Séminaire Henri Cartan

Italo Giorgiutti

L'algèbre de Steenrod et sa duale

Séminaire Henri Cartan, tome 11, nº 2 (1958-1959), exp. nº 10, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_2_A1_0>

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

L'ALGÈBRE DE STEENROD ET SA DUALE

par Italo GIORGIUTTI

1. Généralités sur les algèbres de Hopf (cf. [4]).

K désigne un corps de base, commutatif. Une algèbre de Hopf est définie par la donnée :

1° d'un K-espace vectoriel gradué A, tel que chaque A_n soit de dimension finie (comme espace vectoriel), avec $A_n = 0$ pour $n < 0$, et $A_0 \approx K$ (l'isomorphisme de A_0 sur K est donné). On note η l'injection $K \to A$, composée de l'isomorphisme $K \approx A_0$ et de l'injection naturelle $A_0 \to A$. On note ε l'augmentation $A \to K$, composée de la projection naturelle $A \to A_0$ et de l'isomorphisme $A_0 \approx K$;

2° d'une application K-linéaire de degré 0 :

$$\Phi : A \otimes_K A \to A \quad ,$$

qui fait de A une algèbre graduée (non supposée associative en général), admettant $1 \in K$ comme élément unité ; le fait que 1 est élément unité se traduit comme suit : les deux applications composées

$$A = K \otimes A \xrightarrow{\eta \otimes 1_A} A \otimes A \xrightarrow{\Phi} A$$

$$A = A \otimes K \xrightarrow{1_A \otimes \eta} A \otimes A \xrightarrow{\Phi} A$$

sont l'identité ;

3° d'une application K-linéaire de degré 0 (appelée "application diagonale")

$$\Delta : A \to A \otimes_K A$$

qui fait de A une coalgèbre graduée (non supposée associative en général), admettant ε comme élément unité, ce qui signifie ceci : les deux applications composées

$$A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1_A} K \otimes A = A$$

$$A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \xrightarrow{1_A \otimes \varepsilon} A \otimes K = A$$

sont l'identité. Il revient au même de dire que l'on a

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1 \text{ , et, pour } a \in A_n \quad (n > 0) \text{ ,}$$

$$\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a + \sum_i u_i \otimes v_i \quad ,$$

les u_i et les v_i étant homogènes de degrés > 0 . Autre condition équivalente : pour tout $a \in A$, $\Delta a - (a \otimes 1)$ est dans le noyau de $1_A \otimes \varepsilon$, et $\Delta a - (1 \otimes a)$ est dans le noyau de $\varepsilon \otimes 1_A$.

Les données précédentes sont en outre assujetties à l'unique condition suivante : le diagramme

$$(1) \qquad \begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\Delta\otimes\Delta"] \arrow[d, "\Phi"'] & A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[dr, "1_A \otimes T \otimes 1_A"] & \\ A \arrow[r, "\Delta"] & A \otimes A & A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[l, "\Phi\otimes\Phi"'] \end{tikzcd}$$

où $T(x \otimes y) = (-1)^{\xi\eta} \; y \otimes x$, avec $\xi = \deg x$, $\eta = \deg y$, est <u>commutatif</u>.

La commutativité de (1) exprime que, lorsqu'on munit $A \otimes A$ de sa structure d'algèbre graduée (produit tensoriel "gauche" de deux algèbres graduées), l'application Δ est un homomorphisme d'algèbres graduées. La commutativité de (1) exprime aussi, dualement, que Φ est un homomorphisme de coalgèbres graduées.

DÉFINITION. - On dit que la multiplication Φ est <u>associative</u> si le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\Phi\otimes 1_A"] \arrow[d, "1_A\otimes\Phi"] & A \otimes A \arrow[d, "\Phi"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\Phi"] & A \end{tikzcd}$$

est commutatif. De même, on dit que l'application diagonale Δ est associative si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & A \otimes A \arrow[d, "1_A\otimes\Delta"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\Delta\otimes 1_A"] & A \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

On dit que la multiplication Φ est <u>commutative</u> (ou, plus exactement, anticommutative) si le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\Phi"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "\Phi"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Définition analogue de la commutativité de Δ .

<u>Algèbre de Hopf duale</u> : Soit A^* le dual-gradué de l'espace vectoriel gradué A , c'est-à-dire

$$A^* = \sum_n A^n \quad , \quad A^n = \mathrm{Hom}_K(A_n , K) \quad .$$

Soient $\varepsilon^* : A^* \to K$ et $\eta^* : K \to A^*$ les transposées des applications η et ε. Identifions $A^* \otimes A^*$ au dual-gradué de $A \otimes A$, en définissant comme produit scalaire $(A^* \otimes A^*) \otimes (A \otimes A) \to K$ l'application composée

$$A^* \otimes A^* \otimes A \otimes A \xrightarrow{1 \otimes T \otimes 1} A^* \otimes A \otimes A^* \otimes A \xrightarrow{\lambda \otimes \lambda} K \otimes K = K \quad ,$$

λ désignant le produit scalaire ; en d'autres termes, on pose

$$\langle x' \otimes y' , x \otimes y \rangle = (-1)^{\xi \eta'} \langle x' , x \rangle \cdot \langle y' , y \rangle \quad ,$$

avec $\xi' = \deg x'$, $\eta = \deg y$.

