HENRI CARTAN

Invariant de Hopf (fin)

Séminaire Henri Cartan, tome 11, n° 1 (1958-1959), exp. n° 6, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_1_A6_0>

12 janvier 1959

INVARIANT DE HOPF (Fin)

par Henri CARTAN

5. Sur la structure de $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$ pour n impair.

Rappelons d'abord le résultat classique de SERRE [6] : pour n impair, le groupe $\pi_i(S_n)$ est fini si $i > n$. Indiquons très brièvement le principe d'une démonstration :

a. Soit X un espace connexe et simplement connexe ; si les $H_i(X)$ sont de type fini (resp. de torsion) pour $i > 0$, il en est de même des $\pi_i(X)$. Pour le voir, supposons que $\pi_n(X)$ soit le premier groupe d'homotopie $\neq 0$ $(n \geq 2)$; on construit (àl'aide d'un espace de chemins) un espace Y ayant le même type d'homotopie que X , et une application fibrée $f : Y \longrightarrow K(\pi_n(X), n)$, de fibre Y' , telle que f définisse un isomorphisme $\pi_n(Y) \longrightarrow \pi_n(X)$; l'espace Y' a les mêmes groupes d'homotopie que Y , sauf $\pi_n(Y') = 0$. Les groupes d'homologie de $K(\pi_n(X), n)$ sont de type fini (resp. de torsion) ; la suite spectrale du fibré montre alors que les $H_i(Y')$ (pour $i > 0$) sont de type fini (resp. de torsion), et il en est notamment ainsi de $\pi_{n+1}(Y') \approx \pi_{n+1}(X)$. D'où le principe d'une démonstration récurrente.

b. Dans la construction précédente, supposons que $X = S_n$, n impair, et calculons les groupes d'homologie à coefficients rationnels. On a

$$H_i(Z , n ; Q) = 0 \quad \text{pour} \quad i > 0 \text{ , sauf pour } \quad i = n \text{ ,}$$

et $H_n(Z , n ; Q) \approx Q$ (cf. la suite spectrale de la fibration de base $K(Z,n+1)$ et fibre $K(Z , n)$) . La suite spectrale du fibré Y montre aussitôt que $H_i(Y' ; Q) = 0$ pour tout $i > 0$. Il s'ensuit que les $H_i(Y')$ à coefficients entiers sont des groupes de torsion pour $i > 0$; et comme ils sont de type fini d'après (a) , ce sont des groupes finis. En appliquant (a) à l'espace Y' , on voit que les $\pi_i(Y')$ sont finis. Or $\pi_i(S_n) \approx \pi_i(Y')$ pour $i > n$.

Signalons que des raisonnements analogues (mais un peu plus compliqués) permettent de montrer que, pour n pair, les $\pi_i(S_n)$, pour $i > n$, sont finis sauf si $i = 2n-1$. Nous n'utiliserons pas ce résultat.

On va maintenant préciser la structure de $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$ pour n impair, en utilisant les résultats de l'Exposé 5. Tout d'abord, le noyau de H est le sous-groupe de torsion de $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$; car il contient évidemment le sous-groupe de torsion ; et ce noyau, image de la suspension E, est fini, puisque $\pi_{2n}(S_n)$ est fini.

Premier cas : n impair non exceptionnel. - On a donc $[i_n , i_n] \neq 0$. Alors l'image de $H : \pi_{2n+1}(S_{n+1}) \longrightarrow Z$ se compose des entiers pairs, autrement dit, elle est engendrée par $H[i_{n+1} , i_{n+1}]$ (cf. théorème 2 de l'Exposé 5). Dans le diagramme (7) de l'Exposé 5, remplaçons n par $n+1$, et considérons l'application

$$\partial : Z \approx \pi_{2n+2}(\Omega(S_{n+2}) , S_{n+1}) \longrightarrow \pi_{2n+1}(S_{n+1}) .$$

On voit que l'application composée

$$Z \xrightarrow{\partial} \pi_{2n+1}(S_{n+1}) \xrightarrow{\frac{1}{2} H} Z$$

est égale à $\pm$ l'identité. Autrement dit, le groupe $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$ est somme directe du sous-groupe (isomorphe à Z) engendré par $[i_{n+1} , i_{n+1}]$, et du sous-groupe de torsion (noyau de H). Ce dernier, isomorphe au conoyau de ∂, est, par la suspension $E : \pi_{2n+1}(S_{n+1}) \longrightarrow \pi_{2n+2}(S_{n+2})$, isomorphe à $\pi_{2n+2}(S_{n+2})$; ainsi $\pi_{2n+2}(S_{n+2})$ est canoniquement isomorphe au sous-groupe de torsion de $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$. De plus, la suspension double

