

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

ADRIEN DOUADY

Opérations cohomologiques

Séminaire Henri Cartan, tome 11, n° 1 (1958-1959), exp. n° 9, p. 1-15

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_1_A9_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

OPÉRATIONS COHOMOLOGIQUES

par Adrien DOUADY

CONVENTION, Règle de Koszul : Si A et B sont des algèbres graduées, on définit sur $A \otimes B$ une structure d'algèbre, associative si A et B le sont, en posant :

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = (-1)^{\beta\gamma} ac \otimes bd$$

si b est de degré β et c de degré γ .

Si A et B opèrent respectivement sur des modules gradués E et F , on fait opérer $A \otimes B$ sur $E \otimes F$ en posant :

$$(a \otimes b)(e \otimes f) = (-1)^{\beta\xi} ae \otimes bf,$$

où β et ξ désignent les degrés de b et e .

1. Opérations cohomologiques.

A. Définition. - Une opération cohomologique Ω , de type $(n, \Pi; q, G)$, est un morphisme de foncteurs

$$H^n(\ ; \Pi) \longrightarrow H^q(\ ; G)$$

considérés comme foncteurs à valeurs dans la catégorie des ensembles.

Ω est donc la donnée, pour toute paire X d'ensembles simpliciaux, d'une application ensembliste

$$\Omega_X : H^n(X; \Pi) \longrightarrow H^q(X; G),$$

de façon que, pour toute application simpliciale

$$f : X' \longrightarrow X,$$

on ait le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 H^n(X, \Pi) & \xrightarrow{\Omega_X} & H^q(X, G) \\
 f^* \downarrow & & f^* \downarrow \\
 H^n(X', \Pi) & \xrightarrow{\Omega_{X'}} & H^q(X', G) .
 \end{array}$$

Ω est dite additive si c'est un morphisme de foncteurs à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens et homomorphismes ; autrement dit, si

$$\Omega_X(u + v) = \Omega_X(u) + \Omega_X(v) \quad \text{pour tout } X ,$$

et pour tous u, v dans $H^n(X; \Pi)$.

THEOREME. - Pour tout $\omega \in \tilde{H}^q(\Pi, n; G)$, il existe une opération cohomologique Ω de type $(n, \Pi; q, G)$ et une seule telle que :

$$\Omega(\xi_n) = \omega ,$$

ξ_n désignant la classe fondamentale de $\tilde{H}^n(\Pi, n; \Pi)$.

DÉMONSTRATION.

a) Unicité : Si $\dot{\gamma} \in \tilde{H}^n(X; \Pi)$, on a $\bar{\gamma} : X \rightarrow (K(\Pi, n), e)$, et $\dot{\gamma} = \bar{\gamma}^*(\xi_n)$, d'où $\Omega(\dot{\gamma}) = \bar{\gamma}^*(\omega)$.

b) Existence : Posons $\Omega(\dot{\gamma}) = \bar{\gamma}^*(\omega)$, qui ne dépend pas du représentant γ choisi dans $\dot{\gamma}$, car, si on le change, $\bar{\gamma}$ est remplacée par une application homotope. Il reste à vérifier la functorialité : on a $f^*(\dot{\gamma}) = \bar{\gamma} \circ f$, d'où

$$\Omega(f^*(\dot{\gamma})) = \overline{f^*(\dot{\gamma})}^*(\omega) = (\bar{\gamma} \circ f)^*(\omega) = f^*(\bar{\gamma}^*(\omega)) = f^*(\Omega(\dot{\gamma}))$$

COROLLAIRE. - Les opérations cohomologiques de type $(n, \Pi; q, G)$, où $q < n$, sont toutes nulles. Pour $q = n$, elles sont données par les homomorphismes de Π dans G .

B. Suspension. - Rappelons qu'on appelle suspension

$$\sigma : H^{q+1}(\Pi, n+1; G) \longrightarrow \tilde{H}^q(\Pi, n; G)$$

l'homomorphisme composé $\sigma = \delta^{-1} P^*$ de

$$P^* : H^{q+1}(K(\Pi, n+1), e; G) \longrightarrow H^{q+1}(L(\Pi, n), K(\Pi, n); G)$$

et de l'inverse de $\delta : \tilde{H}^q(\Pi, n; G) \longrightarrow H^{q+1}(L(\Pi, n), K(\Pi, n); G)$;

δ est un isomorphisme puisque $L(\Pi, n)$ est acyclique. C'est aussi le composé

$$H^{q+1}(\Pi, n+1; G) = E_2^{q+1,0} \longrightarrow E_{q+1}^{q+1,0} \xrightarrow{\theta^{-1}} E_{q+1}^{\theta,q} \longrightarrow E_2^{0,q} = \tilde{H}^q(\Pi, n; G)$$

où θ désigne la transgression dans la suite spectrale du fibré $L(\Pi, n)$, qui est un isomorphisme (suite exacte de l'exposé 3, n° 4).