Alors l'application Φ a pour transposée une application

$$\Delta^* : A^* \to A^* \otimes A^*$$

de degré 0 ; de même, l'application Δ a pour transposée une application

$$\Phi^* : A^* \otimes A^* \to A^*$$

de degré 0 . Il est immédiat que les applications η^* , ε^* , Φ^* et Δ^* définissent A^* commé <u>algèbre de Hopf</u> (on notera, en particulier, que le diagramme ~~trans~~ posé de (1) est commutatif, et que l'application transposée de $T : A \otimes A \to A \otimes A$ est l'application $A^* \otimes A^* \to A^* \otimes A^*$ qui envoie $x' \otimes y'$ en $(-1)^{\xi' \eta'} y' \otimes x'$, avec $\xi' = \deg x'$, $\eta' = \deg y'$).

On dit que A^* est <u>l'algèbre de Hopf duale</u> de A.

<u>Bidualité</u> : on identifie A au dual-gradué de A^* , en convenant que $\langle x , x' \rangle = \langle x' , x \rangle$. Alors $A \otimes A$ s'identifie au dual-gradué de $A^* \otimes A^*$, l'application Δ est transposée de Φ^* , et Φ est transposée de Φ^* . Donc l'algèbre de Hopf Δ s'identifie à l'algèbre de Hopf duale de A^* .

2. <u>L'algèbre de Steenrod.</u>

On note p un nombre premier. Conformément à la définition donnée dans l'Exposé 9, paragraphe 2 A (page 9-08), on considère l'espace vectoriel (sur le corps Z_p) S^i formé des <u>opérations cohomologiques stables</u> de type (i , Z_p , Z_p) ; une telle opération s définit donc, pour tout entier n , une application linéaire $H^n(X ; Z_p) \to H^{n+i}(X ; Z_p)$, et ceci pour tout ensemble simplicial X . Rappelons que S^i est un Z_p-espace vectoriel de dimension finie (cf. Exposé 9, lemme de la page 9-05).

Soit S^* la somme directe des S^i . La composition des opérations cohomologiques stables définit sur S^* une structure d'algèbre graduée <u>associative</u>, ayant pour

élément unité l'opération identique. La sous-algèbre S^0 des éléments de degré 0 s'identifie canoniquement au corps de base Z_p, puisque les seules opérations cohomologiques de degré 0 sont définies par les homomorphismes $Z_p \longrightarrow Z_p$ des groupes de coefficients.

D'autre part, on a défini (Exposé 9, paragraphe 2 C, page 9-10) une <u>application diagonale</u> Δ dans S^* ; Δ envoie S^i dans $\sum_{j+k=i} S^j \otimes S^k$. Cette application diagonale est caractérisée par la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ. - Si, pour tout couple d'ensembles simpliciaux X, Y, on note C l'injection canonique

$$H^*(X ; Z_p) \otimes H^*(Y ; Z_p) \longrightarrow H^*(X \times Y ; Z_p) \quad ,$$

on a, pour tout $s \in S^*$,

(2) $C \circ (\Delta s) = s \circ C$ (égalité de deux applications de $H^*(X ; Z_p) \otimes H^*(Y , Z_p)$ dans $H^*(X \times Y ; Z_p)$, étant entendu que l'on fait opérer $S^* \otimes S^*$ sur $H^*(X ; Z_p) \otimes H^*(Y ; Z_p)$ en respectant la "règle des signes" : $(s' \otimes s'') . (u \otimes v) = (-1)^{qr}(s'.u) \otimes (s''.v)$, où q et r désignent les degrés de s'' et u respectivement).

PROPOSITION 1. - <u>Munie de l'application diagonale Δ, S^* est une algèbre de Hopf. De plus l'application diagonale est associative et commutative.</u>

DÉMONSTRATION.

a. Pour tout $s \in S^*$, $\Delta s - (s \otimes 1)$ est annulé par $1 \otimes \varepsilon$. En effet, prenons Y réduit à un point, et identifions X à $X \times Y$; alors C s'identifie à l'isomorphisme de $H^*(X) \otimes H^*(Y) = H^*(X) \otimes Z_p$ avec $H^*(X)$; a priori, $\Delta s - s' \otimes 1$ appartient au noyau de $1 \otimes \varepsilon$; alors la relation (2) montre que $s' = s$, ce qu'il fallait démontrer. On verrait de même que, pour tout $s \in S^*$, $\Delta s - (1 \otimes s)$ est annulé par $\varepsilon \otimes 1$.