$$E^2 : \pi_{2n}(S_n) \longrightarrow \pi_{2n+2}(S_{n+2})$$

est surjective ; en effet, $E : \pi_{2n+1}(S_{n+1}) \longrightarrow \pi_{2n+2}(S_{n+2})$ est surjective, son noyau est l'image de $\partial : Z \longrightarrow \pi_{2n+1}(S_{n+1})$, qui admet pour supplémentaire le sous-groupe de torsion, c'est-à-dire l'image de $E : \pi_{2n}(S_n) \longrightarrow \pi_{2n+1}(S_{n+1})$.

Deuxième cas : n impair exceptionnel (en fait, $n = 1$, 3 ou 7). - On a alors $[i_n , i_n] = 0$, et on a une suite exacte

$$\pi_{2n}(S_n) \xrightarrow{E} \pi_{2n+1}(S_{n+1}) \xrightarrow{H} Z \longrightarrow 0 ,$$

et d'ailleurs on peut mettre un zéro à gauche, car on verra que la suspension $\pi_i(S_n) \longrightarrow \pi_{i+1}(S_{n+1})$ est injective pour tout i, lorsque n est exceptionnel. Il est naturel de se demander si $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$ est somme directe de son groupe de torsion et d'un relèvement de H contenant $[i_{n+1}, i_{n+1}]$. La réponse est évidemment affirmative pour $n = 1$. En fait, la réponse est négative pour n exceptionnel $\neq 1$, comme l'a montré JAMES [4] : en effet, l'élément $[i_{n+1}, i_{n+1}]$ n'est pas divisible par 2 dans $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$, lorsque n est exceptionnel et $\neq 1$. En d'autres termes, si $\alpha \in \pi_{2n+1}(S_{n+1})$ est tel que $H(\alpha) = 1$, alors

$$\mu = [i_{n+1}, i_{n+1}] + 2\alpha \neq 0 \quad ;$$

JAMES le prouve en montrant que μ est la suspension d'un $\beta \in \pi_{2n}(S_n)$ dont l'image dans $\pi_{2n-1}(\Omega(S_n), S_{n-1})$ est $\neq 0$, ce qui implique $\beta \neq 0$, et comme la suspension E est injective, on obtient $\mu \neq 0$. JAMES donne aussi une interprétation de ce résultat (cf. ci-dessous, fin du paragraphe 9) : il signifie que la sphère S_n, pour $n \neq 1$, ne possède aucune loi de H-espace qui soit homotopiquement commutative (en fait, ce résultat s'applique pour $n = 3$ et $n = 7$).

Supposant toujours n impair et exceptionnel, et admettant, ce qui sera démontré ci-dessous (corollaire de la proposition 5), que $E : \pi_{2n}(S_n) \longrightarrow \pi_{2n+1}(S_{n+1})$ est injective, on va voir qu'on a une suite exacte

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow \pi_{2n}(S_n) \xrightarrow{E^2} \pi_{2n+2}(S_{n+2}) \longrightarrow Z_2 \longrightarrow 0 .$$

Que E^2 soit injective résulte du fait que l'image de $\pi_{2n}(S_n) \longrightarrow \pi_{2n+1}(S_{n+1})$ est le sous-groupe de torsion de $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$, qui ne rencontre pas le noyau de $E : \pi_{2n+1}(S_{n+1}) \longrightarrow \pi_{2n+2}(S_{n+2})$, puisque ce noyau se compose des multiples de $[i_{n+1}, i_{n+1}]$. Il reste à voir que le conoyau de E^2 est Z_2 ; or $\pi_{2n+2}(S_{n+2})$ est l'image de $E : \pi_{2n+1}(S_{n+1}) \longrightarrow \pi_{2n+2}(S_{n+2})$ qui est surjective ; un élément de $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$, dont l'invariant de Hopf est un, n'est pas la somme d'un multiple entier de $[i_{n+1}, i_{n+1}]$ et d'un élément de torsion, donc n'est pas dans l'image de E^2. Par contre, le double de tout élément de $\pi_{2n+2}(S_{n+2})$ est dans l'image de E^2, car le double de tout élément de $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$ est la somme d'un multiple de $[i_{n+1}, i_{n+1}]$ et d'un élément de torsion.

