielle $T^*(I(S_*))$; on sait que l'algèbre de cohomologie de $T^*(I(S_*))$ pour cette différentielle est $H^*(S^*)$, et que cette algèbre $H^*(S^*)$ est commutative parce que S^* est une algèbre de Hopf (exposé 15, théorème I). Chaque $H^n(S^*)$ possède en outre une graduation propre, qui provient de la graduation des ξ_k .

L'opération qui associe à chaque $u \in S_*$ son carré u^2 est un homomorphisme d'algèbres $S_* \rightarrow S_*$, compatible avec l'application diagonale de S_* ; autrement dit, c'est un endomorphisme de l'algèbre de Hopf S_* ; à cela près que les degrés sont doublés. Il définit donc un endomorphisme $F : H^*(S^*) \rightarrow H^*(S^*)$, qui double la graduation propre. C'est là un phénomène général pour toute algèbre de Hopf sur le corps $\mathbb{Z}_2$, lorsque l'application diagonale est commutative (ici, c'est l'application diagonale de S^* qui est commutative).

Puisque $\delta \xi_1 = 0$, ξ_1 est un cocycle de $T^*(I(S_*))$, donc définit un élément de $H^1(S^*)$, que nous noterons h_0 ; son degré propre est 1. On définit par récurrence sur i l'élément $h_i = F(h_{i-1})$; il est dans $H^1(S^*)$, son degré propre est 2^i , et il est d'ailleurs défini par le cocycle $(\xi_1)^{2^i}$.

PROPOSITION 4. - Dans l'algèbre commutative $H^*(S^*)$, on a les relations

$$(3) \quad h_i h_{i+1} = 0 ,$$

$$(4) \quad (h_i)^2 h_{i+2} + (h_{i+1})^3 = 0 ,$$

$$(5) \quad h_i (h_{i+2})^2 = 0 .$$

DÉMONSTRATION. - Il suffit de prouver ces relations pour $i = 0$, puisque F est un endomorphisme de l'algèbre $H^*(S^*)$. Il suffit donc de montrer que les cocycles

$$(\xi_1)^2 \otimes \xi_1 , (\xi_1)^4 \otimes \xi_1 \otimes \xi_1 + (\xi_1)^2 \otimes (\xi_1)^2 \otimes (\xi_1)^2 \text{ et } (\xi_1)^4 \otimes \xi_1 \otimes \xi_1$$

sont des cobords. Cela résulte des formules, faciles à vérifier ;

$$(3') \quad \delta \xi_2 = (\xi_1)^2 \otimes \xi_1 \quad ,$$

$$(4') \quad \delta[\xi_2 \otimes \xi_2 + (\xi_1)^2 \otimes (\xi_1 \xi_2) + ((\xi_1)^2 \xi_2) \otimes \xi_1] \\ = (\xi_1)^4 \otimes \xi_1 \otimes \xi_1 + (\xi_1)^2 \otimes (\xi_1)^2 \otimes (\xi_1)^2 \quad ,$$

$$(5') \quad \delta[\xi_3 \otimes (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 \otimes \xi_2 + (\xi_1)^4 \otimes ((\xi_1)^2 \xi_2) + (\xi_2)^2 \otimes (\xi_1)^3] \\ = (\xi_1)^4 \otimes (\xi_1)^4 \otimes \xi_1 \quad .$$

Naturellement, ces formules ont l'air de tomber du ciel. On verra plus loin comment on serait conduit à les découvrir par un procédé systématique.

On ne dit pas qu'il n'y a pas d'autre relation entre les h_i dans l'algèbre S^* . Toutefois :

THÉOREME 2. - Considérons l'algèbre des polynômes en $x_0, \dots, x_n, \dots$, chaque x_n étant affecté du "degré propre" 2^n . Soit Q le quotient de cette algèbre par l'idéal engendré par les polynômes

$$x_i x_{i+1} \quad , \quad (x_i)^2 x_{i+2} + (x_{i+1})^3 \quad \text{et} \quad x_i (x_{i+2})^2 \quad .$$

Considérons l'homomorphisme d'algèbres $Q \rightarrow H^*(S^*)$ qui envoie x_i en h_i ; il envoie Q^r (espace engendré par les produits de r variables x_i) dans $H^r(S^*)$, en respectant les graduations propres. Alors l'application $Q^r \rightarrow H^r(S^*)$ est bijective pour $r = 1$ et $r = 2$, injective pour $r = 3$.