b. Pour montrer que le diagramme (1) est commutatif (lorsqu'on y remplace A par S^*), il suffit de prouver que l'application diagonale $\Delta : S^* \longrightarrow S^* \otimes S^*$ est <u>multiplicative</u> (la structure multiplicative de $S^* \otimes S^*$ étant celle du produit tensoriel gauche de deux algèbres graduées). Or soient s, $s' \in S^*$; l'opération composée $(\Delta s) \circ (\Delta s')$ (où Δs et $\Delta s'$ opèrent dans $H^*(X ; Z_p) \otimes H^*(Y ; Z_p)$) n'est autre que celle définie par le produit $(\Delta s) . (\Delta s')$ dans l'algèbre $S^* \otimes S^*$. On a alors

$$(ss') \circ C = s \circ s' \circ C = s \circ C \circ (\Delta s') = C \circ (\Delta s) \circ (\Delta s') = C \circ ((\Delta s).(\Delta s'))$$

et ceci prouve que $\Delta(ss') = (\Delta s)(\Delta s')$.

c. L'associativité de Δ résulte de la relation caractéristique (2) et de l'associativité de l'application C , cette dernière exprimant la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^*(X) \otimes H^*(X') \otimes H^*(X'') & \xrightarrow{C \otimes 1} & H^*(X \times X') \otimes H^*(X'') \\ \downarrow 1 \otimes C & & \downarrow C \\ H^*(X) \otimes H^*(X' \times X'') & \xrightarrow{C} & H^*(X \times X' \times X'') \end{array}$$

(on identifie $X \times (X' \times X'')$ et $(X \times X') \times X''$ comme d'habitude).

d. Reste enfin à prouver la commutativité de l'application Δ . Notons f l'application naturelle $X \times Y \to Y \times X$ (qui envoie le point (x , y) au point (y , x)) ; et soit T l'application $H^*(X) \otimes H^*(Y) \to H^*(Y) \otimes H^*(X)$ qui envoie $u \otimes v$ en $(-1)^{qr}\ v \otimes u$ (q et r désignant les degrés des éléments u et v supposés homogènes). Il est bien connu que

$$C \circ T = f^* \circ C \quad ,$$

où $f^* : H^*(Y \times X) \to H^*(X \times Y)$ est induit par f . On a

$$C \circ T \circ (\Delta s) = f^* \circ C \circ (\Delta s) = f^* \circ s \circ C = s \circ f^* \circ C = s \circ C \circ T = C \circ (\Delta s) \circ T ,$$

d'où, puisque C est une injection,

$$T \circ (\Delta s) \circ T^{-1} = \Delta s \quad .$$

La commutativité de l'application Δ résulte alors du fait que

$$T \circ (s' \otimes s'') \circ T^{-1} = (-1)^{q'q''}\ s'' \otimes s' \quad ,$$

avec $q' = \deg s'$, $q'' = \deg s''$.

Ainsi la proposition 1 est démontrée. Par définition, S^* , munie de sa structure d'algèbre de Hopf, s'appelle l'algèbre de Steenrod. Pour chaque p premier, il y a une algèbre de Steenrod.

L'algèbre de Hopf duale de S^* sera notée S_* ; on notera S_n l'espace vectoriel des éléments de degré n de S_* . D'après la proposition 1, la multiplication de S_* est associative et commutative (i. e. anticommutative). On se propose, dans cet Exposé et le suivant, d'expliciter complètement la structure d'algèbre de Hopf de S_* , en suivant MILNOR [3].

3. Propriétés connues de l'algèbre de Steenrod.

Nous allons donner ici la liste des résultats supposés connus au sujet de S^* ,

et qui ont d'ailleurs été démontrés en partie dans l'Exposé 9 pour le cas $p = 2$. Pour le reste, nous renvoyons aux articles cités en [1], [2], [5] dans la Bibliographie, ainsi qu'au Séminaire Cartan 1954/55 où sont démontrés tous ces résultats.

Cas $p = 2$. - Sq^i désigne l'unique opération cohomologique stable de type (i, Z_2, Z_2) telle que $Sq^i x = x^2$ pour $x \in H^i(X ; Z_2)$, (cf. Exposé 9). Sq^0 est l'identité, et on a $Sq^i x = 0$ si $\deg(x) < i$.

Pour toute suite d'entiers $\geqslant 0$

$I = (a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$, nuls pour k assez grand, on définit

$$Sq^I = Sq^{a_1} \circ Sq^{a_2} \circ \ldots \circ Sq^{a_k} \circ \ldots ,$$

ce qui a un sens puisque Sq^{a_k} est l'identité pour k grand. On sait que les Sq^I relatifs aux suites I telles que $a_k \geqslant 2a_{k+1}$, forment une base du Z_2-espace vectoriel S^* ; en réalité, on aura seulement besoin de savoir que ces Sq^I engendrent l'espace vectoriel S^*.