En particulier, pour $n = 1$, on trouve $\pi_4(S_3) \approx Z_2$, ce qui est bien connu. Pour $n \neq 1$, il n'y a pas de factorisation dans la suite exacte (1), sinon $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$ contiendrait un élément dont le double serait égal à $[i_{n+1}, i_{n+1}]$, contrairement à ce qu'on a dit plus haut. (En fait, la valeur connue de $\pi_8(S_5) \approx Z_{24}$ et celle de $\pi_{16}(S_9) \approx Z_{240}$ mettent en évidence qu'il n'y a pas de facteur direct Z_2, pour $n = 3$ et $n = 7$).

6. Calcul homologique de l'invariant de Hopf.

Soit f une application continue $S_{2n-1} \longrightarrow S_n$. Soit X_f l'espace obtenu en attachant une boule fermée B_{2n} à la sphère S_n au moyen de l'application f de la frontière S_{2n-1} de B_{2n}. Comme on l'a vu dans un cas particulier dans l'Exposé 5 (n° 3), les groupes de cohomologie $H^i(X_f ; Z)$ sont nuls pour $i \neq 0, n, 2n$; $H^n(X_f ; Z) \longrightarrow H^n(S_n ; Z)$ est un isomorphisme, ainsi que

$$H^{2n}(X_f ; Z) \longleftarrow H^{2n}(X_f , S_n ; Z) \longrightarrow H^{2n}(B_{2n} , S_{2n-1} ; Z) .$$

Donc $H^n(X_f ; Z)$ et $H^{2n}(X_f ; Z)$ sont canoniquement isomorphes à Z. Définissons un entier $k(f)$ comme suit : le cup-carré du générateur de $H^n(X_f ; Z)$ est égal à $k(f)$ fois le générateur de $H^{2n}(X_f ; Z)$.

THÉORÈME 5. - L'entier $k(f)$ ne dépend que de la classe u de f dans $\pi_{2n-1}(S_n)$, et $k(f)$ est opposé à l'invariant de Hopf $H(u)$.

DÉMONSTRATION. - Montrons d'abord que le type d'homotopie de l'espace X_f ne dépend que de la classe d'homotopie u de l'application f. Soient f_o et f_1 deux applications homotopes $S_{2n-1} \longrightarrow S_n$, et soit $g : I \times S_{2n-1} \longrightarrow S_n$ une déformation de f_o en f_1. Attachons $I \times B_{2n}$ à S_n au moyen de l'application g de $I \times S_{2n-1}$. On obtient un espace Y ; pour chaque $t \in I$, on a un sous-espace Y_t ; il est clair que $Y_o = X_{f_o}$, $Y_1 = X_{f_1}$. Il suffit maintenant de montrer que l'injection $Y_t \longrightarrow Y$ est, pour chaque t, une homotopie-équivalence ; comme les espaces sont simplement connexes (on a supposé $n \geqslant 2$), il suffit de montrer que les applications $H_i(Y_t) \longrightarrow H_i(Y)$ sont des isomorphismes ; c'est immédiat.

Ainsi $k(f)$ ne dépend que de la classe u de f ; on le notera $k(u)$. Voici la marche de la suite de la démonstration : on prouvera que $k(u)$ est une fonction additive de $u \in \pi_{2n-1}(S_n)$. Pour n impair, $k(u)$ est donc nul, puisque le groupe $\pi_{2n-1}(S_n)$ est fini ; donc $k(u) + H(u) = 0$. Pour n pair, les deux homomorphismes k et H définissent chacun, par passage au quotient, un homomorphisme dans Z du quotient de $\pi_{2n-1}(S_n)$ par son sous-groupe de torsion, quotient dont tous les éléments sont proportionnels à la classe de $[i_n , i_n]$. Pour prouver que $k + H = 0$, il suffit donc de prouver que k et H prennent des valeurs opposées sur l'élément $[i_n, i_n]$. Or il en est bien ainsi : il suffit de confronter le théorème 2 et la proposition 4 de l'Exposé 5.

Tout revient finalement à prouver que $k(u)$ est une fonction <u>additive</u> de $u \in \pi_{2n-1}(S_n)$, le seul cas intéressant étant celui où n est pair. Soient u, v, w trois éléments de $\pi_{2n-1}(S_n)$, tels que $w = u+v$. On peut supposer que u est défini par une application $f : S_{2n-1} \longrightarrow S_n$ qui est constante sur l'hémisphère inférieur, et que v est définie par une application g qui est constante sur l'hémisphère supérieur. Soit $h : S_{2n-1} \longrightarrow S_n$ l'application égale à f sur l'hémisphère supérieur, à g sur l'hémisphère inférieur ; w est dans la classe de h. On constate alors immédiatement les faits suivants :