La fin de cet exposé est consacrée à la démonstration de ce théorème. Il explicite entièrement $H^1(S^*)$ et $H^2(S^*)$, partiellement $H^3(S^*)$. En fait, il existe des éléments de $H^3(S^*)$ non situés dans l'image de Q^3 ; c'est ainsi que le cocycle (de degré propre 11)

$$(6) \quad \xi_3 \otimes (\xi_1)^2 \otimes (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 \otimes \xi_2 \otimes (\xi_1)^2 + (\xi_1)^4 \otimes ((\xi_1)^2 \xi_2) \otimes (\xi_1)^2 \\ + (\xi_2)^2 \otimes (\xi_1)^3 \otimes (\xi_1)^2 + (\xi_1)^4 \otimes (\xi_1)^4 \otimes \xi_2 + (\xi_1)^4 \otimes (\xi_1)^4 \otimes (\xi_1)^3$$

définit un élément non nul de $H^3(S^*)$, élément qui n'est pas dans l'image de Q^3 , puisque les degrés propres des éléments de Q^3 sont 3, 6, 10, 12, ... (on prouvera plus loin que le cocycle (6) n'est pas un cobord).

REMARQUE. - L'assertion de l'énoncé relative à $H^1(S^*)$ exprime que les $(\xi_1)^{2^i}$ forment une base de l'espace vectoriel des éléments primitifs de S_* . On avait déjà établi directement ce résultat (exposé 12, théorème 2).

4. Démonstration du théorème 2.

Soit B'_n la sous-algèbre de S_* engendré par les ξ_i pour $i \leq n$; c'est une sous-algèbre de Hopf, et B'_{n-1} est une sous-algèbre normale de B'_n , puisque la multiplication de S_* est commutative. L'algèbre quotient $A'_n = B'_n // B'_{n-1}$ s'identifie à l'algèbre des polynômes en ξ_n , munie de l'application diagonale $\xi_n \rightarrow \xi_n \otimes 1 + 1 \otimes \xi_n$. Autrement dit, $\delta \xi_n = 0$ dans A'_n . Par dualité (exposé 12, paragraphe 2), B_n (algèbre de Hopf duale de B'_n) s'identifie à un quotient de S^* , A_n est une sous-algèbre normale de B_n , et $B_n // A_n = B_{n-1}$ s'identifie à la duale de B'_{n-1} . Puisque l'algèbre S_* est limite inductive de ses sous-algèbres B'_n , l'algèbre $H^*(S^*)$ est limite inductive des algèbres $H^*(B_n)$. Ainsi, théoriquement, pour déterminer $H^*(S^*)$, on détermine successivement les algèbres $H^*(B_n)$; on va voir que le passage de $H^*(B_{n-1})$ à $H^*(B_n)$ s'effectue au moyen d'une suite spectrale.

En effet, pour pouvoir appliquer le théorème 1, il suffit de vérifier que la sous-algèbre A_n est dans le centre de B_n ; cela signifie que les deux applications composées

$$\begin{array}{ccc} B'_n & \xrightarrow{\Delta} & B'_n \otimes B'_n \xrightarrow{\pi \otimes 1} A'_n \otimes B'_n \\ B'_n & \xrightarrow{\Delta} & B'_n \otimes B'_n \xrightarrow{1 \otimes \pi} B'_n \otimes A'_n \end{array}$$

(où Δ désigne l'application diagonale et π la projection naturelle) se déduisent l'une de l'autre par l'application $a' \otimes b' \rightarrow b' \otimes a'$. Puisque les applications précédentes sont multiplicatives, il suffit de vérifier cela quand on part d'un générateur ξ_i de B'_n . Si $i < n$, ξ_i est envoyé respectivement dans $1 \otimes \xi_i$ et $\xi_i \otimes 1$; si $i = n$, ξ_n est envoyé dans $\xi_n \otimes 1 + 1 \otimes \xi_n$. La vérification est ainsi faite; elle ne dépend que du fait que B'_n est engendré par B'_{n-1} et par un élément ξ_n tel que $\delta \xi_n \in I(B'_{n-1}) \otimes I(B'_{n-1})$.

Ainsi il existe une suite spectrale d'algèbres différentielles qui aboutit à l'algèbre $H^*(B_n)$, et dont le terme E_2 est

$$E_2(B_n) = H^*(A_n) \otimes H^*(B_{n-1})$$

On va être amené à étudier de près ces suites spectrales.

On va d'abord déterminer l'algèbre $H^*(A_n)$.

PROPOSITION 5. - Soit, pour $i = 0, 1, \dots$, $\zeta_i(n)$ l'élément de $H^1(A_n)$, classe du cocycle $(\xi_n)^{2^i}$. Alors l'algèbre $H^*(A_n)$ s'identifie à l'algèbre des polynômes en $\zeta_0(n), \zeta_1(n), \dots, \zeta_i(n), \dots$ (On notera que le degré propre de $\zeta_i(n)$ est $2^i(2^n - 1)$).

