Italo Giorgiutti

L’algèbre de Steenrod et sa duale (suite)

Séminaire Henri Cartan, tome 11, nº 2 (1958-1959), exp. nº 11, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_2_A2_0>

L'ALGÈBRE DE STEENROD ET SA DUALE (Suite)

par Italo GIORGIUTTI

On se propose d'expliciter l'application diagonale de l'algèbre de Hopf S_* , et d'en déduire la structure multiplicative de l'algèbre de Steenrod S^* [1].

1. Opérations de S^* dans l'homologie $H_*(X ; Z_p)$.

On notera simplement $H_*(X)$ et $H^*(X)$ l'homologie et la cohomologie à coefficients dans Z_p . Supposons d'abord que l'ensemble simplicial X soit de type fini, c'est-à-dire que X soit engendré (comme ensemble simplicial) par un nombre fini d'éléments. Alors X ne possède qu'un nombre fini d'éléments non dégénérés, et par suite les espaces vectoriels $H_*(X)$ et $H^*(X)$ sont de dimension finie. Il en résulte que non seulement $H^*(X)$ est le dual de $H_*(X)$, mais $H_*(X)$ s'identifie au dual de $H^*(X)$. Puisque S^* opère à gauche dans $H^*(X)$, alors, par transposition, S^* opère à droite dans $H_*(X)$. On a donc, pour $u \in H_*(X)$, $y \in H^*(X)$, $s \in S^*$:

$$(1) \qquad \langle u.s , y \rangle = \langle u , s.y \rangle .$$

De plus, les opérations de S^* dans $H_*(X)$ ont un caractère fonctoriel vis-à-vis de X (toujours supposé de type fini). Or tout ensemble simplicial X est limite inductive de sous-ensembles simpliciaux de type fini ; donc, par passage à la limite inductive, on obtient des opérations de S^* à droite dans $H_*(X)$, pour un X quelconque ; ces opérations ont un caractère fonctoriel, et satisfont encore à (1). Il en résulte que, dans le cas d'un ensemble simplicial X quelconque, les opérations de S^* dans $H^*(X)$ ne sont autres que les transposées des opérations de S^* dans l'homologie $H_*(X)$ (rappelons que $H^*(X)$ s'identifie toujours au dual $\mathrm{Hom}\,(H_*(X) , Z_p)$).

Puisque S^* opère associativement dans $H^*(X)$ (par définition de la multiplication dans S^*), il en est de même pour les opérations dans $H_*(X)$; autrement dit, le diagramme suivant est commutatif

---

[1] Consulter : MILNOR (J.). - The Steenrod algebra and its dual, Annals of Math., t. 67, 1958, p. 150-171.

(1)
$$\begin{array}{ccc} H_*(X) \otimes S^* \otimes S^* & \xrightarrow{\lambda \otimes 1} & H_*(X) \otimes S^* \\ \downarrow{\scriptstyle 1 \otimes \Phi^*} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} \\ H_*(X) \otimes S^* & \xrightarrow{\lambda} & H_*(X) \end{array}$$

en notant $\lambda : H_*(X) \otimes S^* \to H_*(X)$ l'application définissant la structure de S^*-module à droite de $H_*(X)$; et Φ^* la multiplication de S^* .

L'application $C^* : H^*(X) \otimes H^*(X) \to H^*(X)$ définissant la multiplication en cohomologie est, on le sait, transposée d'une application diagonale $C_* : H_*(X) \to H_*(X) \otimes H_*(X)$, tout au moins si X est de type fini. Or on a vu dans l'Exposé 10 (cf. aussi l'Exposé 9, page 9-10) que, pour $s \in S^*$, on a $C^* \circ (\Delta^* s) = s \circ C^*$, Δ^* désignant l'application diagonale $S^* \to S^* \otimes S^*$. Par transposition, on a donc $(\Delta^* s) \circ C_* = C_* \circ s$ (égalité de deux applications de $H_*(X)$ dans $H_*(X) \otimes H_*(X)$), et cette relation est valable même si X n'est pas de type fini. Cette relation exprime la commutativité du diagramme