L'espace X_h est réunion de deux sous-espaces fermés A et B, dont l'intersection $A \cap B$ est réunion d'une sphère S_{2n-1} et d'une sphère S_n ayant tout juste un point commun. Contractons S_{2n-1} en un point a ; soit Y le quotient de X_h ainsi obtenu ; alors le quotient de A est précisément X_f, celui de B est X_g, et on a $X_f \cap X_g = S_n$. On a le diagramme commutatif suivant (où tous les groupes de cohomologie sont à coefficients entiers)

$$\begin{array}{ccccc}
H^n(X_f) & \xleftarrow{\approx} & H^n(Y) & \xrightarrow{\approx} & H^n(X_g) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^{2n}(X_f) & \longleftarrow & H^{2n}(Y) & \longrightarrow & H^{2n}(X_g) \\
\uparrow\approx & & \uparrow\approx & & \uparrow\approx \\
H^{2n}(X_f, S_n) & \longleftarrow & H^{2n}(Y, S_n) & \longrightarrow & H^{2n}(X_g, S_n)
\end{array}$$

où les trois premières flèches verticales désignent les applications de cup-carré. De plus, les homomorphismes de la dernière ligne identifient $H^{2n}(Y, S_n)$ à la somme directe de $H^{2n}(X_f, S_n)$ et $H^{2n}(X_g, S_n)$. Soit e le générateur de $H^n(Y)$, identifié à ses images dans $H^n(X_f)$ et $H^n(X_g)$; son carré est un élément de $H^{2n}(Y) \approx H^{2n}(X_f) \oplus H^{2n}(X_g)$, donc est égal à la somme $k(u)e' + k(v)e''$, en notant e' et e'' les générateurs de $H^{2n}(X_f)$ et $H^{2n}(X_g)$.

Or on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
H^{2n}(Y, S_n) & \longrightarrow & H^{2n}(Y) & \xleftarrow{\text{carré}} & H^n(Y) \\
\downarrow\approx & & \downarrow\lambda & & \downarrow\approx \\
H^{2n}(X_h, A \cap B) & \longrightarrow & H^{2n}(X_h) & \xleftarrow{\text{carré}} & H^n(X_h)
\end{array}$$

dont les homomorphismes verticaux sont définis par l'application de X_h sur son quotient Y. L'image de e' (resp. de e'') dans $H^{2n}(Y)$ est envoyée par λ dans le générateur de $H^{2n}(X_h)$. Donc le carré du générateur $e \in H^n(Y)$ est envoyé par λ dans $k(u) + k(v)$ fois le générateur de $H^{2n}(X_h)$, ce qui prouve que

$$k(w) = k(u) + k(v) ,$$

et achève enfin la démonstration.

COROLLAIRE <u>du théorème</u> 5. - <u>Pour qu'une application</u> $f : S_{2n-1} \longrightarrow S_n$ <u>ait un invariant de Hopf égal à</u> ± 1 (n pair), <u>il faut et il suffit que le cup-carré</u>

$$H^n(X_f ; Z_2) \longrightarrow H^{2n}(X_f ; Z_2)$$

<u>ne soit pas nul.</u>

Observons que le cup-carré n'est pas autre chose ici que l'opération de Steenrod $Sq^n : H^n \longrightarrow H^{2n}$ (dans la cohomologie à coefficients modulo 2) ; cf. un exposé ultérieur (Exposé 9). D'autre part on a ici $H^i(X_f ; Z_2) = 0$ pour $n < i < 2n$. Voici alors comment ADAMS démontre que les seuls entiers "exceptionnels" (cf. Exposé 5, th. 4) sont 1, 3 ou 7 ; il prouve :

THÉORÈME de Adams [1]. - <u>Soit</u> X <u>un espace, et soient</u> m <u>et</u> n <u>deux entiers tels que</u> $H^i(X ; Z_2) = 0$ <u>pour</u> $m < i < m+n$. <u>Alors l'opération de Steenrod</u>

$$Sq^n : H^m(X ; Z_2) \longrightarrow H^{m+n}(X ; Z_2)$$

<u>est nulle, sauf peut-être si</u> $n = 1 , 2 , 4$ ou 8.

La suite de ce Séminaire sera en grande partie consacrée à la théorie des opérations cohomologiques secondaires, ce qui permettra d'établir le théorème ci-dessus.