DÉMONSTRATION. - Les $(\xi_n)^k$ forment une $\mathbb{Z}_2$ -base de A'_n , soit (u_k) la base duale de A_n . L'application diagonale de A'_n montre que la multiplication, dans A_n , est donnée par

$$u_k \cdot u_h = (k, h) u_{k+h},$$

où (k, h) désigne, comme d'habitude, le coefficient binomial. Il est classique que A_n , comme algèbre, est le produit tensoriel des algèbres extérieures ayant respectivement pour générateurs les éléments u_{2^i} ($i = 0, 1, \dots$). Donc (exposé

15, proposition 5) $H^*(A_n)$ s'identifie au produit tensoriel des algèbres de cohomologie de chacune de ces algèbres extérieures. L'algèbre de cohomologie de l'algèbre extérieure engendrée par u_{2^i} est l'algèbre tensorielle de l'espace vectoriel

ayant pour base l'élément $(\xi_n)^{2^i}$, donc s'identifie à l'algèbre des polynômes

engendrée par un élément dont le degré propre est celui de $(\xi_n)^{2^i}$. Par produit tensoriel, on obtient la proposition à démontrer.

En particulier, $H^*(A_1) = H^*(B_1)$ est l'algèbre des polynômes en

$\zeta_0(1), \dots, \zeta_i(1), \dots$. Comme les $(\xi_1)^{2^i}$ sont des cocycles, ils ont des images dans toutes les algèbres $H^*(B_n)$, ainsi que dans $H^*(S^*)$. On a déjà noté h_i l'image de $\zeta_i(1)$ dans $H^*(S^*)$; on notera désormais $h_i(n)$ l'image de $\zeta_i(1)$ dans $H^*(B_n)$.

Pour chaque n , les $h_i(n)$ sont linéairement indépendants dans $H^1(B_n)$. En effet, c'est vrai pour $n = 1$. Et le noyau de $H^1(B_{n-1}) \rightarrow H^1(B_n)$ est nul, puisque $E_{\infty}^{1,0}(B_n) = E_2^{1,0}(B_n)$ (les différentielles de la suite spectrale étant nulles pour des raisons de degré). On verra tout à l'heure que $E_{\infty}^{0,1}(B_n) = 0$ pour $n \geq 2$, ce qui entraînera donc que les $h_i(n)$ forment une base de $H^1(B_n)$ pour tout n .

Considérons l'application $d_2 : E_2^{0,1}(B_n) \rightarrow E_2^{2,0}(B_n)$, qui s'identifie à une application $H^1(A_n) \rightarrow H^2(B_{n-1})$. On notera $g_i(n-1)$ l'élément de $H^2(B_{n-1})$, image de $\zeta_i(n)$ par cette application. (Ceci vaut pour $n \geq 2$). La relation (3') montre que

$$(7) \quad g_i(1) = h_i(1) h_{i+1}(1) \quad .$$

Les éléments $g_i(n)$ sont tous $\neq 0$ pour $n \geq 1$, et ils sont même linéairement indépendants. Pour $n = 1$, cela résulte de la relation (7), puisque $H^*(B_1)$ est l'algèbre des polynômes par rapport aux $h_i(1)$. Supposons $n \geq 2$; la relation (I) montre que $g_i(n)$ est de filtration 1, et que son image dans $E_{\omega}^{1,1}(B_n) \subset E_2^{1,1}(B_n)$ est

$$(8) \quad \zeta_i(n) h_{n+i}(n-1) + \zeta_{i+1}(n) h_i(n-1) \in H^1(A_n) \otimes H^1(B_{n-1}) \quad .$$

Ces éléments sont évidemment linéairement indépendants dans $E_2^{1,1}(B_n)$; ils le sont donc a fortiori dans $H^2(B_n)$.

Ainsi, pour $n \geq 2$, $d_2 : E_2^{0,1}(B_n) \rightarrow E_2^{2,0}(B_n)$ envoie les éléments $\zeta_i(n)$ d'une base de $E_2^{0,1}(B_n)$ sur des éléments linéairement indépendants de $E_2^{2,0}(B_n)$. Donc d_2 a un noyau nul, et par suite $E_{\omega}^{0,1}(B_n) = 0$ pour $n \geq 2$, comme annoncé.

PROPOSITION 6. - Pour $n \geq 2$, le noyau de $H^2(B_1) \rightarrow H^2(B_n)$ est le sous-espace ayant pour base les $h_i(1) h_{i+1}(1)$.

DÉMONSTRATION. - Commençons par le cas où $n = 2$. Alors $H^2(B_1) = E_2^{2,0}(B_2)$, et le noyau est l'image de $d_2 : E_2^{0,1}(B_2) \rightarrow E_2^{2,0}(B_2)$, c'est-à-dire de l'application $H^1(A_2) \rightarrow H^2(B_1)$ qui envoie $\zeta_i(2)$ en $g_i(1) = h_i(1) h_{i+1}(1)$ (relation (7)).