THÉOREME. - Soient $\omega \in \tilde{H}^q(\Pi, n; G)$, $\omega' \in \tilde{H}^{q+1}(\Pi, n+1; G)$, Ω et Ω' les opérations cohomologiques associées.

Pour qu'on ait, pour toute paire (X, Y) , le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}^n(Y; \Pi) & \xrightarrow{\Omega} & \tilde{H}^q(Y; G) \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ \tilde{H}^{n+1}(X, Y; \Pi) & \xrightarrow{\Omega'} & \tilde{H}^{q+1}(X, Y; G), \end{array}$$

il faut et il suffit que $\omega = \sigma(\omega')$.

DEMONSTRATION. -

a. Il suffit : Supposons $\omega = \sigma \omega'$, soit $P^*(\omega') = \delta \omega$. Soit $\dot{\gamma} \in H^n(Y; \Pi)$, $\beta \in C^n(X; \Pi)$ une cochaîne qui induit sur Y le cocycle $\dot{\gamma}$, et $\dot{\eta} = \delta \beta \in Z^{n+1}(X, Y; \Pi)$. On a, par définition, $\delta \dot{\gamma} = \dot{\eta}$. On a d'autre part le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\bar{\gamma}} & K(\Pi, n) \\ | & & | \\ (X, Y) & \xrightarrow{\bar{\beta}} & (L(\Pi, n), K(\Pi, n)) \\ & \searrow \bar{\eta} & \downarrow P \\ & & (K(\Pi, n+1), e), \end{array}$$

d'où :

$$\Omega'(\delta \dot{\gamma}) = \Omega'(\dot{\eta}) = \bar{\eta}^*(\omega') = \bar{\beta}^*(P^*(\omega')) = \bar{\beta}^*(\delta \omega) = \delta(\bar{\gamma}^*(\omega)) = \delta(\Omega(\dot{\gamma})).$$

b. Il faut : On a $\xi_n = \sigma(\xi_{n+1})$. En effet $\bar{\xi}_{n+1}$ n'est autre que l'identité

de $K(\Pi, n+1)$, et $P^*(\xi_{n+1}) = \bar{\xi}_{n+1} \circ P = P \cdot \xi_n$. Si ξ_n est le cocycle fondamental sur $K(\Pi, n)$, et ξ la cochaîne fondamentale sur $L(\Pi, n)$, qui induit ξ_n sur $K(\Pi, n)$, $\bar{\xi}$ est l'identité de $L(\Pi, n)$, et $\delta \bar{\xi} = P$, d'où $P^*(\xi_{n+1}) = \delta \xi_n$.

On a alors :

$$\omega = \Omega(\xi_n) = \Omega(\delta^{-1}(P^*(\xi_{n+1}))) = \delta^{-1}(\Omega'(P^*(\xi_{n+1}))) = \delta^{-1}(P^*(\Omega'(\xi_{n+1}))) = \sigma \omega'$$

DEFINITION. - Si Ω' est une opération cohomologique de type $(n+1, \Pi; q+1, G)$, on appelle suspension de Ω' l'opération cohomologique $\Omega = \sigma \Omega'$ de type $(n, \Pi; q, G)$, telle que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^n(X; \Pi) & \xrightarrow{\Omega} & H^q(X, G) \\ \delta \downarrow \approx & & \delta \downarrow \approx \\ H^{n+1}(E, X \cup e; \Pi) & \xrightarrow{\Omega'} & H^{q+1}(E, X \cup e; G), \end{array}$$

E désignant le cône de base X et de sommet e , c'est-à-dire $X \times \Delta_1 / i_0(X)$.

Il ressort du théorème précédent que, si Ω est associée à ω , $\sigma \Omega$ est associée à $\sigma(\omega)$.

C. THÉORÈME. - Toute opération cohomologique Ω de la forme $\sigma \Omega'$ est additive.

Ce théorème sera une conséquence du

LEMME (Frank PETERSON et E. THOMAS) : Pour toute opération cohomologique Ω , de type $(n, \Pi; q, G)$, on a

$$\Omega(u + \delta v) = \Omega(u) + \Omega(\delta v)$$

si $u \in H^n(X, Y; \Pi)$ et $v \in H^{n-1}(Y; \Pi)$.