7. <u>Etude d'une application</u> $S_{2n+1} \longrightarrow S_{n+1}$ <u>dont l'invariant de Hopf est un.</u>

On aura besoin du :

LEMME 1. - <u>Soit</u> $f : S_{2n+1} \longrightarrow S_{n+1}$, <u>d'où une application</u>

$$\Omega(f) : \Omega(S_{2n+1}) \longrightarrow \Omega(S_{n+1}) ,$$

<u>qui induit un homomorphisme</u>

$$H_{2n}(\Omega(S_{2n+1})) \longrightarrow H_{2n}(\Omega(S_{n+1})) .$$

<u>Chacun de ces groupes est isomorphe à</u> Z, <u>et l'image du générateur canonique de</u>

$H_{2n}(\Omega(S_{2n+1}))$ <u>est égale à</u> $H(f)$ <u>fois le générateur canonique de</u> $H_{2n}(\Omega(S_{n+1}))$, $H(f)$ <u>étant l'invariant de Hopf de l'application</u> f .

DÉMONSTRATION : considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_{2n}(\Omega(S_{2n+1})) & \longrightarrow & H_{2n}(\Omega(S_{2n+1})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_{2n}(\Omega(S_{n+1})) & \longrightarrow & H_{2n}(\Omega(S_{n+1})) \end{array}$$

où les homomorphismes verticaux sont définis par f , les homomorphismes horizontaux étant ceux de Hurewicz. L'homomorphisme de la première ligne est un isomorphisme, celui de la seconde ligne n'est autre que H , en vertu de la définition de H . Alors $H(f)$ est l'image, dans $H_{2n}(\Omega(S_{n+1})) \approx Z$, du générateur de $\pi_{2n}(\Omega(S_{2n+1}))$, d'où le lemme.

Considérons alors l'inclusion $i : S_n \longrightarrow \Omega(S_{n+1})$ et l'application

$$\Omega(f) : \Omega(S_{2n+1}) \longrightarrow \Omega(S_{n+1}) .$$

Grâce à la structure multiplicative de $\Omega(S_{n+1})$, on en déduit une application

$$g : S_n \times \Omega(S_{2n+1}) \longrightarrow \Omega(S_{n+1}) ,$$

définie par $g(x , y) = i(x).\Omega(f)(y)$.

PROPOSITION 5. - <u>Si</u> $H(f) = 1$, <u>l'application</u> g <u>définit des isomorphismes des groupes d'homotopie</u>

$$\pi_i(S_n) \times \pi_{i+1}(S_{2n+1}) \approx \pi_{i+1}(S_{n+1}) \quad \text{pour tout } i .$$

<u>Ces isomorphismes sont obtenus en faisant le produit de l'application de suspension</u> $\pi_i(S_n) \longrightarrow \pi_{i+1}(S_{n+1})$ <u>et de l'application</u> $\pi_{i+1}(S_{2n+1}) \longrightarrow \pi_{i+1}(S_{n+1})$ <u>définie par</u> f .

COROLLAIRE. - <u>Si</u> n <u>est exceptionnel, les homomorphismes de suspension</u> $\pi_i(S_n) \longrightarrow \pi_{i+1}(S_{n+1})$ <u>sont injectifs</u>.

DÉMONSTRATION <u>de la proposition 5</u> : d'après le théorème 5 de l'Exposé 4 , il suffit de montrer que g définit un isomorphisme des groupes d'homologie. Or l'homologie du produit $S_n \times \Omega(S_{2n+1})$ est $H_*(S_n) \otimes H_*(\Omega(S_{2n+1}))$, qu'on envoie dans <u>l'algèbre</u> d'homologie $H_*(\Omega(S_{n+1}))$ par les deux applications

$H_*(S_n) \longrightarrow H_*(\Omega(S_{n+1}))$ et $H_*(\Omega(S_{2n+1})) \longrightarrow H_*(\Omega(S_{n+1}))$. La première envoie le générateur de $H_n(S_n)$ sur le générateur de $H_n(\Omega(S_{n+1}))$, puisqu'il s'agit de l'application définie par l'inclusion $S_n \longrightarrow \Omega(S_{n+1}))$ (Exposé 5, paragraphe 1) ; la seconde, en vertu du lemme 1, envoie le générateur de $H_{2n}(\Omega(S_{2n+1}))$ sur celui de $H_{2n}(\Omega(S_{n+1}))$, qui est le carré du générateur de $H_n(\Omega(S_{n+1}))$. Vu les structures d'algèbres de polynômes de $H_*(\Omega(S_{2n+1}))$ et de $H_*(\Omega(S_{n+1}))$, on constate que l'application $H_*(S_n) \otimes H_*(\Omega(S_{2n+1})) \longrightarrow H_*(\Omega(S_{n+1}))$ est bijective dans tous les degrés.

C.Q.F.D.