Supposons maintenant $n \geq 3$, et montrons que le noyau de $H^2(B_{n-1}) \rightarrow H^2(B_n)$ ne rencontre qu'en 0 l'image de $H^2(B_1) \rightarrow H^2(B_{n-1})$. En effet, cette image est dans $E_{\omega}^{2,0}(B_{n-1})$, tandis que le noyau de $H^2(B_{n-1}) \rightarrow H^2(B_n)$ est l'image de $d_2 : H^1(A_n) \rightarrow H^2(B_{n-1})$, donc est engendré par les $g_i(n-1)$; et on a vu que les images des $g_i(n-1)$ dans $E_{\omega}^{1,1}(B_{n-1})$ sont linéairement indépendantes. La proposition est démontrée.

PROPOSITION 7. - Pour $n \geq 2$, les images des $g_i(n)$ dans $E_{\omega}^{1,1}(B_n)$ forment une base de cet espace vectoriel.

DÉMONSTRATION. - $E_{\omega}^{1,1}(B_n)$ est le noyau de $d_2 : H^1(A_n) \otimes H^1(B_{n-1}) \rightarrow H^3(B_{n-1})$.
Or on a

$$(9) \quad d_2(\sum_i (n) h_j(n-1)) = g_i(n-1) h_j(n-1) .$$

On est donc amené à chercher les relations linéaires existant entre les
 $g_i(n-1) h_j(n-1)$ dans $H^3(B_{n-1})$, pour $n \geq 2$. On sait déjà que les d_2 des
images des $g_i(n)$, données par l'expression (8), sont nulles, ce qui donne les re-
lations

$$(10) \quad g_i(n-1) h_{n+1}(n-1) + g_{i+1}(n-1) h_i(n-1) = 0 .$$

Il s'agit de montrer qu'on obtient ainsi toutes les relations. Tout revient donc à
vérifier que les

$$z_{i,j} = g_i(n-1) h_j(n-1) \in H^3(B_{n-1})$$

relatifs aux couples (i, j) tels que $i \neq j+1$ sont linéairement indépendants.

On va examiner successivement le cas $n=2$, le cas $n=3$, et le cas $n \geq 4$.
Pour $n=2$, on a, d'après (7),

$$z_{i,j} = h_i(1) h_{i+1}(1) h_j(1)$$

et on voit facilement que tous ces monômes, pour $i \neq j+1$, sont distincts.

Supposons $n \geq 3$. Dans $H^3(B_{n-1})$, $g_i(n-1)$ est, on l'a vu, de filtration 1,
donc $z_{i,j}$ est de filtration 2. Cherchons l'image de $z_{i,j}$ dans $E_{\omega}^{2,1}(B_{n-1})$,
qui est le quotient d'un sous-espace de

$$E_2^{2,1}(B_{n-1}) = H^1(A_{n-1}) \otimes H^2(B_{n-2})$$

par l'image de $d_2 : H^2(A_{n-1}) \rightarrow H^1(A_{n-1}) \otimes H^2(B_{n-2})$. Cette image est engendrée par
les éléments

$$v_{k,m} = \sum_k (n-1) g_m(n-2) + \sum_m (n-1) g_k(n-2) ,$$

tandis que $z_{i,j}$ a pour image la classe de

$$u_{i,j} = \sum_i (n-1) h_{n-1+i}(n-2) h_j(n-2) + \\ + \sum_{i+1} (n-1) h_i(n-2) h_j(n-2) .$$

Envisageons d'abord le cas $n=3$. On cherche les combinaisons linéaires des

$$u_{i,j} = \sum_i (2) h_{i+2}(1) h_j(1) + \sum_{i+1} (2) h_i(1) h_j(2) , \quad i \neq j+1 ,$$

qui appartiennent au sous-espace engendré par les

$$v_{k,m} = \zeta_k(2) h_m(1) h_{m+1}(1) + \zeta_m(2) h_k(1) h_{k+1}(1) \quad .$$

Or il y en a : on a en effet $u_{i,i+1} = v_{i,i+1}$. Montrons qu'il n'y en a pas d'autre ; autrement dit, aucune combinaison linéaire non nulle des $u_{i,j}$ tels que $i \neq j+1$ et $j \neq i+1$ n'est combinaison des $v_{k,m}$. Ceci est laissé au lecteur à titre

d'exercice. Il reste alors à montrer que les $z_{i,i+1} \in H^3(B_2)$, bien que leurs images dans $E_{\omega}^{2,1}(B_2)$ soient nulles, sont linéairement indépendants. Ce sont des éléments de filtration 3 de $H^3(B_n)$; ils sont donc dans

$$E_{\omega}^{3,0}(B_2) = \text{Coker } d_2 : H^1(A_2) \otimes H^1(B_1) \rightarrow H^3(B_1) \quad .$$

Or $z_{i,i+1} = d_2(\zeta_i(3) h_{i+1}(2)) \in H^3(B_2)$; la relation (5') montre que l'élément $d_2(\zeta_0(3) h_1(2))$ est dans la classe de $h_0(1)(h_2(1))^2$, et par suite l'élément $z_{i,i+1}$ est dans la classe de $h_i(1)(h_{i+2}(1))^2$. Les classes de ces éléments sont linéairement indépendantes, car on fait le quotient par le sous-espace engendré par les $h_i(1) h_{i+1}(1) h_j(1)$.