DÉMONSTRATION du lemme (voir aussi l'appendice pour une démonstration dans un cadre plus général). - Soient γ et θ deux cocycles sur (X, Y) , θ étant cohomologue à 0 sur X , mais pas nécessairement mod Y . Définissons les cocycles Γ et Θ sur $X \times \Delta_1$ par $\Gamma = P^*(\gamma)$, où P est la projection de $X \times \Delta_1$ sur X , et $i_1^*(\Theta) = \theta$, $i_0^*(\Theta) = 0$ (Exposé 8, Théorème 2 D, démonstration b).

Soit $\psi \in Z^q(\Pi, n; G)$ tel que $\omega = \dot{\psi}$ définisse Ω .

Considérons le cocycle sur $X \times \Delta_1$:

$$\overline{\Gamma + \Theta}^*(\psi) - \bar{\Gamma}^*(\psi) - \bar{\Theta}^*(\psi).$$

Il est nul sur $Y \times \Delta_1$, où Γ est nul.

Il est nul sur $i_0(X)$, où Θ est nul.

Sur $i_1(X)$, il induit un cocycle de la classe

$$\Omega(\gamma + \theta) - \Omega(\gamma) - \Omega(\theta) \in H^q(X, Y; G)$$

Ce dernier cocycle est cohomologue à 0 sur $X \text{ mod } Y$. D'où le lemme en posant $u = \dot{\gamma}$, $\delta v = \dot{\theta}$.

DÉMONSTRATION du théorème : Soient $\Omega = \sigma \Omega'$, $u, v \in H^n(X, \Pi)$, E le cône de base X , $\delta : H^*(X) \xrightarrow{\cong} H^*(E, X \cup e)$. On a

$$\delta \Omega(u+v) = \Omega' \delta(u+v) = \Omega'(\delta u + \delta v) = \Omega' \delta u + \Omega' \delta v = \delta \Omega u + \delta \Omega v = \delta(\Omega u + \Omega v),$$

d'où $\Omega(u+v) = \Omega u + \Omega v$ puisque δ est biunivoque.

D. Applications diagonales.

LEMME : Si Π est un groupe abélien de type fini et G un corps, $H^q(\Pi, n; G)$ est un espace vectoriel de dimension finie sur G pour tous $n, q > 0$.

DÉMONSTRATION par récurrence sur n :

a. pour $n = 1$: C'est vrai si $\Pi = Z$, car $K(Z, 1)$ a même type d'homotopie qu'un cercle. C'est vrai si $\Pi = Z_n$, en vertu de la coproposition 3. C. de l'exposé 3, car $K(Z_n, 1)$ est base d'un fibré dont l'espace et la fibre sont $K(Z, 1)$ (Exposé 8, paragraphe 3, A). Si Π est un groupe abélien de type fini quelconque, Π est produit de groupes Π_i cycliques, et $K(\Pi, 1)$ est produit des $K(\Pi_i, 1)$ correspondants.

b. Si le lemme est démontré pour n , on le démontre pour $(n+1)$ en appliquant la coproposition 3. C. de l'exposé 3 au fibré $L(\Pi, n)$ de fibre $K(\Pi, n)$, sur

$K(\Pi, n+1)$ simplement connexe.

Il résulte du lemme que :

$$C : \bigoplus_{q'+q''=q} \tilde{H}^{q'}(\Pi, n'; G) \otimes \tilde{H}^{q''}(\Pi, n''; G) \rightarrow \tilde{H}^q((K(\Pi, n'), e) \times (K(\Pi, n''), e); G)$$

est un isomorphisme.

Notons $O_n^q = \tilde{H}^q(\Pi, n; G)$ l'espace vectoriel sur G des opérations cohomologiques de type $(n, \Pi; q, G)$, auquel nous accorderons le degré $i = q - n$. Supposons Π muni d'une structure d'anneau. Alors pour toute $\Omega \in O_n^q$, et tout couple n', n'' tel que $(n' + n'') = n$, il existe un élément unique

$$D_{n', n''} \Omega \in \bigoplus_{q'+q''=q} O_{n'}^{q'} \otimes O_{n''}^{q''} \text{ tel que,}$$

si $D_{n', n''} \Omega = \sum \Omega'_j \otimes \Omega''_j$, on ait :

$$\Omega C(\xi_{n'} \otimes \xi_{n''}) = C\left(\sum (-1)^{n'i''_j} \Omega'_j \xi_{n'} \otimes \Omega''_j \xi_{n''}\right).$$

Les applications $D_{n', n''} : O_n^q \rightarrow \bigoplus O_{n'}^{q'} \otimes O_{n''}^{q''}$ sont G -linéaires et seront appelées diagonales. On a :

$$\Omega C(u \otimes v) = C\left(\sum (-1)^{n'i''_j} \Omega'_j u \otimes \Omega''_j v\right)$$

pour tous $u \in H^{n'}(X; \Pi)$, $v \in H^{n''}(Y; \Pi)$, X et Y étant des paires quelconques d'ensembles simpliciaux.