(2)
$$\begin{array}{ccccc} H_* \otimes S^* & \xrightarrow{C_* \otimes \Delta^*} & H_* \otimes H_* \otimes S^* \otimes S^* & \xleftarrow{1 \otimes T \otimes 1} & H_* \otimes S^* \otimes H_* \otimes S^* \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & & & \downarrow{\scriptstyle \lambda \otimes \lambda} \\ H_* & & \xrightarrow{\qquad C_* \qquad} & & H_* \otimes H_* \end{array}$$

T désignant toujours la transformation définie par

$$T(u \otimes s) = (-1)^{qr}\, s \otimes u \ , \qquad q = \deg(u) \ , \quad r = \deg(s) \quad .$$

2. Etude du dual de $H_*(X) \otimes S^*$.

Puisque S^k est de dimension finie, chacun des deux espaces vectoriels S^k et S_k s'identifie au dual de l'autre. Il en résulte que le dual de $H_r(X) \otimes S^k$ s'identifie à $H^r(X) \otimes S_k$. Graduons $H_*(X) \otimes S^*$ en convenant que l'espace des éléments de degré (inférieur) i est $\sum_k H_{k+i}(X) \otimes S^k$. Le dual s'identifie à $\prod_k H^{k+i}(X) \otimes S_k$. Le dual-gradué de $H_*(X) \otimes S^*$ est donc $\sum_i \left(\prod_k H^{k+i}(X) \otimes S_k\right)$; on le notera $H^*(X) \widehat{\otimes} S_*$ (produit tensoriel "complété"). Un élément de $H^*(X) \widehat{\otimes} S_*$ sera noté $\sum_j u_j \otimes s_j$, la sommation étant infinie.

On observera qu'on a un isomorphisme canonique

(3) $$H^*(X) \widehat{\otimes} S_*) \widehat{\otimes} S_* \approx H^*(X) \widehat{\otimes} (S_* \otimes S_*) \quad .$$

D'autre part, la multiplication C^* de $H^*(X)$ et la multiplication Φ_* de S_* définissent sur $H^*(X) \hat{\otimes} S_*$ une structure d'algèbre graduée.

La transposée de l'application λ (qui est de degré 0) est une application linéaire $\lambda^* : H^*(X) \to H^*(X) \hat{\otimes} S_*$, de degré 0 .

PROPOSITION 1. - L'application λ^* est un homomorphisme d'algèbres graduées, et le diagramme suivant est commutatif

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} H^*(X) & \xrightarrow{\lambda^*} & H^*(X) \hat{\otimes} S_* \\ \downarrow \lambda^* & & \downarrow 1 \hat{\otimes} \Delta_* \\ H^*(X) \hat{\otimes} S_* & \xrightarrow{\lambda^* \hat{\otimes} 1} (H^*(X) \hat{\otimes} S_*) \hat{\otimes} S_* \approx & H^*(X) \hat{\otimes} (S_* \otimes S_*) \end{array}$$

DÉMONSTRATION. - Transposons le diagramme (2) : on obtient un diagramme commutatif qui exprime précisément que λ^* est un homomorphisme d'algèbres graduées. Quant au diagramme (4), il est transposé du diagramme commutatif (1).

PROPOSITION 2. - Soit y un élément homogène de $H^*(X)$. La relation

$$(5) \qquad \lambda^*(y) = \sum_i y_i \otimes \omega_i$$

(somme infinie, où les y_i sont des éléments homogènes de $H^*(X)$ et les ω_i des éléments homogènes de S_*) équivaut à la relation

$$(6) \qquad s.y = \sum_i (-1)^{(\deg \omega_i)(\deg y_i)} < s , \omega_i > y_i \quad \text{pour tout} \quad s \in S^* .$$

(La somme du second membre de (6) est finie).

