Séminaire Henri Cartan

H. Cartan

Quelques propriétés des algèbres de Hopf, applications à l'algèbre de Steenrod

Séminaire Henri Cartan, tome 11, nº 2 (1958-1959), exp. nº 12, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_2_A3_0>

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ALGÈBRES DE HOPF. APPLICATIONS À L'ALGÈBRE DE STEENROD

par H. CARTAN

1. Eléments décomposables, éléments primitifs.

Soit A une algèbre graduée augmentée, avec élément unité. Notons $\eta : K \to A$ l'injection canonique du corps de base K (pour simplifier, on suppose que A est une algèbre sur un corps K), et notons $\varepsilon : A \to K$ l'augmentation. On a $\varepsilon \circ \eta$ = identité. On notera $I(A)$ le noyau de ε, qui s'identifie au conoyau de η. La multiplication

$$\Phi : A \otimes A \to A \quad \text{(les produits tensoriels sont pris sur } K\text{)}$$

induit une application

$$\varphi : I(A) \otimes I(A) \to I(A) \quad .$$

Les éléments de l'image de φ sont appelés éléments décomposables de $I(A)$ (ou, par abus de langage, éléments décomposables de A). On notera $Q(A)$ le conoyau de φ :

$$Q(A) = I(A)/(I(A))^2 \quad .$$

Par abus de langage, on appelle éléments indécomposables les éléments de $Q(A)$. Observons que $Q(A)$ est un espace vectoriel gradué. Si on relève dans $I(A)$ les éléments d'une base (homogène) de $Q(A)$, on obtient un "système minimal de générateurs" de l'algèbre A (considérée comme algèbre à élément unité) : un tel système engendre A, et tout vrai sous-système ne l'engendre pas.

Soit maintenant A une coalgèbre graduée, munie de deux applications de coalgèbres graduées $\varepsilon : A \to K$ et $\eta : K \to A$, telles que $\varepsilon \circ \eta$ = identité. Soit toujours $I(A)$ le noyau de ε, identifié au conoyau de η. Il existe une application linéaire

$$\delta : I(A) \to I(A) \otimes I(A)$$

et une seule induite par Δ, c'est-à-dire telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A \\ \downarrow & & \downarrow \\ I(A) & \xrightarrow{\delta} & I(A) \otimes I(A) \end{array}$$

soit commutatif. Le noyau $P(A)$ de δ s'appelle l'espace (vectoriel gradué) des <u>éléments primitifs</u> de $I(A)$, ou (par abus de langage) éléments primitifs de A. Si on suppose, ce qu'on fera toujours, que ε est élément unité pour Δ, c'est-à-dire que les deux applications composées

$$A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} K \otimes A = A$$

$$A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \xrightarrow{1 \otimes \varepsilon} A \otimes K = A$$

sont l'identité (cf. Exposé 10, paragraphe 1), une condition nécessaire et suffisante pour que $a \in I(A)$ soit primitif est que

$$\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a \quad .$$

Supposons désormais que A soit une <u>algèbre de Hopf</u> (au sens de l'Exposé 10, paragraphe 1). Alors $\varphi : I(A) \otimes I(A) \longrightarrow I(A)$ et $\delta : I(A) \longrightarrow I(A) \otimes I(A)$ sont définis, ainsi que les espaces $Q(A)$ et $P(A)$. De plus on a une application linéaire naturelle $P(A) \longrightarrow Q(A)$ (puisque $P(A)$ est un sous-espace, et $Q(A)$ un espace-quotient de $I(A)$).

Soit A^* l'algèbre de Hopf duale. Alors $I(A)$ et $I(A^*)$ sont en dualité. Dans cette dualité, le sous-espace des éléments décomposables de $I(A^*)$ est l'orthogonal du sous-espace $P(A)$. On obtient donc une dualité naturelle entre $Q(A^*)$ et $P(A)$. De même, $Q(A)$ et $P(A^*)$ sont en dualité. De plus, l'application $P(A^*) \longrightarrow Q(A^*)$ s'identifie à la transposée de l'application $P(A) \longrightarrow Q(A)$.

Nous laissons au lecteur, à titre d'exercice, le soin de démontrer les deux propositions suivantes (cf. [3], proposition 5.6, p. 45, et theorem 4.9, p. 29) :

PROPOSITION 1. - <u>Soient</u> u <u>et</u> v <u>deux éléments homogènes de</u> $P(A)$, <u>de degrés</u> r <u>et</u> s ; <u>alors</u>

$$uv - (-1)^{rs} vu \quad (\text{"crochet gradué" de } u \text{ et } v)$$

<u>appartient à</u> $P(A)$, <u>qui est donc une algèbre de Lie graduée</u>.

PROPOSITION 2. - <u>Supposons que le corps de base</u> K <u>soit de caractéristique</u> $p \neq 0$. <u>Alors, pour que l'application</u> $P(A) \longrightarrow Q(A)$ <u>soit injective, il faut et il suffit que</u> :

1° <u>la multiplication de</u> A <u>soit associative et commutative</u> (i. e. anticommutative) ;

2° <u>la puissance p-ième de tout élément de</u> $I(A)$ <u>soit nulle</u>.

EXEMPLE. - (cf. Séminaire 1954/55) Soit Π un groupe abélien de type fini, et n un entier ≥ 1. Alors l'homologie $H_*(\Pi, n ; Z_p)$ et la cohomologie $H^*(\Pi, n ; Z_p)$ sont des algèbres de Hopf en dualité. La multiplication de $H_*(\Pi, n ; Z_p)$ est associative et commutative ; l'application $P(H_*) \to Q(H_*)$ est injective ; l'application $P(H^*) \to Q(H^*)$ est surjective, et son noyau se compose des puissances p-ièmes. On montre en outre que $P(H^*)$ est exactement l'image de la suspension $H^*(\Pi, n+1 ; Z_p) \to H^*(\Pi, n ; Z_p)$, tandis que l'espace des éléments décomposables de $H_*(\Pi, n ; Z_p)$ est exactement le noyau de la suspension $H_*(\Pi, n ; Z_p) \to H_*(\Pi, n+1 ; Z_p)$.