E. Compatibilité des applications diagonales avec la suspension.

THÉOREME : Soit Π un anneau de type fini en tant que groupe abélien, G un corps, Ω une opération cohomologique de type $(n, \Pi; q, G)$. Alors, si

$D_{n', n''} \Omega = \sum \Omega'_j \otimes \Omega''_j$, on a :

$$\begin{cases} \text{a)} & D_{n'-1, n''} \sigma \Omega = \sum (-1)^{i''_j} \sigma \Omega'_j \otimes \Omega''_j \\ \text{b)} & D_{n', n''-1} \sigma \Omega = \sum (-1)^{i'_j} \Omega'_j \otimes \sigma \Omega''_j \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. - Soient X et Y deux ensembles simpliciaux.

a. Soit E le cône de base X .

Plongeons X dans $(E, X \cup e)$ et $X \times Y$ dans $(E, X \cup e) \times Y$.

Pour tous $u \in H^{n'-1}(X)$, $v \in H^{n''}(Y)$, on a :

$$\begin{aligned} \delta \sigma \Omega C(u \otimes v) &= \Omega \delta C(u \otimes v) = \Omega C(\delta u \otimes v) = C \left(\sum (-1)^{n'i''} \Omega' \delta u \otimes \Omega'' v \right) = \\ &= C \left(\sum (-1)^{n'i''} \delta \sigma \Omega' u \otimes \Omega'' v \right) = \delta C \left(\sum (-1)^{n'i''} \sigma \Omega' u \otimes \Omega'' v \right), \text{ donc} \\ \sigma \Omega C(u \otimes v) &= C \left(\sum (-1)^{n'i''} \sigma \Omega'_j u \otimes \Omega''_j v \right) \end{aligned}$$

puisque δ est biunivoque, d'où (a) en remarquant que u est de degré $n' - 1$.

b. Soit E le cône de base Y . Plongeons Y dans $(E, Y \cup e)$ et $X \times Y$ dans $X \times (E, Y \cup e)$. Pour tous $u \in H^{n'}(X)$, $v \in H^{n''-1}(Y)$, on a :

$$\begin{aligned} \delta \sigma \Omega C(u \otimes v) &= \Omega \delta C(u \otimes v) = \Omega C(u \otimes \delta (-1)^{n'} v) = \\ &= C \left(\sum (-1)^{n'i''} \Omega' u \otimes \delta \sigma \Omega'' (-1)^{n'} v \right) = C \left(\sum (-1)^{n'i''+n'} \Omega' u \otimes \delta \sigma \Omega'' v \right) \end{aligned}$$

car $\sigma \Omega''$ est nécessairement additive (Théorème 1. C.).

Donc

$$\sigma \Omega C(u \otimes v) = C \left(\sum (-1)^{n'i''+i'} \Omega' u \otimes \sigma \Omega'' v \right),$$

d'où (b) en remarquant que $\sigma \Omega''$ est de degré i'' comme Ω'' .

COROLLAIRE. - En posant, pour toute opération cohomologique Ω

$$\tilde{\sigma}(\Omega) = (-1)^i \sigma \Omega,$$

où $i = q - n$ est le degré de Ω , le théorème s'énonce, sous les mêmes hypothèses :

$$\begin{cases} D_{n'-1, n''} \tilde{\sigma}(\Omega) = \sum \tilde{\sigma}(\Omega'_j) \otimes \Omega''_j \\ D_{n', n''-1} \tilde{\sigma}(\Omega) = \sum \Omega'_j \otimes \tilde{\sigma}(\Omega''_j) \end{cases} .$$

2. Opérations cohomologiques stables.

A. Définition. - On appelle opération cohomologique stable de type (i, π, G) une suite $P = (P_n)$ d'opérations cohomologiques, P_n étant de type $(n, \pi; n+i, G)$,

telles qu'on ait, pour toute paire (X, Y) d'ensembles simpliciaux et pour tout n , le diagramme anticommutatif si i est impair, commutatif si i est pair :

$$\begin{array}{ccc} H^n(Y; \pi) & \xrightarrow{P_n} & H^{n+i}(Y; G) \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ H^{n+1}(X, Y; \pi) & \xrightarrow{P_{n+1}} & H^{n+i+1}(X, Y; G) \end{array}$$

Il revient au même de dire que $P_n = \widetilde{\sigma} P_{n+1} = (-1)^i \sigma P_{n+1}$ pour tout n .