En effet, soit u un élément quelconque de $H_*(X)$. On a

$$(7) \qquad \langle u \otimes s , \lambda^* y \rangle = \langle u.s , y \rangle = \langle u , s.y \rangle .$$

Si (5) a lieu, le premier membre de (7) est égal à

$$(8) \qquad \sum_i (-1)^{(\deg \omega_i)(\deg y_i)} \langle u , y_i \rangle . \langle s , \omega_i \rangle ,$$

et comme il est égal au dernier membre de (7) quel que soit u , la relation (6) s'ensuit. Inversement, si (6) a lieu, en faisant le produit scalaire avec $u \in H_*(X)$, on trouve que $\lambda^* y$ et $\sum_i y_i \otimes \omega_i$ ont même produit scalaire avec $u \otimes s$, quels que soient u et s , donc sont égaux, ce qui prouve (5).

3. Explicitation de l'application diagonale de S_* .

Premier cas : $p = 2$.

Prenons $X = K(Z_2 , 1)$. On a vu (Exposé 10, paragraphe 4) que $H^*(X)$ est une algèbre de polynômes à un générateur x de degré 1 , et que

$$s.x = \sum_{i \geq 0} \langle s , \xi_i \rangle x^{2^i} \quad \text{pour} \quad s \in S^* ,$$

les ξ_i étant les générateurs de l'algèbre de polynômes S_* (théorème 1 de l'Exposé 10). Compte tenu de la proposition 2, cette relation équivaut à

$$(9) \qquad \lambda^* x = \sum_{i \geq 0} x^{2^i} \otimes \xi_i \qquad \text{(sommation infinie)}$$

On peut considérer que la relation (9) sert de définition aux éléments $\xi_i \in S_{2^i - 1}$.

Puisque λ^* est un homomorphisme d'algèbres (proposition 1), on a

$$\lambda^*(x^{2^j}) = \sum_i x^{2^{i+j}} \otimes (\xi_i)^{2^j} \quad .$$

Exprimons que le diagramme (4) est commutatif ; on trouve

$$\sum_{i,j} x^{2^{i+j}} \otimes (\xi_j)^{2^i} \otimes \xi_i = \sum_k x^{2^k} \otimes \Delta_*(\xi_k) ,$$

d'où

$$(10) \qquad \boxed{\Delta_*(\xi_k) = \sum_{0 \leq i \leq k} (\xi_{k-i})^{2^i} \otimes \xi_i} \quad ,$$

ou, en explicitant :

$$\Delta_*(\xi_k) = \xi_k \otimes 1 + (\xi_{k-1})^2 \otimes \xi_1 + (\xi_{k-2})^4 \otimes \xi_2 + \dots$$

$$\dots + (\xi_1)^{2^{k-1}} \otimes \xi_{k-1} + 1 \otimes \xi_k \quad .$$

En particulier, $\Delta_*(\xi_1) = \xi_1 \otimes 1 + 1 \otimes \xi_1$.

Deuxième cas : p premier impair.

Prenons $X = K(Z_p , 1)$. On a vu (Exposé 10, paragraphe 4) que $H^*(X)$ est produit tensoriel d'une algèbre extérieure à un générateur x de degré 1 , et d'une algèbre de polynômes à un générateur y de degré 2 ; de plus (Exposé 10, relations (7)) :

$$\begin{cases} s.y = \sum\limits_{i \geq 0} \langle s , \xi_i \rangle y^{p^i} \\ s.x = \langle s , \xi_0 \rangle x + \sum\limits_{i \geq 0} \langle s , \tau_i \rangle y^{p^i} \end{cases}$$

pour tout $s \in S^*$. Compte tenu de la proposition 2, ces relations équivalent à

$$(11) \qquad \begin{cases} \lambda^* y = \sum\limits_{i \geq 0} y^{p^i} \otimes \xi_i \\ \lambda^* x = x \otimes \xi_0 + \sum\limits_{i \geq 0} y^{p^i} \otimes \tau_i \end{cases} \qquad \text{(sommations infinies)}$$

On peut considérer que ces relations servent de <u>définition</u> aux éléments ξ_i et τ_i qui engendrent l'algèbre S_* (théorème 2 de l'Exposé 10).