2. Sous-algèbres de Hopf et algèbres-quotients.

On définit d'une manière évidente la notion d'homomorphisme d'algèbres de Hopf : $A \to B$. La transposée $B^* \to A^*$ est alors aussi un homomorphisme d'algèbres de Hopf ; si l'une des applications est injective, l'autre est surjective, et vice-versa.

Le cas où l'homomorphisme $A \to B$ est injectif (resp. surjectif) donne la notion de sous-algèbre de Hopf d'une algèbre de Hopf B (resp. d'algèbre de Hopf quotient d'une algèbre de Hopf A).

PROPOSITION 3. - Soit A une sous-algèbre de Hopf d'une algèbre de Hopf B. Soit $f : B \otimes I(A) \to B$ l'application composée

$$B \otimes I(A) \to B \otimes B \xrightarrow{\Phi} B \quad ,$$

où $I(A) \to B$ est induite par l'injection $A \to B$, et où Φ désigne la multiplication de B. Alors le conoyau C de f est muni d'une application diagonale $C \to C \otimes C$ induite par l'application diagonale Δ de B ; si en outre la multiplication de B est associative, A est le noyau de l'application composée

$$g : B \xrightarrow{\Delta} B \otimes B \to B \otimes I(C) \quad ,$$

où $B \to I(C)$ désigne l'application composée $B \to C \to I(C)$.

(ainsi la connaissance du quotient C de B permet de retrouver la sous-algèbre A de B).

On a une proposition duale :

PROPOSITION 3 bis. - Soit $B \to A$ un homomorphisme surjectif d'algèbres de Hopf. Soit $f : B \to B \otimes I(A)$ l'application composée

$$B \xrightarrow{\Delta} B \otimes B \to B \otimes I(A) \quad .$$

Alors le noyau C de f est une sous-algèbre de B (pour la multiplication) ; si en outre l'application diagonale de B est associative, A est le conoyau de l'application composée

$$g : B \otimes I(C) \longrightarrow B \otimes B \longrightarrow B \quad .$$

Démontrons par exemple la proposition 1 ; la proposition 1 bis s'en déduira en passant aux algèbres duales. L'application diagonale Δ de B envoie $I(A)$ dans $I(A) \otimes A + A \otimes I(A)$, donc elle envoie $B.I(A)$ (image de l'application $f : B \otimes I(A) \longrightarrow B$) dans

$$B.I(A) \otimes B + B \otimes B.I(A) \quad ,$$

et par suite Δ passe au quotient et définit $C \longrightarrow C \otimes C$.

Le noyau de g contient évidemment A , car ce noyau contient $I(A)$ et K . Il reste à montrer que si la multiplication de B est associative, tout $x \in I(B)$ tel que $g(x) = 0$ est dans $I(A)$. Or $(\varepsilon \otimes 1) \circ g$ n'est autre que la projection $B \longrightarrow I(C)$; donc si $g(x) = 0$, x est dans le noyau de $B \longrightarrow I(C)$, c'est-à-dire dans $B.I(A)$. Supposons alors que

$$x \in \Big(\sum_{q \leq n} B_q \Big).I(A) \ , \qquad x \text{ homogène de degré } n + k \ ;$$

on va montrer que si $n \geqslant 1$, on a $x \in \Big(\sum_{q < n} B_q \Big).I(A)$; d'où, par récurrence, $x \in I(A)$, ce qu'on veut démontrer.

Pour cela, prenons une K-base (a_i) de l'espace vectoriel des éléments de degré k de $I(A)$; on a

$$x = \sum_i b_i \, a_i + x' \ , \quad \text{avec} \quad x' \in \Big(\sum_{q < n} B_q \Big).I(A) \ , \quad b_i \in B_n \quad .$$

Puisque $n \geqslant 1$, on a

$$g(b_i \, a_i) = (-1)^{(\deg a_i)(\deg b_i)} \, a_i \otimes p(b_i) \quad \text{modulo} \quad B \otimes \Big(\sum_{q < n} C_q \Big) \quad ,$$

en notant p l'application $B \longrightarrow I(C)$. De plus $g(x') \in B \otimes \Big(\sum_{q < n} C_q \Big)$; de sorte que l'hypothèse $g(x) = 0$ donne

$$\sum_i (-1)^{(\deg a_i)(\deg b_i)} \, a_i \otimes p(b_i) \in B \otimes \Big(\sum_{q < n} C_q \Big) \quad .$$

Puisque les a_i sont linéairement indépendants, on a donc $p(b_i) = 0$; autrement dit, $b_i \in B.I(A)$, et par suite (pour une raison de degré)

$$b_i \in \Big(\sum_{q < n} B_q \Big).I(A) \quad .$$

D'après l'associativité de la multiplication, on a

$$b_i\, a_i \in \Big(\sum_{q<n} B_q\Big).I(A)\ , \qquad \text{d'où}\quad x \in \Big(\sum_{q<n} B_q\Big).I(A)\ ,$$

ce qui achève la démonstration.

DÉFINITION. - Soit A une sous-algèbre de Hopf d'une algèbre de Hopf B dont la multiplication est associative. On dit que A est une sous-algèbre <u>normale</u> si l'idéal à gauche $B.I(A)$ est égal à l'idéal à droite $I(A).B$; alors le conoyau C de f est muni d'une multiplication induite par celle de B, et il en résulte que C <u>est une algèbre de Hopf</u>. On la note $B/\!/A$, et on l'appelle l'algèbre de Hopf quotient de l'algèbre de Hopf B par la sous-algèbre normale A. S'il en est ainsi, A est le noyau de chacune des deux applications composées

$$B \xrightarrow{\Delta} B \otimes B \longrightarrow B \otimes I(C)$$

$$B \xrightarrow{\Delta} B \otimes B \longrightarrow I(C) \otimes B \quad .$$

Dualement, soit A une algèbre de Hopf quotient d'une algèbre de Hopf B dont l'application diagonale est associative. On dit que A est un quotient <u>normal</u> de B si les deux applications composées

$$B \xrightarrow{\Delta} B \otimes B \longrightarrow B \otimes I(A)$$

$$B \xrightarrow{\Delta} B \otimes B \longrightarrow I(A) \otimes B$$

ont même noyau C ; alors C est une sous-algèbre de Hopf de B, qu'on note $A\backslash\!\backslash B$, et qu'on peut appeler le "noyau" de la surjection $B \longrightarrow A$. S'il en est ainsi, A est le conoyau de chacune des applications composées

$$B \otimes I(C) \longrightarrow B \otimes B \xrightarrow{\Phi} B$$

$$I(C) \otimes B \longrightarrow B \otimes B \xrightarrow{\Phi} B$$

Les propositions 3 et 3 bis entraînent :