Les P_n sont donc nécessairement additives (Théorème 1. C.). La somme directe des espaces S^i des opérations cohomologiques stables de type (i, π, π) pourra être considéré comme une algèbre pour la composition, qui opère sur $H^*(X; \pi)$ pour tout ensemble simplicial X .

EXEMPLE : l'opération de Bockstein. - Soit $0 \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow \pi \rightarrow 0$ une suite exacte de groupes abéliens. On a, pour tout n et pour tout ensemble simplicial X , un opérateur cobord $\beta : H^n(X, \pi) \rightarrow H^{n+1}(X; G)$, naturel en X . Si $Y \subset X$, on a le diagramme commutatif exact :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & C^n(Y; G) & \rightarrow & C^n(Y; A) & \rightarrow & C^n(Y; \pi) \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & C^n(X; G) & \rightarrow & C^n(X; A) & \rightarrow & C^n(X; \pi) \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & C^n(X, Y; G) & \rightarrow & C^n(X, Y; A) & \rightarrow & C^n(X, Y; \pi) \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

qui donne lieu, ainsi qu'il est bien connu, au diagramme anticommutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^n(Y; \pi) & \xrightarrow{\beta} & H^{n+1}(Y; G) \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ H^{n+1}(X, Y; \pi) & \xrightarrow{\beta} & H^{n+2}(X, Y; G) \end{array}$$

β est donc une opération cohomologique stable de type $(1, \mathbb{T}; G)$. Pour tout nombre premier p , l'opération β de la suite exacte

$$0 \longrightarrow Z_p \longrightarrow Z_p \otimes \longrightarrow Z_p \longrightarrow 0$$

est appelée opération de Bockstein modulo p .

B. Proposition. -

a. Si Ω est une opération cohomologique de type $(n, \mathbb{T}; n+i, G)$, où $i < n$, il existe une opération cohomologique stable $P = (P_k)$ de type (i, \mathbb{T}, G) et une seule telle que $P_n = \Omega$.

b. Soit Ω une opération cohomologique de type $(i, \mathbb{T}; 2i; G)$. Pour qu'il existe une opération cohomologique stable $P = (P_k)$ de type (i, \mathbb{T}, G) telle que $P_i = \Omega$, il faut et il suffit que l'élément $\omega \in H^{2i}(\mathbb{T}, i; G)$ qui définit Ω soit transgressif dans la suite spectrale de cohomologie du fibré $L(\mathbb{T}, i)$; ou, ce qui est équivalent, que $d_{i+1}(\omega) = 0$. L'opération cohomologique stable P est alors unique.

DÉMONSTRATION. - On pose $P_n = \Omega$; P_k est définie par récurrence descendante pour $k < i$ par $P_k = \tilde{\sigma} P_{k+1}$.

a. P_k est défini par récurrence ascendante pour $k > i$ par $P_k = \tilde{\sigma}^{-1} P_{k-1}$.

En effet la transgression

$$\theta : H^{k+i-1}(\mathbb{T}, k-1; G) \longrightarrow H^{k+i}(\mathbb{T}, k; G)$$

est un isomorphisme (Exposé 3, coproposition 5, A), et la suspension σ est l'isomorphisme inverse. $\tilde{\sigma} : O_k^{k+i} \longrightarrow O_{k-1}^{k+i-1}$ est donc un isomorphisme.

b. La suspension $\sigma : H^{2i+1}(\mathbb{T}, i+1; G) \longrightarrow H^{2i}(\mathbb{T}, i; G)$ est injective et son image se compose des éléments transgressifs, comme il ressort du diagramme (avec les notations de l'Exposé 3) :

$$\begin{array}{ccccccc} H^{2i}(X) & \longrightarrow & E_{2i+1}^{0, 2i} & \xrightarrow{\theta} & E_{2i+1}^{2i+1, 0} & \longrightarrow & H^{2i+1}(X) \\ \parallel & & & \approx & & & \parallel \\ 0 & & & & & & 0 \\ & & \downarrow \text{inj} & & \uparrow \approx & & \\ & & H^{2i}(F) & \xleftarrow{\sigma} & H^{2i+1}(B) & & \end{array}$$

C. L'application diagonale : Soit Π un anneau de type fini en tant que groupe abélien, G un corps. L'espace vectoriel $S^i(\Pi, G)$ des opérations cohomologiques stables de type (i, Π, G) n'est autre que la limite projective des $O_n^{n+i}(\Pi, G)$ et des $\tilde{\sigma}$, limite d'ailleurs atteinte en un temps fini puisque les $\tilde{\sigma}$ sont des isomorphismes pour $n > i$. On a donc

$$S^{i'} \otimes S^{i''} = \lim_{\substack{n' \rightarrow \infty \\ n'' \rightarrow \infty}} \text{proj } (O_{n'}^{n'+i'} \otimes O_{n''}^{n''+i''}) .$$

Les applications diagonales $D_{n', n''}$, qui vérifient les relations de commutation avec $\tilde{\sigma}$ du Corollaire de 1.E définissent par passage aux limites projectives une application :

$$\Delta : S^i \longrightarrow \bigoplus_{i'+i''=i} S^{i'} \otimes S^{i''} ,$$

appelée application diagonale, qui munit $S^* = \bigoplus S^i$ d'une structure de co-algèbre. Cette structure est anticommutative et associative comme l'opération C d'où elle provient.