Un raisonnement et un calcul tout pareils à ceux faits dans le cas $p = 2$ montrent que

$$(12) \qquad \boxed{\Delta_*(\xi_k) = \sum_{0 \leq i \leq k} (\xi_{k-i})^{p^i} \otimes \xi_i} \quad .$$

(observer que (12) redonne (10) si l'on y fait $p = 2$).

Pour calculer $\Delta_*(\tau_k)$, on observe d'abord que la première relation (11) donne

$$\lambda^*(y^{p^j}) = \sum_{i \geq 0} y^{p^{i+j}} \otimes (\xi_i)^{p^j} \quad ,$$

puis on écrit que le diagramme (4) est commutatif, lorsqu'on part de l'élément $x \in H^*(X)$; on trouve

$$x \otimes \xi_0 \otimes \xi_0 + \sum_{i \geq 0} y^{p^i} \otimes \tau_i \otimes \xi_0 + \sum_{i,j} y^{p^{i+j}} \otimes (\xi_j)^{p^i} \otimes \tau_i =$$

$$= x \otimes (\Delta_* \xi_0) + \sum_{k \geq 0} y^{p^k} \otimes \Delta_*(\tau_k) \quad ,$$

d'où

$$(13) \qquad \boxed{\Delta_*(\tau_k) = \tau_k \otimes 1 + \sum_{0 \leq i \leq k} (\xi_{k-i})^{p^i} \otimes \tau_i \quad .}$$

On a en particulier

$$\Delta_*(\tau_0) = \tau_0 \otimes 1 + 1 \otimes \tau_0 \quad .$$

Les formules (10), (12) et (13), jointes aux théorèmes 1 et 2 de l'Exposé 10, explicitent, en principe, l'algèbre de Hopf S_*, aussi bien dans le cas $p = 2$ que dans le cas où p est premier impair. Par dualité, l'algèbre de Steenrod S^* se trouve aussi explicitée.

Pour toute suite $R = (r_1 , \ldots , r_k , \ldots)$ formée d'entiers ≥ 0, nuls sauf un nombre fini, on notera ξ^R le monôme $(\xi_1)^{r_1} \ldots (\xi_k)^{r_k} \ldots$ De même, pour toute suite $E = (\varepsilon_0 , \varepsilon_1 , \ldots \varepsilon_k , \ldots)$ d'entiers égaux à 0 ou 1, et nuls sauf un nombre fini, on notera τ^E le monôme $(\tau_0)^{\varepsilon_0} \ldots (\tau_k)^{\varepsilon_k} \ldots$ Pour $p = 2$, les monômes ξ^R forment une Z_2-base de l'algèbre S_* ; pour p premier impair, les monômes $\tau^E \xi^R$ forment une Z_p-base de S_*.

Soit $T = (t_1 , \ldots , t_k , \ldots)$. On se propose d'expliciter $\Delta_*(\xi^T)$. Pour tout système de $k + 1$ entiers $n_0 , \ldots , n_k$, notons $[n_0 , \ldots , n_k]$ le coefficient binomial

$$\frac{(n_0 + \ldots + n_k)!}{n_0! \ldots n_k!} \quad ;$$

en élevant les deux membres de (12) à la puissance t_k, on trouve que $\Delta_*(\xi_k^{t_k})$ est égal à la somme, relative à tous les systèmes de $n + 1$ entiers $n_0 , \ldots , n_k$ dont la somme est égale à t_k, des expressions

$$[n_0 , \ldots , n_k] \, \xi_k^{n_0} \, \xi_{k-1}^{pn_1} \, \xi_{k-2}^{p^2 n_2} \ldots \xi_1^{p^{k-1} n_{k-1}} \otimes \xi_1^{n_1} \, \xi_2^{n_2} \ldots \xi_k^{n_k}$$