Cas p premier impair. - Soit β l'opérateur de Bockstein

$$H^n(X ; Z_p) \longrightarrow H^{n+1}(X ; Z_p) ,$$

associé à la suite exacte de coefficients

$$0 \longrightarrow Z_p \longrightarrow Z_{p^2} \longrightarrow Z_p \longrightarrow 0$$

(On ne fait pas la convention de signe adoptée dans [2] ; ainsi β anticommute avec la suspension, et c'est bien une opération cohomologique stable, au sens de l'Exposé 9, page 9-08). Soit d'autre part, pour chaque entier $i \geqslant 0$, $\mathcal{P}^i$ l'opération de Steenrod de degré $2i(p-1)$: c'est l'unique opération cohomologique stable de type $(2i(p-1), Z_p, Z_p)$ telle que $\mathcal{P}^i x = x^p$ pour $x \in H^{2i}(X ; Z_p)$. $\mathcal{P}^0$ est l'identité, et on a $\mathcal{P}^1 x = 0$ si $\deg x < 2i$. Définissons, pour tout entier $a \geqslant 0$, congru à 0 ou 1 modulo $2p-2$:

$$(3) \qquad St^a = \begin{cases} \mathcal{P}^i & \text{si } a = 2i(p-1) , \\ \beta \circ \mathcal{P}^i & \text{si } a = 2i(p-1) + 1 . \end{cases}$$

Pour toute suite $I = (a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$ telle que $a_k \equiv 0$ ou 1 (mod $2p-2$), $a_k = 0$ pour k assez grand, définissons

$St^I = St^{a_1} \circ St^{a_2} \circ \ldots \circ St^{a_k} \circ \ldots$. On sait que les St^I relatifs aux suites "admissibles" I, c'est-à-dire telles que $a_k \geqslant pa_{k+1}$, forment une base du

Z_p-espace vectoriel S^*. En réalité, on aura seulement besoin de savoir que ces Sq^I engendrent l'espace vectoriel S^*.

REMARQUE. - Pour $p = 2$, convenons de poser $\mathcal{P}^i = Sq^{2i}$. On sait (Exposé 9, paragraphe 3) que $\beta = Sq^1$; alors les formules (3) sont encore valables si on y écrit Sq^a au lieu de St^a (cf. page 9-13).

Détermination de l'application diagonale de S^*.

Commençons par le cas où $p = 2$. Puisque les Sq^i engendrent l'algèbre S^* et que l'application diagonale Δ est un homomorphisme d'algèbres graduées, l'application Δ est théoriquement connue quand on connaît les $\Delta(Sq^i)$. On a démontré (Exposé 9, paragraphe 3, B) :

$$(4) \qquad \Delta(Sq^i) = \sum_{j+k=i} Sq^j \otimes Sq^k \quad .$$

Sur cette formule, on peut vérifier l'associativité et la commutativité de Δ. La formule (4) s'interprète comme suit : posons $Sq = \sum_{i \geq 0} Sq^i$; alors, si x et $x' \in H^*(X ; Z_2)$, on a $Sq(xx') = (Sq\, x)(Sq\, x')$; autrement dit, Sq est un endomorphisme de l'algèbre $H^*(X ; Z_2)$.

Soit maintenant p premier impair. Il est immédiat que

$$(5) \qquad \Delta(\beta) = \beta \otimes 1 + 1 \otimes \beta \quad ,$$

et on démontre (en utilisant par exemple la même méthode que dans l'Exposé 9 pour $p = 2$) que

$$(5') \qquad \Delta(\mathcal{P}^i) = \sum_{j+k=i} \mathcal{P}^j \otimes \mathcal{P}^k \quad .$$

Puisque l'algèbre S^* est engendrée par β et les $\mathcal{P}^i$, les formules (5) et (5') déterminent théoriquement l'application Δ. Ici encore, on peut vérifier directement l'associativité et la commutativité de Δ. Si on pose $\mathcal{P} = \sum_i \mathcal{P}^i$, $\mathcal{P}$ est un endomorphisme de l'algèbre de cohomologie $H^*(X ; Z_p)$.

REMARQUE. - Il faut prendre garde que si l'on pose, comme on l'a dit plus haut, $\mathcal{P}^i = Sq^{2i}$ dans le cas $p = 2$, la formule (5') devient inexacte.

4. Etude des opérations de S^* dans $H^*(Z_p , 1 ; Z_p)$.

$H^*(Z_p , 1 ; Z_p)$ est l'algèbre de cohomologie, à coefficients dans Z_p, de $K(Z_p , 1)$. Il est bien connu (cf. par exemple l'Exposé 8, paragraphe 3) que :

Si $p = 2$, $H^*(Z_2 , 1 ; Z_2)$ est une algèbre de polynômes engendrée par un élément $x \in H^1(Z_2 , 1 ; Z_2)$;

Si p est premier impair, $H^*(Z_p , 1 ; Z_p)$ est le produit tensoriel d'une algèbre extérieure à un générateur $x \in H^1(X_p , 1 ; Z_p)$ et d'une algèbre de polynômes à un générateur $y \in H^2(Z_p , 1 ; Z_p)$, avec $y = \beta x$.