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> B <u>une algèbre de Hopf dont la multiplication et l'application diagonale sont associatives. Si</u> A <u>est une sous-algèbre de Hopf normale de</u> B, <u>l'algèbre de Hopf quotient</u> $C = B/\!/A$ <u>est normale, et</u> $A = C\backslash\!\backslash B$. <u>Si</u> C <u>est une algèbre de Hopf, quotient normal de</u> B, <u>alors le "noyau"</u> A <u>de</u> $B \longrightarrow C$ <u>est une sous-algèbre de Hopf normale de</u> B, <u>et</u> $C = B/\!/A$.

REMARQUE. - Si A et B satisfont aux hypothèses de la proposition 3, alors les duales B^* et A^* satisfont aux hypothèses de la proposition 3 bis, et

réciproquement. Si la multiplication de B est associative, l'application diagonale de B^* est associative ; si de plus A est une sous-algèbre normale de B, alors A^* est un quotient normal de B^*, et l'algèbre de Hopf $C = B/\!/A$ a pour duale le "noyau" de $B^* \longrightarrow A^*$.

3. Exemples tirés de l'algèbre de Steenrod et de sa duale.

EXEMPLE 1. - Nous supposons p premier impair. Soit A la sous-algèbre de S_* engendrée par les ξ_i ; c'est une sous-algèbre de Hopf (à cause de la formule (12) de l'Exposé 11). A est une sous-algèbre normale, à cause de la commutativité de la multiplication de S_*. Il est clair que $C = S_*/\!/A$ s'identifie à l'algèbre extérieure engendrée par les τ_k, l'application diagonale étant

$$\tau_k \longrightarrow \tau_k \otimes 1 + 1 \otimes \tau_k$$

(les τ_k sont primitifs dans C). La duale C^* s'identifie à une sous-algèbre de Hopf de S^* : c'est la sous-algèbre engendrée par les β_k, qui est une algèbre extérieure ayant pour base les β^E. La sous-algèbre C^* est une sous-algèbre normale de S^* (ce qui se vérifierait directement sur la formule (18) de l'Exposé 11). De plus, ici, la duale $A^* = S^*/\!/C^*$ s'identifie à la sous-algèbre de Hopf de S^* ayant pour base les $\mathcal{P}^R$; mais il faut prendre garde que ceci n'est pas une sous-algèbre normale de S^*. En effet, si l'idéal a gauche de S^* engendré par les $\mathcal{P}^R$ autres que 1 était un idéal à droite, cet idéal contiendrait les β_{k+1} pour tout entier $k \geq 0$, puisque (d'après l'Exposé 11, corollaire au théorème 1), on a

$$\beta_{k+1} = \mathcal{P}^{p^k} \beta_k - \beta_k \mathcal{P}^{p^k} \quad ;$$

donc $S^*/\!/A^*$ se réduirait à la sous-algèbre engendrée par β_0 ; or τ_0 engendre dans S_* un idéal J qui est distinct de l'orthogonal de A^* (par exemple $\tau_1 \notin J$, et τ_1 est orthogonal à A^*), d'où une contradiction.

EXEMPLE 2. - Prenons $p = 2$. Soit t un entier > 0, et soit J_t l'idéal (bilatère) de S_* engendré par

$$(\xi_1)^{2^t}, \ldots, (\xi_i)^{2^{t-i+1}}, \ldots, (\xi_t)^2, \quad \xi_{t+1}, \quad \xi_{t+2}, \ldots$$

Soit C_t l'algèbre quotient de S_* par J_t ; multiplicativement, C_t est une algèbre de polynômes "tronquée" à t variables $\xi_1, \ldots, \xi_t$, les relations étant

$$(\xi_1)^{2^t} = 0, \ldots, (\xi_i)^{2^{t-i+1}} = 0, \ldots, (\xi_t)^2 = 0 \quad .$$

Il est immédiat que l'application diagonale de S_* (Exposé 11, formule (10)) passe au quotient dans C_t, car

$$\Delta_*(\xi_k)^{2^{t-k+1}} = \sum_{0 \leq i \leq k} (\xi_{k-i})^{2^{t-(k-i)+1}} \otimes (\xi_i)^{2^{t-k+1}} .$$

Ainsi C_t est une algèbre de Hopf, quotient de S_*. Sa duale, qu'on notera $S^*(t)$, s'identifie à une <u>sous-algèbre de Hopf de</u> S^* ; c'est la sous-algèbre ayant pour base les Sq^R, où R parcourt l'ensemble des suites $(r_1, \dots, r_k, \dots)$ telles que

$$r_1 < 2^t, \dots, r_k < 2^{t-k}, \dots \qquad (\text{donc } r_k = 0 \text{ pour } k > t).$$

On voit que la sous-algèbre $S^*(t)$ est de dimension finie, égale à $2^{t(t+1)/2}$; et qu'<u>elle contient</u> Sq^i <u>pour</u> $i < 2^t$; <u>et ne contient aucun des</u> Sq^i <u>pour</u> $i \geq 2^t$. (On verra plus loin (théorème 3) que $S^*(t)$ est la sous-algèbre de S^* engendrée par les Sq^i pour $i < 2^t$). L'algèbre S^* est réunion des sous-algèbres $S^*(t)$ de dimension finie, et par conséquent tous les éléments de S^* de degré > 0 sont <u>nilpotents</u> (MILNOR [2]).