Faisons maintenant le produit de ces expressions pour toutes les valeurs de $k = 1 , 2 , \ldots$; on obtient

$$\Delta_*(\xi^T) = \sum_{T(N)=T} b(N) \, \xi^{R(N)} \otimes \xi^{S(N)} \quad , \tag{14}$$

la sommation étant étendue à toutes les matrices $N = (n_{i,j})$ où i et j prennent indépendamment toutes les valeurs antières ≥ 0, telles que $n_{0,0} = 0$ et que les $n_{i,j}$ soient nuls sauf un nombre fini, et telles enfin que $T(N)$ soit égal à T. Expliquons les notations $T(N)$, $R(N)$, $S(N)$ et $b(N)$: on pose

$$T(N) = (t_1(N) , \ldots , t_k(N) , \ldots) \text{ , avec } t_k(N) = \sum_{i+j=k} n_{i,j} \quad ;$$

$$R(N) = (r_1(N) , \ldots , r_k(N) , \ldots) \text{ , avec } r_k(N) = \sum_j p^j \, n_{k,j} \quad ;$$

$$S(N) = (s_1(N) , \ldots , s_k(N) , \ldots) \text{ , avec } s_k(N) = \sum_i n_{i,k} \quad ;$$

$b(N)$ est l'entier $\prod_k t_k(N)! / \prod_{i,j} n_{i,j}!$.

4. La base de Milnor dans l'algèbre de Steenrod S^*.

Commençons par le cas où $p = 2$. Pour toute suite $R = (r_1 , \dots , r_k , \dots)$ d'entiers ≥ 0, nuls sauf un nombre fini, on notera

$Sq^R = Sq^{r_1,\dots,r_k,\dots}$ l'élément de la base de S^*, duale de la base de S_* formée des ξ^R. Les Sq^R constituent la "base de Milnor" de S^*. Observons que $Sq^{i,0,\dots,0,\dots}$ n'est autre que Sq^i (Exposé 10, corollaire du lemme 3).

Il est immédiat que

$$(15) \qquad \Delta^*(Sq^R) = \sum Sq^{R'} \otimes Sq^{R''} \quad ,$$

la sommation étant étendue à tous les couples (R' , R'') tels que $R' + R'' = R$ (c'est-à-dire $r'_k + r''_k = r_k$ pour tout k). D'autre part, la formule (10) donne par transposition, la table de multiplication de l'algèbre S^* :

$$(16) \qquad Sq^R . Sq^S = \sum_N b(N) \; Sq^{T(N)} \quad ,$$

la sommation étant étendue à toutes les matrices N telles que $R(N) = R$, $S(N) = S$.

Voici quelques cas particuliers de la formule (16). Supposons d'abord que tous les termes de la suite R soient égaux à 0 ou 1 ; on a alors

$$(16.\ a) \qquad Sq^R . Sq^S = [r_1 , s_1] \dots [r_k , s_k] \dots Sq^{R+S} \quad ;$$

le coefficient de Sq^{R+S} dans le second membre est égal à 1 si et seulement si s_k est pair pour tous les k tels que $r_k = 1$; sinon il est égal à 0. On a notamment

$$Sq^1 \, Sq^i = (1 + i) \, Sq^{1+i} \quad ,$$
$$Sq^{0,0,\dots,1,0,\dots} \, Sq^i = Sq^{i,0,\dots,1,0,\dots} \quad .$$

Plus particulièrement, si les termes de R et ceux de S sont tous égaux à 0 ou 1, on a

$$(16.\ b) \qquad Sq^R . Sq^S = \begin{cases} Sq^{R+S} & \text{si tous les termes de } R + S \text{ sont } 0 \text{ ou } 1 , \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Donc les Sq^R (relatifs aux suites R ne contenant que 0 et 1) forment la base d'une sous-algèbre commutative de S^* ; tous ces Sq^R, sauf $Sq^0 = 1$, sont de carré nul, et la sous-algèbre en question est donc l'algèbre extérieure engendrée par Sq^1, $Sq^{0,1}$, $Sq^{0,0,1}$, etc.