8. Fibrés de base S_{n+1} et de fibre S_n.

Rappelons d'abord les fibrations classiques : S_3 fibré sur S_2, de fibre S_1 ; S_7 fibré sur S_4, de fibre S_3 ; S_{15} fibré sur S_8, de fibre S_7. Ces fibrations sont déduites de la multiplication des nombres complexes (resp. des quaternions, resp. des octaves) de norme 1, compte tenu de l'identité (valable dans ces trois cas) : $x^{-1}(xy) = y$.

Explicitons : soit $n = 1$ (resp. 3, resp. 7) ; identifions R^{n+1} aux nombres complexes (resp. quaternions, resp. octaves), et S_{2n+1} à l'espace des couples (x, y) tels que $|x|^2 + |y|^2 = 1$. Identifions S_n aux éléments de R^{n+1} de norme 1, et faisons opérer S_n dans S_{2n+1} par

$$(x, y) \longrightarrow (zx, zy) \qquad (z \in S_n).$$

Grâce à l'identité précédente, on obtient un fibré S_{2n+1} de fibre S_n, et il est immédiat que la base est homéomorphe à S_{n+1} (R^{n+1} complété par un "point à l'infini").

Dans ces trois cas, l'application $S_{2n+1} \longrightarrow S_{n+1}$ du fibré sur sa base a un invariant de Hopf égal à ± 1 : c'est un cas particulier d'un résultat plus général qu'on va établir maintenant.

PROPOSITION 6. - Soit X un fibré de Serre, de base S_{n+1}, de fibre S_n, tel que $H_n(X) = 0$. Alors l'entier n est exceptionnel ; il existe une application continue $f : S_{2n+1} \longrightarrow X$ définissant des isomorphismes $\pi_k(S_{2n+1}) \longrightarrow \pi_k(X)$ pour tout k, et l'application composée $S_{2n+1} \xrightarrow{f} X \longrightarrow S_{n+1}$ a un invariant de Hopf égal à ± 1.

DÉMONSTRATION : la suite exacte d'homotopie du fibré montre que $\pi_k(X) = 0$ pour $k < n$, et que $\pi_n(X)$ est un quotient de $\pi_n(S_n)$, donc est abélien ; puisque

$H_n(X) = 0$ par hypothèse, le théorème de Hurewicz montre que $\pi_n(X) = 0$; la suite exacte d'homotopie montre alors que $\partial : \pi_{n+1}(S_{n+1}) \longrightarrow \pi_n(S_n)$ est surjectif ; c'est donc un isomorphisme. Utilisons le :

LEMME 2. - <u>Soit</u> X <u>un fibré de Serre, de base</u> S_{n+1} <u>et de fibre</u> S_n ; <u>si l'application</u> $\partial : \pi_{n+1}(S_{n+1}) \longrightarrow \pi_n(S_n)$ <u>de la suite exacte d'homotopie est un isomorphisme, alors, pour tout</u> k , <u>l'application composée</u>

$$\pi_k(S_n) \xrightarrow{E} \pi_{k+1}(S_{n+1}) \xrightarrow{\partial} \pi_k(S_n)$$

<u>est</u> $\pm$ <u>l'identité.</u>

Montrons d'abord ce lemme. On peut supposer (en changeant au besoin l'orientation de S_{n+1} au moyen d'un automorphisme convenable), que $\partial : \pi_{n+1}(S_{n+1}) \longrightarrow \pi_n(S_n)$ est l'inverse de l'isomorphisme de suspension. D'après l'Exposé 1 (paragraphe 7), l'application ∂ est induite par

$$\pi_k(\Omega(S_{n+1}\ ,\ b_o)) \longleftarrow \pi_k(\Omega(X\ ,\ S_n\ ,\ x_o)) \longrightarrow \pi_k(S_n)\ ,$$

l'espace des chemins $\Omega(X\ ,\ S_n\ ,\ x_o)$ étant fibré sur S_n , et étant aussi fibré sur $\Omega(S_{n+1}\ ,\ b_o)$ par l'application induite par la projection $X \longrightarrow S_{n+1}$; cette deuxième fibration a une fibre contractile et définit des isomorphismes des groupes d'homotopie. L'application d'injection $i : S_n \longrightarrow \Omega(S_{n+1}\ ,\ b_o)$ dans la base du fibré $\Omega(X\ ,\ S_n\ ,\ x_o)$ se relève en une application $j : S_n \longrightarrow \Omega(X, S_n, x_o)$; si on compose j avec l'application de projection $\Omega(X\ ,\ S_n\ ,\ x_o) \longrightarrow S_n$, on obtient une application $S_n \longrightarrow S_n$ qui, d'après l'hypothèse faite sur

$$\partial : \pi_{n+1}(S_{n+1}) \longrightarrow \pi_n(S_n)\ ,$$

induit l'application identique de $\pi_n(S_n)$. Donc $p \circ j$ est homotope à l'identité, et il s'ensuit que l'application composée

$$\pi_k(S_n) \xrightarrow{i_*} \pi_k(\Omega(S_{n+1})) \xrightarrow{p_*} \pi_k(S_n)$$

est l'identité, ce qui établit le lemme.