Il reste enfin à examiner le cas où $n \geq 4$. Dans ce cas, le sous-espace engendré par les $v_{k,m}$ ne rencontre qu'en 0 celui engendré par les $u_{i,j}$. Il suffit donc de vérifier que les $u_{i,j}$ relatifs aux couples (i, j) tels que $i \neq j+1$ sont des éléments linéairement indépendants de $H^1(A_{n-1}) \otimes H^2(B_{n-2})$, compte tenu du fait que les seules relations existant entre les produits $h_i(n-2) h_j(n-2)$ sont $h_i(n-2) h_{i+1}(n-2) = 0$. C'est un exercice laissé au lecteur.

La proposition 7 est ainsi démontrée.

PROPOSITION 8. - On a $E_{\omega}^{0,2}(B_n) = 0$ pour $n \geq 2$.

DÉMONSTRATION. - Cherchons d'abord $E_3^{0,2}(B_n)$, noyau de

$$d_2 : H^2(A_n) \rightarrow H^1(A_n) \otimes H^2(B_{n-1}) \quad .$$

L'espace vectoriel $H^2(A_n)$ a pour base les $\zeta_i(n) \zeta_j(n)$ pour les couples (i, j) tels que $i \leq j$. On a

$$d_2(\zeta_i(n) \zeta_j(n)) = \zeta_i(n) g_j(n-1) + \zeta_j(n) g_i(n-1) \quad .$$

Il est clair que ceci est nul pour $i = j$, et que les seconds membres, pour $i < j$, sont linéairement indépendants. Donc $E_3^{0,2}(B_n)$ a pour base les éléments $(\zeta_i(n))^2$. Il reste à calculer

$$d_3((\zeta_i(n))^2) \in E_3^{3,0}(B_n) = \text{Coker } d_2 : H^1(A_n) \otimes H^1(B_{n-1}) \rightarrow H^3(B_{n-1}) \quad .$$

Considérons d'abord le cas où $n = 2$: la relation (4') montre que $d_3((\zeta_0(2))^2)$ est dans la classe de $h_2(1)(h_0(1))^2 + (h_1(1))^3$. Appliquant i fois l'endomorphisme F , on voit que l'on a :

$$(11) \quad d_3((\zeta_i(2))^2) \text{ est dans la classe de } h_{i+2}(1)(h_i(1))^2 + (h_{i+1}(1))^3 .$$

Or il s'agit de classes modulo le sous-espace engendré par les produits $h_i(1) h_{i+1}(1) h_j(1)$. Il est clair que les

$$h_{i+2}(h_i)^2 + (h_{i+1})^3$$

ont des classes linéairement indépendantes ; donc le noyau de d_3 est nul, et par suite $E_{\omega}^{0,2}(B_2) = 0$.

Supposons maintenant $n \geq 3$. Un calcul sans difficulté montre que

$$\delta [\zeta_n \otimes \zeta_n + \sum_{0 \leq i < n} ((\zeta_{n-i})^2 \zeta_n) \otimes \zeta_i + (\zeta_{n-i})^2 \otimes (\zeta_i \zeta_n)]$$

ne contient pas ζ_n , et que si on le regarde comme un élément de l'algèbre tensorielle de $I(B_{n-1})$, il est de filtration 1 ; si on néglige les termes de filtration 2, il reste seulement

$$(\zeta_1)^{2^n} \otimes \zeta_{n-1} \otimes \zeta_{n-1} + (\zeta_{n-1})^2 \otimes (\zeta_{n-1})^2 \otimes (\zeta_1)^2 \quad .$$

Ceci veut dire que $d_3((\zeta_i(n))^2) \in H^3(B_{n-1})$ a pour image, dans

$$E_{\omega}^{1,2}(B_{n-1}) \subset E_2^{1,2}(B_{n-1}) = H^2(A_{n-1}) \otimes H^1(B_{n-2}), \text{ l'élément}$$

$$(\zeta_i(n-1))^2 h_{n+i}(n-2) + (\zeta_{i+1}(n-1))^2 h_{i+1}(n-2) \quad .$$

Lorsque i varie, ces éléments sont linéairement indépendants ; donc d_3 a un noyau nul, et $E_{\omega}^{0,2}(B_n)$ est nul.

C.Q.F.D.