EXEMPLE 2 bis. - On suppose p premier impair ; soit J_t l'idéal de S_* engendré par les $(\xi_i)^{p^{t-i+1}}$ et $\xi_{t+1}, \xi_{t+2}, \dots$ comme ci-dessus, et en outre par tous les τ_k $(k \geq 0)$. C'est encore une algèbre de polynômes tronquée en $\xi_1, \dots, \xi_t$, et une algèbre de Hopf. Sa duale est la sous-algèbre de Hopf de S^* ayant pour base les $\mathcal{P}^R$, où R parcourt l'ensemble des suites $(r_1, \dots, r_k, \dots)$ satisfaisant à

$$r_1 < p^t, \dots, r_k < p^{t-k}, \dots \qquad (\text{donc } r_k = 0 \text{ pour } k > t).$$

La sous-algèbre en question est de dimension finie, égale à $p^{t(t+1)/2}$; elle contient $\mathcal{P}^i$ pour $i < p^t$, et ne contient pas $\mathcal{P}^i$ pour $i \geq p^t$ (on verra (théorème 3) que c'est la sous-algèbre de S^* engendrée par les $\mathcal{P}^i$ pour $i < p^t$). Il en résulte que tous les $\mathcal{P}^R$ distincts de 1 sont nilpotents.

EXEMPLE 3. - On suppose p premier impair. Soit cette fois J_t l'idéal de S_* engendré par

$$(\xi_1)^{p^t}, \dots, (\xi_i)^{p^{t-i+1}}, \dots, (\xi_t)^p, \xi_{t+1}, \xi_{t+2}, \dots$$

et les τ_k pour $k > t$. L'algèbre quotient C_t est le produit tensoriel d'une

algèbre de polynômes tronquée en $\xi_1, \ldots, \xi_t$ et d'une algèbre extérieure engendrée par $\tau_o, \ldots, \tau_t$. De plus, l'application diagonale de S_* (Exposé 11, formules (12) et (13)) passe au quotient dans C_t, notamment parce que $\Delta_*(\tau_k)$, pour $k > t$, appartient à $J_t \otimes S_*$. Ainsi C_t est une algèbre de Hopf. Sa duale, qu'on notera $S^*(t)$, s'identifie à une sous-algèbre de Hopf de S^* ; c'est la sous-algèbre ayant pour base les $\beta^E \mathcal{P}^R$, où E et R parcourent l'ensemble des suites $E = (\varepsilon_o, \ldots, \varepsilon_k, \ldots)$ et $R = (r_1, \ldots, r_k, \ldots)$ telles que

$$\varepsilon_k = 0 \quad \text{pour} \quad k > t, \qquad r_k < p^{t-k} \qquad (\text{donc} \quad r_k = 0 \quad \text{pour} \quad k > t) ;$$

la sous-algèbre $S^*(t)$ est de dimension finie, égale à

$$2^{t+1}\, p^{t(t+1)/2} \quad .$$

Elle contient les $\mathcal{P}^i$ pour $i < p^t$, ainsi que les β_i pour $i \leq t$, mais ne contient pas $\mathcal{P}^i$ pour $i \geq p^t$, ni β_i pour $i > t$ (on verra (théorème 3) que $S^*(t)$ est la sous-algèbre engendrée par β_o et les $\mathcal{P}^i$ pour $i < p^t$). L'algèbre S^* est réunion des sous-algèbres $S^*(t)$ dont chacune est de dimension finie, donc chaque élément de S^* dont le degré est > 0 est nilpotent (MILNOR, [2]).

4. Recherche des éléments primitifs d'une algèbre de Hopf.

LEMME. - Soit A une algèbre de Hopf dont la multiplication soit commutative et associative. Supposons que A, comme algèbre, soit un produit tensoriel d'algèbres de polynômes, éventuellement tronquées, dont chacune a un générateur homogène x_k (de degré > 0). [Rappelons que d'après A. BOREL [1], toute algèbre de Hopf sur un corps parfait, dont la multiplication est commutative et associative, est de ce type. Mais nous n'utiliserons pas le résultat de BOREL]. Soit y un élément homogène, qui s'écrit comme polynôme en x_n à coefficients polynomiaux par rapport à des x_i tels que les $\Delta(x_i)$ ne fassent pas intervenir x_n. Alors, si y est primitif et contient effectivement x_n, y est le produit d'un scalaire et d'un élément de la forme

$$(x_n)^d + z \quad ,$$

où z ne dépend que des x_i, et où l'exposant d est une puissance de la caractéristique p ($d = 1$ si la caractéristique est nulle).

DÉMONSTRATION. - On a a priori

$$y = a_o(x_n)^d + a_1(x_n)^{d-1} + \ldots + a_n \quad ,$$

d étant un entier $\geqslant 1$, et les a_k étant des polynômes en les x_i . Par hypothèse, les $\Delta(a_k)$ ne font pas intervenir x_n . On suppose $a_o \neq 0$; on va alors montrer que $a_o \in K$, en raisonnant par l'absurde.

Notons A_k l'espace vectoriel engendré par les monômes en x_n dont le degré est k ; on a

$$\Delta(y) = (\Delta a_o).((x_n)^d \otimes 1) \quad \text{modulo} \quad A_{d-1} \otimes A \ ;$$

donc, si le degré de a_o était > 0 , on aurait, y étant primitif,

$$0 = \delta y = (\delta a_o + 1 \otimes a_o).((x_n)^d \otimes 1) \quad \text{modulo} \quad A_{d-1} \otimes A \quad ,$$

d'où

$$(x_n)^d \otimes a_o \in A_{d-1} \otimes A + J \otimes A \quad ,$$

J désignant l'idéal engendré par les x_i autres que x_n . Comme $a_o \neq 0$, ceci est absurde. Par conséquent il est bien prouvé que $\deg(a_o) = 0$, autrement dit $a_o \in K$.