PROPOSITION. - Avec la règle de Koszul, on a, pour toute opération cohomologique stable P de degré i :

- $C \circ \Delta P = P \circ C$
- $(\delta \otimes 1) \circ \Delta P = (-1)^i \Delta P \circ (\delta \otimes 1)$
- $(1 \otimes \delta) \circ \Delta P = (-1)^i \Delta P \circ (1 \otimes \delta)$

DEMONSTRATION. - Soient X et Y des ensembles simpliciaux quelconques, P une opération cohomologique stable. Soit $\Delta P = \sum P' \otimes P''$.

a. on a $D_{n', n''} P_n = \sum P'_{n'} \otimes P''_{n''}$ si $n = n' + n''$. Si $u \in H^{n'}(X)$, $v \in H^{n''}(Y)$, on a :

$$PC(u \otimes v) = P_n C(u \otimes v) = C(\sum (-1)^{P'_{n'}, u} P'_{n'} \otimes P''_{n''} v) = C(\sum P'_{n'} \otimes P''_{n''}) (u \otimes v) = C(\Delta P) (u \otimes v)$$

b. Si $X' \subset X$, et si $\delta : H^*(X') \rightarrow H^*(X, X')$ est l'opérateur cobord, on a :

$$(\delta \otimes 1) \circ (P' \otimes P'') = \delta \circ P' \otimes P'' = (-1)^{i'} P' \circ \delta \otimes P'' = (-1)^{i'+i''} (P' \otimes P'') (\delta \otimes 1) .$$

e. De même, en considérant $Y' \subset Y$.

3. Les opérations de Steenrod modulo 2.

A. Appliquons la proposition 2 - B - (b) au cas $\mathbb{T} = G = Z_2$ (ce qui nous délivre de toute préoccupation de signe).

L'élément ξ_i^2 de $H^{2i}(Z_2, i; Z_2)$ est transgressif car

$$d_{i+1}(\xi_i^2) = d_{i+1}(\xi_i) \cdot \xi_i + \xi_i \cdot d_{i+1}(\xi_i) = 0.$$

L'opération cohomologique qu'il définit est le cup-carré des éléments de degré i .

PROPOSITION et DÉFINITION. - Il existe une opération cohomologique stable de type (i, Z_2, Z_2) et une seule qui donne le cup-carré en dimension i . On l'appelle l'opération Sq^i de Steenrod.

PROPRIÉTÉS.

- Sq^0 est l'identité
- $Sq^1 = \beta$ est l'opération de Bockstein modulo 2
- $Sq^i: H^n(\ ; Z_2) \longrightarrow H^{n+i}(\ ; Z_2)$ est nulle pour $n < i$
- Sq^i est la seule opération cohomologique stable de type (i, Z_2, Z_2) , non identiquement nulle, qui s'annule sur la classe fondamentale ξ_{n-1} .

DÉMONSTRATION. -

a. Les opérations cohomologiques de degré 0 sont données par les homomorphismes $Z_2 \longrightarrow Z_2$: il y a donc deux opérations cohomologiques stables, l'identité et 0. Sq^0 coïncide avec l'identité en dimension 0, c'est donc l'identité.

b. L'espace vectoriel S^1 des opérations cohomologiques stables de type $(1, Z_2, Z_2)$ est isomorphe à l'ensemble des éléments transgressifs de $H^2(Z_2, 1; Z_2)$. Or $H^*(Z_2, 1; Z_2) = Z_2[\xi_1]$, et $H^2(Z_2, 1; Z_2)$ a deux éléments: ξ_1^2 et 0, tous deux transgressifs. Il suffit donc de montrer que β n'est pas nulle sur ξ_1 . Mais l'identité $I: Z_2 \longrightarrow Z_2$ ne se factorise pas par Z_4 , et ξ_1 n'est pas dans l'image de $H^1(Z_2, 1; Z_4) \longrightarrow H^1(Z_2, 1; Z_2)$, donc pas dans le noyau de β .