On a donc, pour tout $n \geq 2$, une suite exacte

$$(12) \quad 0 \rightarrow E_{\omega}^{2,0}(B_n) \rightarrow H^2(B_n) \rightarrow E_{\omega}^{1,1}(B_n) \rightarrow 0 \quad ,$$

et par suite (proposition 7) $H^2(B_n)$ est somme directe du sous-espace $E_{\omega}^{2,0}(B_n)$ et du sous-espace ayant pour base les $g_i(n)$. Or $E_{\omega}^{2,0}(B_{n+1})$ est quotient de

$H^2(B_n)$ par le sous-espace engendré par les $g_i(n)$. Donc $E_{\omega}^{2,0}(B_{n+1})$ s'identifie canoniquement à $E_{\omega}^{2,0}(B_n)$ pour $n \geq 2$. On sait déjà que $E_{\omega}^{2,0}(B_2)$ est le quotient de $H^2(B_1)$ par le sous-espace engendré par les $h_i(1) h_{i+1}(1)$ (cf. proposition 6). Il en résulte que $H^2(S^*)$, qui est limite des $H^2(B_n)$, est limite des $E_{\omega}^{2,0}(B_n)$, donc s'identifie au quotient de $H^2(B_1)$ par le sous-espace engendré par les $h_i(1) h_{i+1}(1)$.

Pour achever la démonstration du théorème 2, il reste à déterminer le noyau de $H^3(B_1) \rightarrow H^3(B_n)$. Commençons par le cas où $n = 2$.

PROPOSITION 9. - Le noyau de $H^3(B_1) \rightarrow H^3(B_2)$ est engendré par les éléments suivants

$$h_i h_{i+1} h_j, \quad (h_i)^2 h_{i+2} + (h_{i+1})^3$$

(on a écrit, pour abréger, h_i au lieu de $h_i(1)$).

DÉMONSTRATION. - Le quotient de $H^3(B_1)$ par le noyau cherché est $E_{\omega}^{3,0}(B_2)$. Calculons d'abord

$$E_{\omega}^{3,0}(B_2) = \text{Coker } d_2 : H^1(A_2) \otimes H^1(B_1) \rightarrow H^3(B_1).$$

Le calcul a déjà été fait : on divise $H^3(B_1)$ par le sous-espace engendré par les $h_i h_{i+1} h_j$. Ensuite on a

$$E_{\omega}^{3,0}(B_2) = \text{Coker } d_3 : E_3^{0,2}(B_2) \rightarrow E_3^{3,0}(B_2).$$

Or le calcul a déjà été fait : $E_3^{0,2}(B_2)$ a pour base les $(\zeta_i(2))^2$; la relation (11) montre qu'on doit faire le quotient de $E_3^{3,0}(B_2)$ par les classes des éléments $(h_i)^2 h_{i+2} + (h_{i+1})^3$, ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 10. - Le noyau de $H^3(B_2) \rightarrow H^3(B_3)$ rencontre l'image de $H^3(B_1) \rightarrow H^3(B_2)$ suivant le sous-espace ayant pour base les éléments suivants :

$$h_i(2)(h_{i+2}(2))^2.$$

DÉMONSTRATION. - Pour avoir le quotient de $H^3(B_2)$ par ce noyau, on doit d'abord prendre le conoyau de $d_2 : H^1(A_3) \otimes H^1(B_2) \rightarrow H^3(B_2)$; ceci revient à prendre le quotient de $H^3(B_2)$ par le sous-espace L engendré par les produits $g_i(2) h_j(2)$.

On doit chercher l'intersection de ce sous-espace avec l'image de $H^3(B_1)$; cette image est contenue dans le noyau de $L \rightarrow E_{\omega}^{2,1}(B_2)$, et on a déjà vu (démonstration de la proposition 7) que les combinaisons linéaires des $g_i(2) h_j(2)$ dont l'image dans $E_{\omega}^{2,1}(B_2)$ est nulle sont combinaisons des suivantes :

1° Les $g_i(2) h_{i+3}(2) + g_{i+1}(2) h_i(2)$, qui sont des éléments nuls de $H^3(B_2)$;

2° Les $g_i(2) h_{i+1}(2)$, qui sont dans la classe de $h_i(1)(h_{i+2}(1))^2$; autrement dit,

$$(13) \quad g_i(2) h_{i+1}(2) = h_i(2)(h_{i+2}(2))^2 .$$

Ayant ainsi déterminé l'intersection de $E_3^{3,0}(B_3)$ avec l'image de $H^3(B_2)$, il reste à passer à $E_{\omega}^{3,0}(B_3)$, conoyau de

$$d_3 : E_3^{0,2}(B_3) \rightarrow E_3^{3,0}(B_3) .$$

L'image de d_3 est engendrée, on l'a vu (démonstration de la proposition 8) par les $d_3((\zeta_i(3))^2) \in H^3(B_2)$, dont les images dans $E_{\omega}^{1,2}(B_2)$ sont linéairement indépendantes. Donc seule la combinaison nulle se trouve dans $E_{\omega}^{3,0}(B_2)$, et par suite l'image de $H^3(B_2)$ dans $E_3^{3,0}(B_3)$ s'envoie injectivement dans $E_{\omega}^{3,0}(B_3)$. La proposition en résulte.