En multipliant y par un scalaire $\neq 0$, on peut donc supposer désormais $a_o = 1$. On va montrer que $a_k = 0$ pour $0 < k < d$. Raisonnons encore par l'absurde : supposons que $a_k \neq 0$ pour un k tel que $0 < k < d$, et que $a_j = 0$ pour $0 < j < k$. Alors

$$y = (x_n)^d + a_k(x_n)^{d-k} + \ldots + a_n \ , \quad a_k \neq 0 \ , \quad \deg(a_k) > 0 \quad .$$

Posons

$$u = \Delta x_n - x_n \otimes 1 = \delta x_n + 1 \otimes x_n \quad .$$

On a

$$\Delta(v) = (x_n \otimes 1 + u)^d + (\Delta a_k).((x_n)^{d-k} \otimes 1) \quad \text{modulo} \quad A_{d-k-1} \otimes A \quad .$$

On en déduit

$$0 = \delta y = \sum_{i=1}^{d-1} [d-i \ , \ i] \, (x_n \otimes 1)^{d-i} \, u^i + (1 \otimes a_k + \delta a_k)(x_n \otimes 1)^{d-k}$$

$$\text{modulo} \quad A_{d-k-1} \otimes A \quad ,$$

(en notant $[t \ , \ t']$ le coefficient binomial $\frac{(t+t')!}{t! \ t'!}$) ; d'où, en remplaçant u par $\delta x_n + 1 \otimes x_n$,

$$\sum_{i=1}^{d-1} [d-i\ ,\ i]\,(x_n)^{d-i} \otimes (x_n)^i + (x_n)^{d-k} \otimes a_k \in A_{d-k-1} \otimes A + J \otimes A \quad .$$

Ceci impose $a_k = 0$, contrairement à l'hypothèse.

Finalement, on a $y = (x_n)^d + z$, z étant un polynôme en les x_i . Puisque y est primitif, on a

$$(\Delta x_n)^d - (x_n \otimes 1)^d - (1 \otimes x_n)^d = -\,\delta z \in J \otimes A \quad ;$$

or le premier membre est égal, modulo $J \otimes A$, à

$$\sum_{i=1}^{d-1} [d-i\ ,\ i]\,(x_n)^{d-i} \otimes (x_n)^i \quad ,$$

ce qui exige que les coefficients binomiaux $[d-i\ ,\ i]$ soient nuls pour $1 \leqslant i \leqslant d-1$. Il s'ensuit (résultat classique) que d est une puissance de la caractéristique p (si $p \neq 0$) , ou que $d = 1$ (si la caractéristique est nulle). Ceci achève la démonstration du lemme.

5. Application : éléments primitifs de S_* et de certains de ses quotients.

THÉORÈME 2.

a. Considérons l'une des algèbres de Hopf suivantes : dans le cas $p = 2$, l'algèbre S_* ou les algèbres quotients C_t considérées à l'exemple 2 ; dans le cas où p est premier impair, la sous-algèbre de S_* engendrée par les ξ_i ou l'une des algèbres quotients considérées dans l'exemple 2 bis. Dans chacune de ces algèbres de Hopf, les éléments primitifs sont les combinaisons linéaires d'éléments de la forme $(\xi_1)^d$, où d est une puissance de p .

b. Considérons pour p premier impair, l'une des algèbres de Hopf suivantes : soit l'algèbre S_* , soit l'un des quotients de S_* considérés à l'exemple 3. Dans une telle algèbre de Hopf, les éléments primitifs sont les combinaisons linéaires de τ_0 et des éléments de la forme $(\xi_1)^d$, où d est une puissance de p .

DÉMONSTRATION de a. - Soit y un élément primitif homogène. Supposons que ξ_n figure dans l'expression de y , mais qu'aucun des ξ_i , pour $i > n$, n'y figure. D'après le lemme, y est, à un facteur scalaire près, de la forme

$$(\xi_n)^d - z \quad ,$$

où d est une puissance de p , et z ne dépend que des ξ_i pour $i < n$. On va montrer que $n \geqslant 2$ conduit à une contradiction. On aurait

(1) $$\delta(z) = \sum_{i=1}^{n-1} (\xi_{n-i})^{p^i d} \otimes (\xi_i)^d \quad ;$$

donc, si B' désigne la sous-algèbre engendrée par les ξ_i pour $i \leq n-2$, on aurait

(2) $$\delta(z) = (\xi_1)^{p^{n-1}d} \otimes (\xi_{n-1})^d \quad \text{modulo} \quad A \otimes B' \quad .$$

Il en résulte que z, qui est un polynôme en ξ_{n-1} à coefficients dans B', contient effectivement ξ_{n-1} :

$$z = b_o(\xi_{n-1})^k + b_1(\xi_{n-1})^{k-1} + \dots ,$$

avec $b_o \neq 0$. Le degré de z étant celui de $(\xi_n)^d$ ne peut être égal à celui de $(\xi_{n-1})^k$, donc le degré de b_o est > 0. Alors, dans l'expression de δz, ξ_{n-1} figure à droite du produit tensoriel avec l'exposant k, mais jamais avec un exposant $> k$; en comparant à (2), cela prouve que $k = d$. Mais alors, dans l'expression de δz, ξ_{n-1} ne figure jamais, à gauche du produit tensoriel, avec un exposant $> d$, ce qui contredit (1).

Ce raisonnement est valable dans les algèbres quotients considérées dans les exemples 2 et 2 bis : en effet, puisque $y \neq 0$, on a $d < p^{t-n+1}$; il s'ensuit que $(\xi_1)^{p^{n-1}d}$ et $(\xi_{n-1})^d$ sont $\neq 0$ dans la relation (2), et que $(\xi_{n-1})^{pd}$ et $(\xi_1)^d$ sont $\neq 0$ dans la relation (1).