c. Il suffit de montrer que $\sigma(\xi_i^2) = 0$ dans la suite spectrale du fibré $L(Z_2, i-1)$. Mais $\xi_i = d_i \xi_{i-1}$, d'où

$$d_i(\xi_i \xi_{i-1}) = d_i \xi_i \cdot \xi_{i-1} + \xi_i^2 = \xi_i^2.$$

L'image de ξ_i^2 dans $E_{2i}^{2i,0}$ est donc nulle, et a fortiori $\sigma(\xi_i^2) = 0$.

d. Le noyau de $\sigma: H^{2i}(Z_2, i; Z_2) \rightarrow H^{2i-1}(Z_2, i-1; Z_2)$ est le même que celui de $H^{2i}(Z_2, i; Z_2) \rightarrow E_{2i}^{2i,0}$: c'est l'image de $d_i^{i,i-1}$.

Or $E_i^{i,i-1} = E_2^{i,i-1} = H^i(Z_2, i; Z_2) \otimes H^{i-1}(Z_2, i-1; Z_2)$

$$= \text{Hom}(Z_2, Z_2) \otimes_{Z_2} \text{Hom}(Z_2, Z_2) = Z_2 = \{0, \xi_i \xi_{i-1}\}. \text{ D'où } \text{Ker } \sigma = \{0, \xi_i^2\}.$$

B. Formule du produit.

THÉORÈME. - On a $\Delta \text{Sq}^i = \sum_{j+k=i} \text{Sq}^j \otimes \text{Sq}^k$,

c'est-à-dire

$$\text{Sq}^i C(u \otimes v) = C \sum_{j+k=i} \text{Sq}^j u \otimes \text{Sq}^k v.$$

chaque fois que $u \in H^p(X; Z_2)$, $v \in H^q(Y; Z_2)$, X et Y étant des ensembles simpliciaux quelconques, p et q des entiers quelconques.

DÉMONSTRATION. -

a. Si $p+q < i$, tout est nul (Propriété A. c)

b. Si $p+q = i$, la formule se réduit à

$$(C(u \otimes v))^2 = C(u^2 \otimes v^2)$$

(Exposé 8, fin du paragraphe 1).

c. Si $p+q > i$, il suffit de le démontrer pour $u = \xi_p$, $v = \xi_q$, car $u = \bar{\alpha}^* \xi_p$, $v = \bar{\beta}^* \xi_q$, $C(u \otimes v) = (\bar{\alpha}, \bar{\beta})^* C(\xi_p \otimes \xi_q)$ si $u = \bar{\alpha}$, $v = \bar{\beta}$.

La démonstration se fait par récurrence sur $p+q$.

La proposition 2 - C(b) et la functorialité des opérations cohomologiques stables montrent que ΔSq^i commute à $\zeta \otimes 1$ et à $P^* \otimes 1$, donc à $\sigma \otimes 1$,

$\sigma = \overset{-1}{\sigma} \circ P^*$ désignant la suspension dans le fibré $L(Z_2, p-1)$. On a donc :

$$\begin{aligned} (\sigma \otimes 1)(\Delta Sq^i)(\xi_p \otimes \xi_q) &= (\Delta Sq^i)(\sigma \otimes 1)(\xi_p \otimes \xi_q) = (\Delta Sq^i)(\xi_{p-1} \otimes \xi_q) = \\ &= \sum_{j+k=i} Sq^j \xi_{p-1} \otimes Sq^k \xi_q = (\sigma \otimes 1) \sum_{j+k=i} Sq^j \xi_p \otimes Sq^k \xi_q . \end{aligned}$$

De même

$$(1 \otimes \sigma)(\Delta Sq^i)(\xi_p \otimes \xi_q) = (1 \otimes \sigma) \sum_{j+k=i} Sq^j \xi_p \otimes Sq^k \xi_q .$$

Les éléments $(\Delta Sq^i)(\xi_p \otimes \xi_q)$ et $\sum_{j+k=i} Sq^j \xi_p \otimes Sq^k \xi_q$ de

$$\bigoplus_{j+k=i} H^{p+j}(Z_2, p; Z_2) \otimes H^{q+k}(Z_2, q; Z_2) \text{ ont même image par } \sigma \otimes 1 .$$

Ils ont aussi même image par $1 \otimes \sigma$. Or $\sigma \otimes 1$ (resp $1 \otimes \sigma$) est injectif sur les facteurs de la somme directe correspondant à $j < p$ (resp $k < q$). Mais, pour tout couple (j, k) tel que $j + k = i < p+q$, on a $j < p$ ou $k < q$, et les deux éléments en question sont égaux.