Achevons maintenant la démonstration de la proposition 6. Le lemme 2 entraîne que la suspension $E : \pi_k(S_n) \longrightarrow \pi_{k+1}(S_{n+1})$ est injective ; donc (Exposé 5 , théorème 4 , (iv)) n est exceptionnel. De plus, ∂ est surjectif, donc la suite exacte d'homotopie du fibré se coupe en petites suites exactes

$$0 \longrightarrow \pi_{k+1}(X) \longrightarrow \pi_{k+1}(S_{n+1}) \xrightarrow{\partial} \pi_k(S_n) \longrightarrow 0 ,$$

dans lesquelles on a une factorisation directe canonique, puisque la suspension $E : \pi_k(S_n) \longrightarrow \pi_{k+1}(S_{n+1})$ relève ∂ . Autrement dit, l'application fibrée $X \longrightarrow S_{n+1}$ définit des injections $\pi_{k+1}(X) \longrightarrow \pi_{k+1}(S_{n+1})$ qui, jointes aux applications de suspension $\pi_k(S_n) \longrightarrow \pi_{k+1}(S_{n+1})$, définissent des isomorphismes

$$\pi_k(S_n) \times \pi_{k+1}(X) \approx \pi_{k+1}(S_{n+1}) .$$

Comparant avec la proposition 5 , on trouve des isomorphismes $\pi_{k+1}(S_{2n+1}) \approx \pi_{k+1}(X)$. En particulier, au générateur canonique de $\pi_{2n+1}(S_{2n+1})$ correspond un élément de $\pi_{2n+1}(X)$. Soit $f : S_{2n+1} \longrightarrow X$ une application appartenant à la classe de cet élément. L'application composée $S_{2n+1} \xrightarrow{f} X \longrightarrow S_{n+1}$ envoie le générateur de $\pi_{2n+1}(S_{2n+1})$ sur un générateur d'un supplémentaire du sous-groupe de torsion de $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$, donc sur un élément de $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$ dont l'invariant de Hopf est ± 1 . La proposition 5 montre que cette application composée envoie $\pi_{k+1}(S_{2n+1})$ sur un supplémentaire de l'image de la suspension $\pi_k(S_n) \longrightarrow \pi_{k+1}(S_{n+1})$; donc l'application f induit un isomorphisme $\pi_{k+1}(S_{2n+1}) \approx \pi_{k+1}(X)$. La proposition 6 est entièrement démontrée.

Elle implique que si un espace X admet une fibration sur S_{n+1} , de fibre S_n , et si $H_n(X) = 0$, alors X a le type d'homotopie de la sphère S_{2n+1} .

9. Compléments.

On indique ici quelques résultats sans démonstrations.

Rappelons d'abord la construction de Hopf [2] qui à toute application d'espaces avec points-base

$$f : S_p \times S_q \longrightarrow X$$

associe une application $g : S_{p+q+1} \longrightarrow S(X)$ dans la suspension de X . Considérons S_{p+q+1} comme le "joint réduit" de S_p et de S_q , c'est-à-dire comme le quotient de $I \times S_p \times S_q$ par la relation d'équivalence suivante :

$$(0 , x , y) \sim (0 , x , y') \quad \text{pour} \quad x \in S_p , \quad y \in S_q , \quad y' \in S_q ,$$

$$(1 , x , y) \sim (1 , x' , y) \quad \text{pour} \quad x \in S_p , \quad x' \in S_p , \quad y \in S_q ,$$

$$(t , x_o , y_o) \sim (t' , x_o , y_o) \quad \text{pour} \quad t \in I , \quad x_o \text{ et } y_o \text{ étant}$$

les points-base de S_p et S_q. D'autre part $S(X)$ est un quotient de $I \times X$ (Exposé 5, n°1). L'application produit

$$I \times f : I \times S_p \times S_q \longrightarrow I \times X$$

passe aux quotients, et induit l'application cherchée g.

Deux applications homotopes f_1 et f_2 induisent des applications g_1 et g_2 homotopes. Dans le cas où $X = S_n$, la construction de Hopf associe à chaque classe d'applications $S_p \times S_q \longrightarrow S_n$ une classe d'applications $S_{p+q+1} \longrightarrow S_{n+1}$.