DÉMONSTRATION de b. - Soit y un élément primitif homogène. Si aucun des τ_n $(n \geq 0)$ ne figure dans y, on est ramené au cas précédent. Supposons donc que τ_n figure dans y, mais qu'aucun τ_i n'y figure pour $i > n$ $(n \geq 0)$. On va montrer que $n = 0$, ce qui, grâce au lemme, établira le théorème. Raisonnons par l'absurde, en supposant $n > 0$; y est de la forme $a\tau_n + b$, a et b étant des éléments tels que τ_n ne figure pas dans $\Delta(a)$ ni dans $\Delta(b)$. D'après le lemme, y est, à un facteur scalaire près, de la forme

$$\tau_n - z \quad ,$$

et puisque y est primitif, on a

(3) $$\delta(z) = \sum_{i=0}^{n-1} (\xi_{n-i})^{p^i} \otimes \tau_i \quad .$$

Donc ξ_{n-1} figure effectivement dans z, et on a

$$z = u\tau_{n-1} + v \quad ,$$

où u et v sont indépendants de τ_{n-1}. Le degré de u, égal à la différence des degrés de τ_n et de τ_{n-1}, est > 0 ; donc δz contient un terme en $\tau_{n-1} \otimes u$, ce qui est en contradiction avec (3).

Ce raisonnement est valable dans les algèbres quotients considérées à l'exemple 3. En effet, on a alors $n \leq t$, donc $(\xi_{n-1})^p \neq 0$.

Par dualité, le théorème 1 fournit des informations sur l'engendrement de l'algèbre S^* et de certaines de ses sous-algèbres. Rappelons en effet que si A et A^* sont deux algèbres de Hopf en dualité, l'espace $P(A)$ des éléments primitifs de A et l'espace $Q(A^*)$ des éléments "indécomposables" de A^* sont en dualité. Ici, dans le cas $p = 2$, l'élément de la base de Milnor de S^* qui correspond à $(\xi_1)^d \in S_*$ est Sq^d (Exposé 10, corollaire du lemme 3). Dans le cas où p est premier impair, l'élément de la base de Milnor de S^* qui correspond à $(\xi_1)^d$ est $\mathcal{P}^d$, et celui qui correspond à τ_0 est $\beta_0 = \beta$ (opérateur de Bockstein) (cf. Exposé 10, corollaire du lemme 4). Le théorème 2 donne aussitôt :

THÉORÈME 3.

a. Les Sq^{2^h} $(h = 0, 1, \ldots)$ forment un système minimal de générateurs de l'algèbre de Steenrod S^* pour $p = 2$. Pour $p = 2$, la sous-algèbre $S^*(t)$ admet pour système minimal de générateurs les Sq^{2^h} pour $0 \leq h < t$. Pour p premier impair, la sous-algèbre de S^* ayant pour base les $\mathcal{P}^R$ admet pour système minimal de générateurs les $\mathcal{P}^{p^h}$ $(h = 0, 1, \ldots)$; la sous-algèbre ayant pour base les $\mathcal{P}^R$, où R satisfait à

$$r_1 < p^t, \ldots, r_k < p^{t-k}, \ldots,$$

admet pour système minimal de générateurs les $\mathcal{P}^{p^h}$ pour $0 \leq h < t$ (donc cette sous-algèbre est engendrée par les $\mathcal{P}^i$ pour $i < p^t$).

b. Pour p premier impair, β et les $\mathcal{P}^{p^h}$ $(h = 0, 1, \ldots)$ forment un système minimal de générateurs pour l'algèbre de Steenrod S^* ; la sous-algèbre $S^*(t)$ admet pour système minimal de générateurs β et les $\mathcal{P}^{p^h}$ pour $0 \leq h < t$ (donc $S^*(t)$ est la sous-algèbre engendrée par β et les $\mathcal{P}^i$ pour $i < p^t$).

6. Antiautomorphismes d'une algèbre de Hopf.

Soit A une algèbre de Hopf. Pour commencer, on ne fait aucune hypothèse d'associativité ou de commutativité au sujet de la multiplication Φ et de l'application

diagonale Δ .

PROPOSITION 4. - <u>Il existe une application linéaire</u> $c : A \longrightarrow A$ <u>et une seule telle que l'application composée</u>

$$(4) \qquad A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \xrightarrow{1 \otimes c} A \otimes A \xrightarrow{\Phi} A$$

<u>soit égale à</u> $\eta \circ \varepsilon$. <u>Cette application est de degré</u> 0 .

REMARQUE. - La condition imposée à c peut encore s'exprimer comme suit : on a $c(1) = 1$, et l'application composée (4) est nulle sur $I(A)$.

DÉMONSTRATION. - On prouve l'existence et l'unicité de $c(x)$ par récurrence sur le degré de $x \in A$. Pour le degré 0 , on a $c(1) = 1$. Si x est de degré $n > 0$, soit

$$\delta x = \sum_i y_i \otimes z_i \qquad (\deg (z_i) < n) \qquad ;$$

la condition imposée à l'application (4) s'écrit

$$(5) \qquad c(x) = - x - \sum_i y_i . (cz_i) \qquad ,$$

ce qui détermine $c(x)$ puisque les $c(z_i)$ sont déjà connus. La relation (5) sert donc de définition récurrente à c .

REMARQUE. - L'application $c^* : A^* \longrightarrow A^*$ de l'algèbre duale est la transposée de c , comme on le voit en transposant (4).

<u>Algèbres de Hopf opposées</u>. - Etant donnée une algèbre de Hopf A , de multiplication Φ et d'application diagonale Δ , on va lui associer <u>trois</u> autres algèbres de Hopf, en général distinctes de A et distinctes entre elles. Elles ont le même support A , et ne diffèrent que par la multiplication et l'application diagonale. Soit Φ' l'application composée

$$A \otimes A \xrightarrow{T} A \otimes A \xrightarrow{\Phi} A \qquad ,$$

où T , comme d'habitude, transforme $x \otimes y$ en $(-1)^{(\deg x)(\deg y)} y \otimes x$. Les applications Φ' et Δ définissent sur A une structure d'algèbre de Hopf : la vérification est aisée, le point essentiel consistant à vérifier que le diagramme (1) de l'Exposé 10 est bien commutatif ; or cela revient à vérifier que le produit des trois permutations suivantes

$$(1 , 2 , 3 , 4) \longrightarrow (3 , 4 , 1 , 2)$$
$$(1 , 2 , 3 , 4) \longrightarrow (1 , 3 , 2 , 4)$$
$$(1 , 2 , 3 , 4) \longrightarrow (2 , 1 , 4 , 3)$$

est égale à la seconde d'entre elles. On notera que si Φ est associative, il en est de même de Φ' ; si Φ est commutative, alors $\Phi = \Phi'$, et la nouvelle structure d'algèbre de Hopf coïncide avec l'ancienne.