LEMME 1. - Soit $p = 2$. Pour toute suite I différente de $(0 , 0 , \dots , 0 , \dots)$, on a $Sq^I x = 0$, sauf si I est de la forme $(2^k , 2^{k-1} , \dots , 1 , 0 , 0 , \dots)$, auquel cas $Sq^I x = x^{2^{k+1}}$.

DÉMONSTRATION. - Pour des raisons de degré, on a :

$$Sq\ x = x + x^2 \quad ,$$

d'où, puisque Sq est un endomorphisme de l'algèbre $H^*(Z_2 , 1 ; Z_2)$,

$$Sq(x^{2^k}) = x^{2^k} + x^{2^{k+1}} \quad ;$$

on a donc $Sq^i x^{2^k} = 0$ sauf si $i = 0$ ou $i = 2^k$. On en déduit aussitôt le lemme.

LEMME 2. - Soit p premier impair. Pour toute suite I différente de $(0 , \dots , 0 , \dots)$, on a

$St^I y = 0$, sauf si St^I est de la forme $\mathcal{P}^{p^k} \mathcal{P}^{p^{k-1}} \dots \mathcal{P}^1$, auquel cas on a $St^I y = y^{p^{k+1}}$. On a de même

$St^I x = 0$, sauf si $St^I = \beta$ (auquel cas $x = y$) ou si St^I est de la forme $\mathcal{P}^{p^k} \mathcal{P}^{p^{k-1}} \dots \mathcal{P}^1 \beta$, auquel cas $St^I x = y^{p^{k+1}}$.

DÉMONSTRATION. - On a $\mathcal{P} y = y + y^p$, d'où

$$\mathcal{P}(y^{p^k}) = y^{p^k} + y^{p^{k+1}} \quad ,$$

ce qui entraîne $\mathcal{P}^i(y^{p^k}) = 0$ sauf si $i = 0$ ou $i = p^k$. De plus $\beta y = 0$ (puisque $y = \beta x$ et que $\beta\beta = 0$), donc $\beta(y^j) = 0$ pour tout entier j . De là on déduit la première partie de l'énoncé.

La deuxième partie se prouve en observant que $\mathcal{P}^i x = 0$ pour $i \geq 1$ (pour des raisons de degré) et $\beta x = y$.

Revenons au cas $p = 2$. Il résulte du lemme 1 que, pour tout élément $s \in S^*$, on a :

(6) $$sx = \sum_{i \geq 0} a_i \, x^{2^i} \text{ , avec } a_i \in Z_2 \text{ .}$$

Il est clair que les coefficients a_i dépendent linéairement de s ; il est immédiat que a_i s'annule sur les s homogènes de degré $\neq 2^i - 1$; autrement dit, la forme linéaire a_i est un élément homogène de S_*, de degré $2^i - 1$. On notera désormais ξ_i cet élément. Observer que $\xi_0 = 1$, élément unité de l'algèbre S_*.

Soit $P(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots)$ l'algèbre des polynômes construite sur les générateurs ξ_i (d'élément unité ξ_0) : c'est une algèbre graduée. Puisque l'algèbre graduée S_* est associative et commutative, on a un homomorphisme d'algèbres graduées unitaires $\rho : P(\xi_0, \ldots, \xi_k, \ldots) \longrightarrow S_*$.

THÉORÈME 1. - <u>Pour</u> $p = 2$, <u>l'homomorphisme</u> ρ <u>est un isomorphisme d'algèbres graduées</u>.

Ce théorème sera démontré au paragraphe 5. Passons au cas où p est premier impair. Il résulte du lemme 2 que, pour tout $s \in S^*$, on a

(7) $$sy = \sum_{i \geq 0} a_i \, y^{p^i} \text{ , } sx = a_0 \, x + \sum_{i \geq 0} b_i \, y^{p^i} \text{ ,}$$

les a_i et les b_i appartenant à Z_p. Ces coefficients a_i et b_i dépendent linéairement de s. D'une façon précise, a_i définit sur S^* une forme linéaire de degré $2(p^i - 1)$, que nous noterons ξ_i ; et b_i définit une forme linéaire de degré $2p^i - 1$, que nous noterons τ_i. Ainsi les ξ_i et les τ_i sont des éléments homogènes de S_* et ξ_0 est l'élément unité de l'algèbre S_*.

Soit $U(\xi_i, \tau_i)$ le produit tensoriel de l'algèbre extérieure construite sur les générateurs τ_i (de degrés $2p^i - 1$) et de l'algèbre des polynômes construite sur les générateurs ξ_i (de degrés $2p^i - 2$), ξ_0 étant pris pour élément unité. Puisque l'algèbre graduée S_* est associative et anticommutative, on a un homomorphisme d'algèbres graduées unitaires $\rho : U(\xi_i, \tau_i) \longrightarrow S_*$.