C. THÉORÈME. - $Sq^1 \circ Sq^i = \begin{cases} Sq^{i+1} & \text{si } i \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$

DEMONSTRATION. - $Sq^1 \circ Sq^i$ est une opération cohomologique nulle en dimension i : en effet pour $u \in H^i(X; Z_2)$ on a $Sq^1(u^2) = (Sq^1 u) \cdot u + u \cdot (Sq^1 u) = 0$ d'après la formule du produit.

Il en résulte que $Sq^1 \circ Sq^i$ est proportionnel à Sq^{i+1} (Propriété 3-A . d).

Tout revient à savoir si le coefficient de proportionnalité est 1 ou 0. Pour cela il suffit de regarder un exemple, en calculant $Sq^1 \circ Sq^i(u)$ pour un u de degré $i+1$ tel que $u^2 \neq 0$. Prenons $X = K(Z_2, 1)$, et soit $u = \xi_1^{i+1}$, ξ_1 étant la classe fondamentale de $H^*(Z_2, 1; Z_2) = Z_2[\xi_1]$. D'après la formule du produit, on a (puisque $Sq^k \xi_1 = 0$ pour $k > 1$, et $Sq^1 \xi_1 = \xi_1^2$) :

$$Sq^i(\xi_1^{i+1}) = (1+i) \xi_1^{2i+1}$$

$$\text{Or } Sq^1 \zeta_1^{2i+1} = (2i+1) \zeta_1^{2i+2} = \zeta_1^{2i+2} .$$

$$\text{Donc } Sq^1 \circ Sq^i(u) = (1+i) \zeta_1^{2i+2} = (1+i) u^2 .$$

En particulier $Sq^1 \circ Sq^1 = 0$, ce qu'on savait déjà puisque $Sq^1 = \beta$.

APPENDICE

Opérations cohomologiques à plusieurs variables.

Soit (X, A) un couple d'espaces simpliciaux, soit G un groupe abélien, et soit n un entier. On sait que la donnée d'un élément de $H^n(X, A; G)$ équivaut à la donnée d'une classe d'applications homotopes $(X, A) \rightarrow (K(G, n), e)$, où e désigne l'unique sommet de $K(G, n)$. On vérifie de la même façon que la donnée d'un élément de $H^n(A; G)$ équivaut à la donnée d'une classe d'applications homotopes $(X, A) \rightarrow (L(G, n+1), K(G, n))$. En formant un produit, on voit donc que $H^n(X, A; G) \times H^{n'}(A; G')$ est en correspondance bijective canonique avec les classes d'applications homotopes de (X, A) dans le couple produit $(Y, Z) = (K(G, n) \times L(G', n'+1), e \times L(G', n'))$.

Considérons alors les opérations cohomologiques à deux variables $T(x, y)$, avec :

$$x \in H^n(X, A; G), \quad y \in H^{n'}(A, G'), \quad T(x, y) \in H^q(X, A; G'').$$

Par le raisonnement usuel, ces opérations correspondent aux éléments $t \in H^q(Y, Z; G'')$ où (Y, Z) est le couple écrit ci-dessus.

Mais les groupes de cohomologie de (Y, Z) se laissent immédiatement déterminer ; on a :

$$H^q(Y, Z) = H^q(G, n) \times H^{q-1}(G', n').$$

En explicitant, on voit alors que T est défini par la donnée de deux opérations cohomologiques $T_a \in H^q(G, n; G'')$ et $T_r \in H^{q-1}(G', n'; G'')$, et que l'on a l'identité :

$$(*) \quad T(x, y) = T_a(x) + \delta T_r(y) = T(x, 0) + T(0, y) .$$

Cas particulier : Soit $f(x)$ une opération cohomologique $\in H^q(G, n; G'')$, et

définissons T par la formule :

$$T(x, y) = f(x + \zeta y) .$$

Si l'on fait $y = 0$ dans la formule $(*)$, on voit que $T_a = f$, et si l'on fait $x = 0$, on voit que T_r est la suspension f' de f . On obtient donc le théorème d'additivité :

$$(**) \quad f(x + \zeta y) = f(x) + \delta f'(y) = f(x) + f(\zeta y) .$$

Généralisations. On pourrait prendre plusieurs variables $x_i \in H^*(X, A)$, plusieurs variables $y_j \in H(A)$, et même a priori des variables $t_k \in H^*(X)$. On trouverait chaque fois un couple (Y, Z) universel comme ci-dessus. S'il n'y a aucun t_k , la cohomologie relative de ce couple se décompose en somme directe de cohomologies de produits d'espaces d'Eilenberg-MacLane et l'opération

$$T(x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_j)$$

s'écrit sous la forme :

$$T(x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_j) = T_a(x_1, \dots, x_i) + \delta T_r(y_1, \dots, y_j) .$$