De même, soit Δ' l'application composée $T \circ \Delta$; alors Φ et Δ' définissent sur A une structure d'algèbre de Hopf ; si Δ est associative, il en est de même de Δ' ; si Δ est commutative, $\Delta' = \Delta$.

En combinant les deux résultats précédents, on voit que Φ' et Δ' définissant aussi sur A une structure d'algèbre de Hopf. Nous avons ainsi obtenu quatre structures d'algèbres de Hopf sur A (en comptant la structure initialement donnée).

On constate sur la formule (5) que c est aussi caractérisée par la condition que l'application composée

$$(4') \qquad A \xrightarrow{\Delta'} A \otimes A \xrightarrow{c \otimes 1} A \otimes A \xrightarrow{\Phi'} A$$

soit égale à $\eta \circ \varepsilon$.

PROPOSITION 5. - <u>Si la multiplication Φ est associative, on a</u>

$$(6) \qquad c(x.y) = (-1)^{pq}\, c(y).c(x) \ , \quad p = \deg(x) \ , \quad q = \deg(y) \quad .$$

<u>Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif</u>

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{c \otimes c} & A \otimes A \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi' \\ A & \xrightarrow{c} & A \end{array}$$

<u>ainsi que le diagramme analogue où les rôles de Φ et de Φ' sont échangés.</u>

DÉMONSTRATION. - C'est évident si $p = 0$ ou $q = 0$. On va faire la démonstration par récurrence sur $p + q$, en supposant p et q strictement positifs. Soit

$$\Delta x = \sum_i x'_i \otimes x''_i \ , \qquad \text{avec } x'_o = 1 \ , \quad x''_o = x \ ,$$

$$\Delta y = \sum_j y'_j \otimes y''_j \ , \qquad \text{avec } y'_o = 1 \ , \quad y''_o = y \ .$$

Notons p'_i , p''_i , q'_j , q''_j les degrés de x'_i , x''_j , y'_j , y''_j respectivement. On a

$$p'_i + p''_i = p \ , \quad q'_j + q''_j = q \ , \quad p''_i < p \ \text{ pour } i \neq 0 \ , \quad q''_j < q \ \text{ pour } j \neq 0 \ .$$

On voit que

$$\Delta(x.y) = \sum_{i,j} (-1)^{p''_i q'_j} (x'_i.y'_j) \otimes (x''_i.y''_j) \qquad ,$$

d'où, par la définition de c ,

$$(7) \qquad 0 = \sum_{i,j} (-1)^{p''_i q'_j} x'_i \cdot y'_j \cdot c(x''_i \cdot y''_j) \quad .$$

D'autre part, par la définition de c , on a $\sum_j y'_j \cdot (cy''_j) = 0$, d'où evidemment

$$(8) \qquad 0 = \sum_{i,j} (-1)^{p''_i q} x'_i \cdot y'_j \cdot (cy''_j) \cdot (cx''_i) \quad .$$

Comparons (7) et (8), et utilisons l'hypothèse de récurrence, qui donne

$$c(x''_i \cdot y''_j) = (-1)^{p''_i q''_j} (cy''_j) \cdot (cx''_i)$$

sauf peut-être pour $i = 0$, $j = 0$. En retranchant (8) de (7), on obtient alors la relation (6) à démontrer.

PROPOSITION 5 bis. - <u>Si l'application diagonale Δ est associative, le diagramme suivant est commutatif</u>

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "c"] \arrow[d, "\Delta'"] & A \arrow[d, "\Delta"] \\ A \otimes A \arrow[r, "c \otimes c"] & A \otimes A \end{tikzcd}$$

<u>ainsi que le diagramme analogue où les rôles de Δ et de Δ' sont échangés.</u>

DÉMONSTRATION. - On applique la proposition 5 à l'algèbre duale.

Avant de poursuivre, il nous faut préciser les notations : on notera $c(\Phi, \Delta)$ l'application c considérée jusqu'ici, et relative à la multiplication Φ et à l'application diagonale Δ . On a donc aussi des applications $c(\Phi', \Delta)$, $c(\Phi, \Delta')$ et $c(\Phi', \Delta')$.

PROPOSITION 6. - <u>Si la multiplication Φ est associative, les applications $c(\Phi, \Delta)$ et $c(\Phi, \Delta')$ sont des bijections, réciproques l'une de l'autre.</u>

DÉMONSTRATION. - Il suffira de montrer

$$(9) \qquad c(\Phi, \Delta) \circ c(\Phi, \Delta') = \text{identité},$$

car alors, en échangeant les rôles de Δ et Δ' , on obtiendra aussi

$$c(\Phi, \Delta') \circ c(\Phi, \Delta) = \text{identité}.$$

Pour abréger, notons c l'application $c(\Phi, \Delta)$, et c' l'application

$c(\Phi, \Delta')$. On veut montrer que

(10) $$cc'(x) = x ,$$

par récurrence sur le degré de x (c'est trivial pour $x = 1$). Soit

$$\delta x = \sum_i y_i \otimes z_i ;$$

on a

(11) $$cx + x + \sum_i y_i . (cz_i) = 0$$

(11') $$x + c'x + \sum_i (-1)^{p_i q_i} z_i . (c' y_i) = 0 ,$$

avec $p_i = \deg (y_i)$, $q_i = \deg (z_i)$. Appliquons c aux deux membres de la relation (11'), en tenant compte du fait que c est un antihomomorphisme de la multiplication, puisque celle-ci est associative (proposition 5) ; il vient :

$$cx + cc' x + \sum_i (cc' y_i) . (cz_i) = 0 ,$$

ce qui, par comparaison avec (11), prouve (10) par récurrence sur le degré. La proposition 6 est ainsi démontrée.