THÉORÈME 2. - <u>Pour</u> p <u>premier impair, l'homomorphisme</u> ρ <u>est un isomorphisme d'algèbres graduées</u>.

Ce théorème sera démontré au paragraphe 6. Les théorèmes 1 et 2 déterminent entièrement la structure d'algèbre graduée de S_*.

PROPOSITION 2. - <u>Dans le cas</u> $p = 2$, <u>on a</u> $\langle \xi_k, Sq^I \rangle = 0$, <u>sauf si</u> $I = (2^{k-1}, 2^{k-2}, \ldots, 1, 0, \ldots)$, <u>auquel cas</u> $\langle \xi_k, Sq^I \rangle = 1$. <u>Dans le cas où</u> p <u>est premier impair, on a</u> $\langle \xi_k, St^I \rangle = 0$, <u>sauf si</u>

$I = (p^{k-1}(2p-2)\ ,\ p^{k-2}(2p-2)\ ,\ \dots\ ,\ 2p-2\ ,\ 0\ ,\ \dots)$, <u>auquel cas</u> $\langle \xi_k\ ,\ St^I \rangle = 1$; <u>de plus, on a</u> $\langle \tau_k\ ,\ St^I \rangle = 0$, <u>sauf si</u> $I = (p^{k-1}(2p-2)\ ,\ p^{k-2}(2p-2)\ ,\ \dots\ ,\ 2p-2\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ \dots)$, <u>auquel cas</u> $\langle \tau_k\ ,\ St^I \rangle = 1$.

La proposition 2 résulte aussitôt de la définition des ξ_i et des τ_i , et des lemmes 1 et 2.

5. <u>Démonstration du théorème</u> 1.

On suppose ici $p = 2$. A chaque suite $(r_1\ ,\ \dots\ ,\ r_k\ ,\ \dots)$ d'entiers $\geqslant 0$, nuls sauf un nombre fini, associons la suite

$$I = (a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k\ ,\ \dots)\ ,\ \text{avec}\ \ a_k = \sum_{i \geqslant k} 2^{i-k}\, r_i\ .$$

on a

$$a_k = 2a_{k+1} + r_k \quad .$$

Donc la suite I est admissible (c'est-à-dire $a_k \geqslant 2a_{k+1}$). Réciproquement, toute suite admissible définit la suite des

$$r_k = a_k - 2a_{k+1} \qquad (k = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots) \quad .$$

On obtient ainsi une correspondance bijective entre les suites $(r_1\ ,\ \dots\ ,\ r_k\ ,\ \dots)$ et les suites admissibles I . On notera $\omega(I)$ le monôme $\prod_k (\xi_k)^{r_k} \in S_*$ qui correspond à une suite admissible I . Observons que le degré du monôme $\omega(I)$ est égal à celui de $Sq^I \in S^*$.

Ordonnons l'ensemble des suites admissibles I par l'ordre lexicographique <u>à partir de la droite</u>. On va prouver le lemme suivant :

LEMME 3. - $\langle \omega(J)\ ,\ Sq^I \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si}\ \ I < J\ , \\ 1 & \text{si}\ \ I = J\ . \end{cases}$

Le théorème 1 en résultera. En effet, la matrice des $\langle \omega(J)\ ,\ Sq^I \rangle$ étant triangulaire, avec 1 dans la diagonale principale, il s'ensuit que les Sq^I sont linéairement indépendants dans S^* , et comme on sait qu'ils engendrent l'espace vectoriel S^* , on conclut que les $\omega(J)$ forment une <u>base</u> de l'espace dual S_* , d'où le théorème 1.

Démontrons maintenant le lemme 3. L'assertion est triviale si $J = (0\ ,\ 0\ ,\ \dots)$. Supposons donc $J = (a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k\ ,\ 0\ ,\ \dots)$, avec $a_k \geqslant 1$;

alors, puisque $I \leq J$, on a $I = (b_1 , \dots , b_k , 0 , \dots)$, avec $b_k \leq a_k$.

Le monôme $\omega(J)$ est égal au produit $\omega(J') \xi_k$, avec

$$J' = (a_1 - 2^{k-1} , a_2 - 2^{k-2} , \dots , a_k - 1 , 0 , \dots) \quad .$$

On a donc

$$< \omega(J) , Sq^I > = < \omega(J') \xi_k , Sq^I > \quad ,$$

et puisque l'application diagonale Δ de S^* est transposée de la multiplication de S_* , ceci est égal à $< \omega(J') \otimes \xi_k , \Delta(Sq^I) >$.