PROPOSITION 11. - Pour $n \geq 3$, le noyau de $H^3(B_n) \rightarrow H^3(B_{n+1})$ rencontre l'image de $H^3(B_1)$ suivant 0 .

DÉMONSTRATION. - On doit d'abord faire le quotient de $H^3(B_n)$ par l'image de $d_2 : H^1(A_{n+1}) \otimes H^1(B_n) \rightarrow H^3(B_n)$, qui est engendrée par les produits $g_i(n) h_j(n)$. On a vu que les combinaisons linéaires de ces produits dont l'image dans $E_{\omega}^{2,1}(B_n)$ est nulle sont nulles ; par suite l'image de d_2 ne rencontre l'image de $H^3(B_1) \rightarrow H^3(B_n)$ que suivant 0 . Ensuite, on considère l'image de

$$d_3 : E_3^{0,2}(B_{n+1}) \rightarrow E_3^{3,0}(B_{n+1}) ;$$

comme plus haut, cette image s'envoie injectivement dans $E_{\omega}^{1,2}(B_n)$, donc ne rencontre que suivant 0 l'image de $H^3(B_1)$ dans $E_{\omega}^{3,0}(B_{n+1})$. La proposition 11 en résulte.

Il est clair maintenant que le théorème 2 est complètement démontré.

REMARQUE FINALE. - Considérons l'élément

$$u = \zeta_0(3)(h_1(2))^2 \in H^1(A_3) \otimes H^2(B_2) = E_2^{2,1}(B_3) .$$

On a $d_2 u = g_0(2)(h_1(2))^2$,
 qui est nul en vertu de (13), puisque $h_0(2) h_1(2) = 0$. Ainsi u définit un élément de $E_{\infty}^{2,1}(B_3)$; cet élément n'est pas nul, car u n'est pas dans l'image de

$$d_2 : E_2^{0,2}(B_3) \rightarrow E_2^{2,1}(B_3) \quad ;$$

en effet, le degré propre de u est 11, et $E_2^{0,2}(B_3) = H^2(A_3)$ n'a que des éléments dont le degré propre est un multiple de 7. Soit $v \in E_{\infty}^{2,1}(B_3)$ l'élément $\neq 0$ défini par u . Il existe dans $H^3(B_2)$ un élément a de filtration 2, ayant v pour image dans $E_{\infty}^{2,1}(B_3)$, et a est unique à l'addition près d'un élément de $E_{\infty}^{3,0}(B_3)$, de degré propre 11. Un calcul facile montre que $H^3(B_2)$ contient un seul élément $\neq 0$ de degré propre 11, à savoir $g_0(2) h_2(2)$. Sa classe dans $E_{\infty}^{3,0}(B_3)$ est nulle, car

$$g_0(2) h_2(2) = d_2(\zeta_0(3) h_2(2)) \quad .$$

Ainsi $E_{\infty}^{3,0}(B_3)$ est nul en degré propre 11; d'où il résulte finalement que a est défini de manière unique par v .

Montrons que l'image de a dans chacun des $H^3(B_n)$, pour $n \geq 4$, est $\neq 0$.
 Commençons par $n = 4$; l'image de

$$d_2 : E_2^{1,1}(B_4) \rightarrow E_2^{3,0}(B_4) = H^3(B_3)$$

ne contient pas a , pour des raisons de degré : en effet, a est de degré propre 11, tandis que les termes de plus bas degré propre dans $H^1(A_4) \otimes H^1(B_3)$ sont de degré propre 16. De même, les termes de plus bas degré propre dans $E_3^{0,2}(B_4)$ ont un degré propre ≥ 30 , donc a n'est pas dans l'image de d_3 . Ainsi l'image de a dans $E_{\infty}^{3,0}(B_4)$ est $\neq 0$; donc l'image de a dans $H^3(B_4)$ est $\neq 0$. Quand on passe à $H^3(B_5)$, etc., les choses vont encore mieux, car les degrés propres possibles deviennent de plus en plus grands.

En résumé, a définit un élément $\neq 0$ de $H^3(S^*)$. Cet élément n'est pas dans l'image de $H^3(B_1)$, qui ne contient en effet aucun élément de degré propre 11. D'autre part, le cocycle (6) défini à la fin du paragraphe 3 a pour image dans $H^3(B_3)$ un élément qui jouit des mêmes propriétés que a . C'est donc a , et il en résulte que ce cocycle n'est pas homologue à 0.