On a une proposition duale :

PROPOSITION 6 bis. - Si l'application diagonale Δ est associative, les applications $c(\Phi, \Delta)$ et $c(\Phi', \Delta)$ sont des bijections, réciproques l'une de l'autre.

REMARQUE. - Il suffit donc que l'une au moins des applications Φ ou Δ soit associative, pour que chacune des quatre applications $c(\Phi, \Delta)$, $c(\Phi, \Delta')$, $c(\Phi', \Delta)$, $c(\Phi', \Delta')$ soit bijective. De plus, si Φ est associative et Δ commutative, la transformation $c(\Phi, \Delta)$ est involutive (i. e. est sa propre inverse) ; il en est de même lorsque Δ est associative et Φ commutative.

PROPOSITION 7. - Lorsque Φ et Δ sont toutes deux associatives, on a

(12) $$c(\Phi, \Delta) = c(\Phi', \Delta') ,$$

et l'application $c(\Phi, \Delta)$ est un isomorphisme de l'algèbre de Hopf (A, Φ, Δ) sur l'algèbre "doublement opposée" (A, Φ', Δ') .

DÉMONSTRATION. - D'après les propositions 6 et 6 bis, on a

$c(\Phi, \Delta) \circ c(\Phi, \Delta') = \text{identité},$

$c(\Phi', \Delta) \circ c(\Phi, \Delta) = \text{identité},$

d'où, par un raisonnement classique, $c(\Phi', \Delta) = c(\Phi, \Delta')$. En remplaçant Φ par Φ' dans cette relation, on obtient (12). Que $c(\Phi, \Delta)$ soit un isomorphisme de (A, Φ, Δ) sur (A, Φ', Δ') résulte des propositions 5 et 5 bis.

REMARQUES. - La relation (12) exprime ceci : si

$$\delta x = \sum_i y_i \otimes z_i \quad ,$$

on a à la fois

$$cx + x + \sum_i y_i.(cz_i) = 0 \qquad \text{et}$$

$$cx + x + \sum_i (cy_i).z_i = 0 \quad .$$

On notera que si Φ et Δ sont associatives, les quatre applications c se réduisent à deux, et que si en outre Φ <u>ou</u> Δ est commutative, toutes les applications c sont confondues. Ce dernier cas se présente pour l'algèbre de Steenrod.

<u>Cas de l'algèbre de Steenrod</u> S^* : les $c(Sq^i)$, resp. les $c(\mathcal{P}^i)$, sont les <u>opérations de Thom</u>, qui interviennent dans le problème du plongement d'un espace compact dans un espace numérique R^n de dimension donnée (cf. [5]). Pour calculer c dans l'algèbre S^*, il est commode de calculer c dans l'algèbre duale S_*, puis de prendre la transposée : dans S_*, on a

$$\xi_k + c\xi_k + \sum_{i=1}^{k-1} (\xi_{k-i})^{p^i}.(c\xi_i) = 0 \quad ,$$

et, si p est premier impair,

$$\tau_k + c\tau_k + \sum_{i=0}^{k-1} (\xi_{k-i})^{p^i}.(c\tau_i) = 0 \quad .$$

MILNOR [2] en déduit des formules explicites pour c.

EXEMPLES. - Pour $p = 2$, on a, dans l'algèbre S^* :

$$c(Sq^1) = Sq^1 \ , \quad c(Sq^2) = Sq^2 \ , \quad c(Sq^3) = Sq^2\, Sq^1 \quad ,$$

$$c(Sq^4) = Sq^4 + Sq^3\, Sq^1 \ , \quad c(Sq^5) = Sq^4\, Sq^1 \ , \text{ etc.}$$

Puisque c est un antiautomorphisme involutif de l'algèbre S^*, c permet de

transformer tout problème concernant les idéaux à gauche de S^* en problème concernant les idéaux à droite. Par exemple, en utilisant la table de multiplication de la base de Milnor (Exposé 11, paragraphe 4), on prouve facilement les deux assertions suivantes (pour $p = 2$) :

- Les $\theta \in S^*$ tels que $Sq^2 . \theta = 0$ sont exactement les éléments de l'idéal à droite $Sq^2 . Sq^1 . S^*$;

- Les $\theta \in S^*$ tels que $Sq^2 . Sq^1 . \theta = 0$ sont exactement les éléments de l'idéal à droite engendré par Sq^1 et $Sq^2 . Sq^3$.

En transformant par c, on obtient :

Les $\theta \in S^*$ tels que $\theta . Sq^2 = 0$ sont exactement les éléments de l'idéal à gauche engendré par Sq^3 ;

Les $\theta \in S^*$ tels que $\theta . Sq^3 = 0$ sont exactement ceux de l'idéal à gauche engendré par Sq^1 et $Sq^2 . Sq^3$ (qui est aussi l'idéal à gauche engendré par Sq^1 et Sq^5).

Il y a d'autres résultats du même type ; ils sont utiles dans le calcul des groupes d'homotopie des sphères, par la méthode qui consiste à tuer les groupes d'homotopie successifs au moyen de fibrations ayant en fibre des espaces d'Eilenberg-MacLane.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (Armand). - Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts. Annals of Math., t. 57, 1953, p. 115-207.

[2] MILNOR (J.). - The Steenrod algebra and its dual, Annals of Math., t. 67, 1958, p. 150-171.

[3] MILNOR (J.) and MOORE (J. C.). - On the structure of Hopf algebras. - Princeton, 1959, multigraphié.

[4] MOORE (J. C.). - Seminar Notes, 1958.

[5] THOM (R.). - Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comment. Math. Helvet., t. 28, 1954, p. 17-86.