Or la formule (4) entraîne $\Delta(Sq^I) = \sum Sq^{I'} \otimes Sq^{I''}$, la sommation étant étendue à tous les couples (I' , I'') tels que $I' + I'' = I$ (ce qui signifie que si $I' = (b'_1 , \dots , b'_i , \dots)$ et $I'' = (b''_1 , \dots , b''_i , \dots)$, on a $b_i = b'_i + b''_i$ pour tout i). D'où

$$< \omega(J) , Sq^I > = \sum < \omega(J') , Sq^{I'} > . < \xi_k , Sq^{I''} > \quad .$$

Or, d'après la proposition 2, $< \xi_k , Sq^{I''} >$ est nul sauf si $I'' = (2^{k-1} , 2^{k-2} , \dots , 1 , 0 , \dots)$, auquel cas c'est égal à 1 . De deux choses l'une : ou bien $b_k = 0$, et alors il est impossible que $I = I' + I''$ (I'' ayant la valeur qu'on vient de préciser) ; dans ce cas, on voit que $< \omega(J) , Sq^I > = 0$. Ou bien $b_k \geq 1$, et alors on voit que $< \omega(J) , Sq^I > = < \omega(J') , Sq^{I'} >$, avec $I' = (b_1 - 2^{k-1} , b_2 - 2^{k-2} , \dots , b_k - 1 , 0 , \dots)$.

La suite I' est alors admissible, et $I' \leq J'$. D'où l'assertion du lemme 3, par récurrence sur le degré commun de $\omega(J)$ et de Sq^I .

COROLLAIRE <u>du lemme</u> 3. - <u>On a</u> $< (\xi_1)^i , Sq^i > = 1$, <u>et</u> Sq^i <u>est orthogonal à tout monôme de</u> S_* <u>autre que</u> $(\xi_1)^i$.

En effet, la suite $I = (i , 0 , \dots)$ est antérieure (dans l'ordre lexicographique) à toute suite admissible de même degré.

6. <u>Démonstration du théorème</u> 2.

On suppose que p est premier impair. L'algèbre $U(\xi_i , \tau_i)$ admet pour base les monômes de la forme

$$(\tau_0^{\varepsilon_0} \dots \tau_i^{\varepsilon_i} \dots)(\xi_1^{r_1} \dots \xi_j^{r_j} \dots) \quad ,$$

où les exposants ε_i sont égaux à 0 ou 1 (et nuls sauf un nombre fini), et les exposants r_j sont des entiers ≥ 0 quelconques (nuls sauf un nombre fini).

À chaque suite $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_i, \dots, r_1, \dots, r_j, \dots)$ de ce type, associons la suite $I = (a_1, \dots, a_k, \dots)$ définie par

$$a_k = \varepsilon_{k-1} + (2p-2) \sum_{i \geq k} (\varepsilon_i + r_i)\, p^{i-k} \quad .$$

On a

$$(8) \qquad a_k \equiv \varepsilon_{k-1} \pmod{2p-2} \quad ,$$

$$(9) \qquad a_k - pa_{k+1} = \varepsilon_{k-1} + (p-2)\,\varepsilon_k + (2p-2)\, r_k \geq 0 \quad .$$

Donc la suite I est admissible. Réciproquement, toute suite admissible $I = (a_1, \dots, a_k, \dots)$ définit la suite des ε_{k-1} par la relation (8), et ensuite (9) définit les entiers $r_k \geq 0$. On obtient ainsi une correspondance bijective entre les suites (ε_i, r_j) et les suites admissibles I. On notera $\omega(I)$ le monôme qui correspond de cette manière à une suite admissible I. Un calcul facile montre que le degré du monôme $\omega(I)$ est égal au degré de l'élément $St^I \in S^*$.

Ordonnons l'ensemble des suites admissibles I par l'ordre lexicographique <u>à partir de la droite</u>. On va prouver le lemme suivant :

LEMME 4. - $\langle \omega(J), St^I \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } I < J, \\ \pm 1 & \text{si } I = J. \end{cases}$

Le théorème 2 en résultera évidemment.

DÉMONSTRATION du lemme 4. - L'assertion est triviale si $J = (0, 0, \dots)$. Supposons donc $J = (a_1, \dots, a_k, 0, \dots)$, avec $a_k \neq 0$. Puisque $I \leq J$, on a $I = (b_1, \dots, b_k, 0, \dots)$, avec $b_k \leq a_k$. Il y a alors deux cas possibles :

<u>Premier cas</u> : $a_k \geq 2p-2$.