APPENDICE

PROPOSITION. - Soit A une sous-algèbre de Hopf d'une algèbre de Hopf C , et

soit $B = C/C.I(A)$. Soit $\rho : B \rightarrow C$ une application K-linéaire qui conserve les degrés et relève la projection $\pi : C \rightarrow B$ (autrement dit, $\pi \circ \rho = \text{identité}$). Soit $f : B \otimes A \rightarrow C$ l'application définie par $f(b \otimes a) = \rho(b).a$. Si la multiplication de C est associative, f est un isomorphisme de A-modules à droite, la structure de A-module de $B \otimes A$ étant définie par $(b \otimes a).a' = b \otimes (aa')$.

DÉMONSTRATION. - Le fait que f soit A-linéaire résulte évidemment de l'associativité de la multiplication. Il reste à prouver que f est à la fois surjective et injective. Pour la surjectivité, il est trivial que $C_0 \approx K$ est dans l'image de f ; montrons, par récurrence sur p , que C_p est dans l'image de f . Soit $p > 0$; tout élément de C_p est congru à un élément de $\rho(B_p)$ modulo $C.I(A)$, donc (pour des raisons de degré) modulo $(\sum_{q < p} C_q).I(A)$, c'est-à-dire (par l'hypothèse de récurrence) modulo $g(B \otimes A).I(A) \subset g(B \otimes A)$. La surjectivité de f est ainsi démontrée sans faire usage de la structure d'algèbre de Hopf.

Elle va intervenir pour prouver que f est injective. Considérons l'application $g : C \rightarrow B \otimes C$, composée de l'application diagonale $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$ et de

$C \otimes C \xrightarrow{\pi \otimes 1} B \otimes C$; elle est A-linéaire pour les structures de A-module à droite (celle de $B \otimes C$ étant définie par le facteur C à droite du signe $\otimes$): en effet

$$g(c.a) = (\pi \otimes 1) \Delta(c.a) = (\pi \otimes 1)((\Delta c).(1 \otimes a)) = (\pi \otimes 1)((\Delta c).(1 \otimes a)) = g(c).a.$$

On va montrer que l'application $h = g \circ f : B \otimes A \rightarrow B \otimes C$ est injective, d'où il résultera bien que f est injective. Puisque h conserve le degré, h envoie B_p dans $B^p \otimes C$, en notant $B^p = \sum_{q \leq p} B_q$. Puisque h est A-linéaire, h envoie

$B_p \otimes A$ dans $B^p \otimes C$. Si on compose avec la projection naturelle $B^p \otimes C \rightarrow B_p \otimes C$, on obtient une application A-linéaire $h_p : B_p \otimes A \rightarrow B_p \otimes C$, qui envoie évidemment $b \otimes 1$ dans $b \otimes 1$; donc

$$h_p = 1 \otimes i,$$

i désignant l'injection $A \rightarrow C$. Soit $h^p : B^p \otimes A \rightarrow B^p \otimes C$ l'application induite par h . Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B^{p-1} \otimes A & \longrightarrow & B^p \otimes A & \longrightarrow & B_p \otimes A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow h^{p-1} & & \downarrow h^p & & \downarrow h_p \\ 0 & \longrightarrow & B^{p-1} \otimes C & \longrightarrow & B^p \otimes C & \longrightarrow & B_p \otimes C \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. Puisque h_p est injective, il montre que si h^{p-1} est injective, h^p l'est. Comme h^0 est trivialement injective, les h^p sont toutes injectives, et par suite h est injective. Ceci achève la démonstration.

COROLLAIRE. - Si on suppose en outre que A est une sous-algèbre normale
 $(I(A).C \subset C.I(A))$, on a $I(A).C = C.I(A)$. Autrement dit, si l'idéal à gauche engendré par $I(A)$ est bilatère, c'est aussi l'idéal à droite engendré par $I(A)$.

DÉMONSTRATION. - Il suffit de prouver que les espaces vectoriels gradués $C/I(A).C = B'$ et $C/C.I(A) = B$ ont même dimension en chaque degré (cette dimension est finie, par hypothèse). Or, d'après la proposition, on a des isomorphismes d'espaces vectoriels gradués $B \otimes A \cong C \cong A \otimes B'$, ce qui permet de montrer $\dim B_p = \dim B'_p$ par récurrence sur p .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ADAMS (J. F.). - On the structure and applications of the Steenrod algebra, Comment. Math. Helvet., t. 32, 1958, p. 180-214. Voir paragraphe 6.
 - [2] ADAMS (J. F.). - Non-existence of elements of Hopf-invariant one. - Princeton, 1958, multigraphié. Voir : p. 24-43.
 - [3] CARTAN and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956.
 - [4] MILNOR (J. W.) and MOORE (J. C.). - On the structure of Hopf algebras. - Princeton, 1958, multigraphié. Voir : theorem 2.5, p. 13.
-