Il sera commode de noter Sq_k l'élément Sq^R, où $R = (r_1 ; \dots ; r_k ; \dots)$ est tel que

$$\begin{cases} r_i = 0 & \text{pour } i \neq k \\ r_k = 1 \end{cases}$$

Ainsi $Sq_1 = Sq^1$, $Sq_2 = Sq^{0,1}$, etc.

EXERCICE. - (Toujours dans le cas $p = 2$) : vérifier que les Sq_k admettent la définition récurrente

$$Sq_{k+1} = Sq^{2^k}\, Sq_k + Sq_k\, Sq^{2^k} , \qquad k \geq 1 .$$

Etudions maintenant le cas où p est premier impair. Pour toute suite $R = (r_1 , \dots ; r_k ; \dots)$ d'entiers ≥ 0, nuls sauf un nombre fini, on notera $\mathcal{P}^R$ celui des éléments de la base de S^*, duale de la base formée des $\tau^{E'}.\xi^{R'}$, qui correspond à l'élément ξ^R. De même, pour toute suite $E = (\varepsilon_0 , \dots , \varepsilon_k ; \dots)$ d'entiers égaux à 0 ou 1, nuls sauf un nombre fini, on notera β^E celui des éléments de la base de S^* qui correspond à l'élément τ^E de la base de S_*. On a donc

$\langle \mathcal{P}^R , \xi^R \rangle = 1$, $\langle \mathcal{P}^R , \tau^E.\xi^{R'} \rangle = 0$ si $E \neq (0)$, ou si $E = (0)$ et $R' \neq R$.

$\langle \beta^E , \tau^E \rangle = 1$, $\langle \beta^E , \tau^{E'}.\xi^R \rangle = 0$ si $R \neq (0)$, ou si $R = (0)$ et $E' \neq E$.

D'après l'Exposé 10 (corollaire du lemme 4), l'élément $\mathcal{P}^{i,0,0,\dots}$ n'est autre que $\mathcal{P}^i$; de même, $\beta^{1,0,0,\dots}$ n'est autre que l'opération de Bockstein β. Il sera commode de noter $\mathcal{P}_k$ (pour k entier ≥ 1) l'élément $\mathcal{P}^R$, où $R = (r_1 , \dots ; r_k ; \dots)$ est tel que $r_i = 0$ pour $i \neq k$, $r_k = 1$; et on notera β_k (pour tout entier ≥ 0) l'élément β^E, où $E = (\varepsilon_0 , \dots , \varepsilon_k ; \dots)$ est tel que $\varepsilon_i = 0$ pour $i \neq k$, $\varepsilon_k = 1$. L'élément $\mathcal{P}_k$ a le degré $2(p^k - 1)$, et l'élément β_k a le degré $2p^k - 1$; β_0 n'est autre que β.

PROPOSITION 3. - Le produit $\beta^E.\mathcal{P}^R$ a un produit scalaire égal à 1 avec $\tau^E.\xi^R$, et égal à 0 avec tout autre élément de la base de S_*. Autrement dit, les produits $\beta^E.\mathcal{P}^R$ constituent la base duale de la base de S_*.

DÉMONSTRATION. - On veut montrer que $\langle \Phi^*(\beta^E \otimes \mathcal{P}^R) , \tau^{E'}.\xi^{R'} \rangle$ est égal à 1 si $E = E'$ et $R = R'$, à 0 dans le cas contraire. Or c'est égal à

$$< \beta^{E} \otimes \mathcal{P}^{R} , \Delta_*(\tau^{E'}) . \Delta_*(\xi^{R'}) > \quad ,$$

et les formules (13) et (14) montrent aussitôt que ceci est égal à

$$< \beta^{E} \otimes \mathcal{P}^{R} , (\tau^{E'} \otimes 1).(1 \otimes \xi^{R'}) > = < \beta^{E} , \tau^{E'} > . < \mathcal{P}^{R} , \xi^{R'} > \quad ,$$

d'où la proposition.