Alors le monôme $\omega(J)$ est le produit du monôme $\omega(J')$ et de ξ_k, en posant

$$J' = (a_1 - p^{k-1}(2p-2), \dots, a_{k-1} - p(2p-2), a_k - (2p-2), 0, \dots)$$

qui est aussi une suite admissible. On en déduit

$$\langle \omega(J), St^I \rangle = \langle \omega(J') \otimes \xi_k, \Delta(St^I) \rangle \quad ;$$

or les relations (5) et (5') entraînent $\Delta(St^I) = \sum \pm St^{I'} \otimes St^{I''}$, la sommation étant étendue à tous les couples $I' = (b'_1, \dots, b'_k, \dots)$, $I'' = (b''_1, \dots, b''_k, \dots)$ tels que

$$\begin{cases} b'_k \equiv 0 \text{ ou } 1 \pmod{2p-2}, \quad b''_k \equiv 0 \text{ ou } 1 \pmod{2p-2} \\ b'_k + b''_k = b_k \end{cases} .$$

D'où

$$< \omega(J) , St^I > = \sum \pm < \omega(J') , St^{I'} > . < \xi_k , St^{I''} > .$$

D'après la proposition 2, $< \xi_k , St^{I''} >$ est nul sauf si

$$I'' = (p^{k-1}(2p-2) , \ldots , 2p-2 , 0 , \ldots) ,$$

et dans ce cas c'est égal à 1 . De deux choses l'une : ou bien $b_k < 2p-2$ (c'est-à-dire $b_k = 1$ ou 0), et alors il est impossible que $I = I'+I''$, I'' ayant la valeur qu'on vient de préciser ; dans ce cas, on voit que $< \omega(J) , Sq^I > = 0$, et le lemme est démontré. Ou bien $b_k \geq 2p-2$, et alors on a

$$< \omega(J) , St^I > = \pm < \omega(J') , St^{I'} > ,$$

en posant $I' = (b_1 - p^{k-1}(2p-2) , \ldots , b_{k-1} - p(2p-2) , b_k - (2p-2), 0 , \ldots)$;

dans ce cas, la suite I' est admis ible, et $I' \leq J'$. D'où le principe d'une démonstration récurrente du lemme 4.

<u>Deuxième cas</u> : $a_k = 1$.

Alors le monôme $\omega(J)$ est égal à $\omega(J') \tau_{k-1}$, où $J' = (a_1 - 1 , 0 , \ldots)$ si $k = 1$, et, si $k > 1$,

$$J' = (a_1 - p^{k-2}(2p-2) , \ldots , a_{k-1} - (2p-2) , 0 , \ldots) .$$

On a donc

$$< \omega(J) , St^I > = \sum \pm < \omega(J') , St^{I'} > . < \tau_{k-1} , St^{I''} > ,$$

la sommation étant étendue aux couples (I' , I'') comme il a été expliqué ci-dessus. D'après la proposition 2, $< \tau_{k-1} , St^{I''} >$ est nul sauf si $I'' = (p^{k-2}(2p-2) , \ldots , 2p-2 , 1 , 0 , \ldots)$ [si $k = 1$, on doit prendre $I'' = (1 , 0 , \ldots)$], auquel cas c'est égal à 1 . De deux choses l'une :

Ou bien $b_k = 0$, et alors il est impossible que $I = I' + I''$, I'' ayant la valeur qu'on vient de préciser ; dans ce cas, on a $< \omega(J) , St^I > = 0$, ce qui prouve le lemme.

Ou bien $b_k = 1$, et alors on a $< \omega(J) , St^I > = \pm < \omega(J') , St^{I'} >$, en posant $I' = (b_1 - 1 , 0 , \ldots)$ si $k = 1$, et, si $k > 1$,

$$I' = (b_1 - p^{k-2}(2p-2)\ ,\ \ldots\ ,\ b_{k-1} - (2p-2)\ ,\ 0\ ,\ \ldots) \quad ;$$

alors la suite I' est admissible, et $I' \leq J'$. D'où le principe d'une démonstration récurrente du lemme 4.

Le lemme 4 est ainsi entièrement démontré.

COROLLAIRE du lemme 4. - <u>On a</u> $\langle (\xi_1)^i , \mathcal{P}^i \rangle = 1$, <u>et</u> $\mathcal{P}^i$ <u>est orthogonal à tout monôme de</u> S_* <u>autre que</u> $(\xi_1)^i$.

La relation écrite se vérifie par récurrence sur i ; de plus, la suite $I = (i\ ,\ 0\ ,\ \ldots)$ est antérieure (dans l'ordre lexicographique) à toute suite admissible de même degré. On voit de même : $\langle \tau_0 , \beta \rangle = 1$, <u>et</u> β <u>est orthogonal à tout monôme de</u> S_* <u>autre que</u> τ_0 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADEM (J.). - The relations on Steenrod powers of cohomology classes, Algebraic geometry and algebraic topology, A symposium in honor of S. Lefschetz. - Princeton, Princeton University Press, 1957 ; p. 191-238.

[2] CARTAN (Henri). - Sur l'itération des opérations de Steenrod, Comment. Math. Helvet., t. 29, 1955, p. 40-58.

[3] MILNOR (J.). - The Steenrod algebra and its dual, Annals of Math., t. 67, 1958, p. 150-171.

[4] MOORE (J. C.). - Notes on Hopf algebras. - Princeton, 1958, multigraphié.

[5] SERRE (Jean-Pierre). - Cohomologie modulo 2 d'Eilenberg-MacLane, Comment. Math. Helvet., t. 27, 1953, p. 198-232.