En particulier, soit une application $f : S_n \times S_n \longrightarrow S_n$ admettant le point-base de S_n comme élément neutre (ce qui suppose l'entier n exceptionnel). f définit, par la construction de Hopf, un élément de $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$, dont on montre qu'il a un invariant de Hopf égal à 1. On le notera $c(f)$.

Considérons maintenant deux structures de H-espace sur S_n :

$$f_1 : S_n \times S_n \longrightarrow S_n , \qquad f_2 : S_n \times S_n \longrightarrow S_n ,$$

le point-base étant élément neutre. Alors f_1 et f_2 coïncident sur $S_n \vee S_n$; si on concentre $S_n \vee S_n$ en un point, on obtient une application $S_{2n} \longrightarrow S_n$, dont la classe $\alpha \in \pi_{2n}(S_n)$ ne dépend que des classes de f_1 et f_2 ; notons la $\alpha(f_1, f_2)$. Pour que f_1 et f_2 soient homotopes, il faut et il suffit que $\alpha(f_1, f_2) = 0$. On montre que, f_1 et α étant arbitrairement donnés, il existe une loi f_2 telle que $\alpha(f_1, f_2) = \alpha$. (cf. [5]). On peut interpréter $\alpha(f_1, f_2)$ comme suit : considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi_{2n}(S_n) \xrightarrow{E} \pi_{2n+1}(S_{n+1}) \xrightarrow{H} Z \longrightarrow 0 ;$$

la différence $c(f_1) - c(f_2)$ est dans l'image de $\alpha(f_1, f_2)$ par E.

On voit qu'il existe 12 classes de lois de H-espace sur S_3, et 120 classes de lois de H-espace sur S_7 (car $\pi_6(S_3) = Z_{12}$ et $\pi_{14}(S_7) = Z_{120}$).

Considérons en particulier le cas $n = 3$. Le crochet des quaternions de norme 1 :

$$(x , y) \longrightarrow xyx^{-1}y^{-1}$$

est une application $S_3 \times S_3 \longrightarrow S_3$ qui envoie $S_3 \vee S_3$ dans le quaternion unité, donc définit par passage au quotient une application $S_6 \longrightarrow S_3$. Il est connu que l'élément correspondant de $\pi_6(S_3)$ est un générateur de $\pi_6(S_3)$, groupe cyclique d'ordre 12. De là on déduit toutes les classes de lois de H-espace sur S_3 : on obtient des représentants de ces classes en prenant les lois de composition

$$(x , y) \longrightarrow xy(xyx^{-1}y^{-1})^k \text{ , pour } k = 0 , 1 , \dots , 11 .$$

D'après ce qui précède, tout élément $\alpha \in \pi_{2n+1}(S_{n+1})$ tel que $H(\alpha) = 1$ est de la forme $c(f)$ pour une loi convenable $f : S_n \times S_n \longrightarrow S_n$ admettant le point-base comme élément neutre. Il serait intéressant de donner un procédé de construction d'une telle f à partir d'une application $S_{2n+1} \longrightarrow S_{n+1}$ appartenant à la classe de α .

Signalons encore ce résultat de James ([3] et [4]) : si $\bar{f} : S_n \times S_n \longrightarrow S_n$ est l'application déduite de f par $\bar{f}(x , y) = f(y , x)$,

on a

$$c(f) + c(\bar{f}) = - [i_{n+1} , i_{n+1}] .$$

Dire que f est homotopiquement commutative revient à dire que f et $\bar{f}$ sont homotopes, ce qui équivaut à $c(f) = c(\bar{f})$, ou encore à $2\, c(f) = - [i_{n+1} , i_{n+1}]$. Comme on l'a dit plus haut, ceci est impossible si n est exceptionnel et $\neq 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADAMS (J. F.). - Non-existence of elements of Hopf-invariant one. Princeton, 1958, 111 p. multigraphiées.

[2] HOPF (Heinz). - Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension, Fund. Math., t. 25, 1935, p. 427-440.

[3] JAMES (I. M.). - On spaces with a multiplication, Pacific J. of Math., t. 7, 1957, p. 1083-1100.

[4] JAMES (I. M.). - Multiplication on spheres, I., Proc. Amer. math. Soc., t. 8, 1957, p. 192-196.

[5] JAMES (I. M.). - Multiplication on spheres, II., Trans. Amer. math. Soc., t. 84, 1957, p. 545-558.

[6] SERRE (Jean-Pierre). - Homologie singulière des espaces fibrés. Applications, Annals of Math., Series 2, t. 54, 1951, p. 425-505.