THÉORÈME 1. - Les β^{E} forment la base d'une sous-algèbre de S^* ; d'une façon précise, le produit $\beta^{E}.\beta^{E'}$ est nul, sauf si la suite $E + E'$ ne contient que 0 et 1 , auquel cas on a

$$\beta^{E}.\beta^{E'} = (-1)^{q} \beta^{E+E'} \quad ,$$

où q désigne le nombre des couples d'entiers k , $h \geq 0$ tels que

$$\varepsilon_k = 1 , \quad \varepsilon'_h = 1 , \quad k > h \quad .$$

(La sous-algèbre ayant pour base les β^{E} est donc l'algèbre extérieure construite sur les β_k $(k \geq 0)$, ces éléments anticommutant deux à deux ; et l'on a, si $E = (\varepsilon_0 , \dots , \varepsilon_k , \dots)$, $\beta^{E} = (\beta_0)^{\varepsilon_0} \dots (\beta_k)^{\varepsilon_k} \dots$).

Les $\mathcal{P}^{R}$ engendrent une sous-algèbre de S^* , dont la table de multiplication est donnée par

$$\mathcal{P}^{R}.\mathcal{P}^{S} = \sum_{N} b(N)\, \mathcal{P}^{T(N)} \quad , \tag{17}$$

la sommation étant étendue à toutes les matrices N telles que $R(N) = R$, $S(N) = S$. Enfin, la loi de commutation des deux sous-algèbres précédentes est donnée par la formule

$$\mathcal{P}^{R}.\beta_k = \beta_k.\mathcal{P}^{R} + \beta_{k+1}\mathcal{P}^{R-(p^k,0,\dots)} + \beta_{k+2}\mathcal{P}^{R-(0,p^k,0,\dots)} + \beta_{k+3}\mathcal{P}^{R-(0,0,p^k,0,\dots)} + \dots \tag{18}$$

Toutes les assertions du théorème sont des conséquences faciles des formules (13) et (14) ; on laisse au lecteur le soin de les vérifier.

COROLLAIRE. - La formule (18) donne notamment

$$\beta_{k+1} = \mathcal{P}^{p^k}.\beta_k - \beta_k.\mathcal{P}^{p^k} \tag{18. a}$$

pour tout entier $k \geq 0$.

Enfin, on explicite aisément l'application diagonale de S^*, transposée de la multiplication de S_* :

$$
(19) \quad \begin{cases} \Delta^*(\beta_k) = \beta_k \otimes 1 + 1 \otimes \beta_k , \\ \Delta^*(\mathcal{P}^R) = \sum \mathcal{P}^{R'} \otimes \mathcal{P}^{R''} , \end{cases}
$$

la sommation étant étendue à tous les couples (R', R'') tels que $R' + R'' = R$.

Comme dans le cas $p = 2$ pour la formule (16), on peut, lorsque p est premier impair, tirer quelques conséquences intéressantes de la relation (17) : supposons que tous les termes de la suite R soient $< p$: alors

$$
(17.\ a) \qquad \mathcal{P}^R . \mathcal{P}^S = [r_1 , s_1] \dots [r_k , s_k] \dots \mathcal{P}^{R+S} .
$$

S'il existe un k tel que le reste de s_k (modulo p) soit $\geqslant p - r_k$, ceci est nul. En particulier, les $\mathcal{P}^R$ relatifs aux suites R dont tous les termes sont $< p$, forment la base d'une sous-algèbre commutative de S^*.

A titre d'exercice, on vérifiera que les $\mathcal{P}_k$ admettent la définition récurrente suivante

$$
\mathcal{P}_{k+1} = \mathcal{P}^{p^k} . \mathcal{P}_k - \mathcal{P}_k . \mathcal{P}^{p^k} , \qquad k \geqslant 1 \qquad (\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}^1) .
$$