

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

MICHEL DEMAZURE

Théorèmes de Hurewicz et Whitehead

Séminaire Henri Cartan, tome 11, n° 1 (1958-1959), exp. n° 4, p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_1_A4_0

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THEOREMES DE HUREWICZ ET WHITEHEAD

par Michel DEMAZURE

On utilisera les notations de l'exposé 1 : soit $x_0 \in A \subset X$; on note $E'(X, x_0)$ l'espace des chemins de X d'origine x_0 , et p l'application $E'(X, x_0) \rightarrow X$ qui associe à chaque chemin son extrémité ;

$\Omega(X, A, x_0)$ l'espace des chemins de X , d'origine x_0 , d'extrémité dans A ;

$\Omega(X, x_0)$ l'espace des lacets de X , d'origine (et d'extrémité) x_0 . On note $\tilde{x}_0$ le chemin constant $I \rightarrow x_0$.

On a donc un fibré de Serre

$$(1) \quad \Omega(X, x_0) \longrightarrow E'(X, x_0) \xrightarrow{p} X$$

et le sous-fibré

$$(2) \quad \Omega(X, x_0) \longrightarrow \Omega(X, A, x_0) \xrightarrow{p} A$$

Tous les groupes d'homologie sont les groupes d'homologie singulière à coefficients entiers (sauf mention du contraire) ; on note $H_q(X, A)$ le groupe $H_q(X \bmod A; \mathbb{Z})$. Lorsque A est réduit au point x_0 , on sait que $H_q(X, A) = H_q(X)$ (groupe d'homologie absolu) pour $q \geq 1$, tandis que $H_0(X, A)$ s'identifie au groupe d'homologie "réduit" $\tilde{H}_0(X)$, sous-groupe de $H_0(X)$ formé des combinaisons linéaires formelles d'éléments de $\pi_0(X, x_0)$ à coefficients entiers dont la somme est nulle. Dans les paragraphes 1 et 2 de cet exposé, on convient, par abus de langage, d'écrire $H_0(X)$ au lieu de $\tilde{H}_0(X)$.

1. La suspension et l'homomorphisme de Hurewicz.

La suite exacte d'homologie de l'espace $E'(X, x_0)$ et de son sous-espace $\Omega(X, A, x_0)$ définit un isomorphisme

$$d : H_{q+1}(E'(X, x_0), \Omega(X, A, x_0)) \longrightarrow H_q(\Omega(X, A, x_0)) ,$$

parce que $E'(X, x_0)$ est contractile ; ceci vaut même pour $q = 0$, grâce à la convention faite sur H_0 .

D'autre part, la projection p du fibré (1) et de son sous-fibré (2) définit

$$p_* : H_{q+1}(E'(X, x_0), \Omega(X, A, x_0)) \rightarrow H_{q+1}(X, A).$$

Par définition, la suspension

$$\sigma_q : H_q(\Omega(X, A, x_0)) \rightarrow H_{q+1}(X, A)$$

est définie par $\sigma_q = p_* \circ d^{-1}$. C'est un homomorphisme de groupes abéliens qui jouit des propriétés fonctorielles évidentes.

On va définir des applications naturelles (dites "de Hurewicz")

$$h_0 : \pi_0(X, x_0) \rightarrow H_0(X), \quad h_i : \pi_i(X, A, x_0) \rightarrow H_i(X, A) \text{ pour } i \geq 1,$$

par récurrence sur i . Par définition, h_0 associe à un élément u de $\pi_0(X, x_0)$ (qui est une composante connexe de X) l'élément $u - e$ de $H_0(X)$, en notant e la composante connexe de x_0 . Supposons déjà définie l'application h_{i-1} ($i \geq 1$), et définissons h_i comme l'application composée

$$\pi_i(X, A, x_0) = \pi_{i-1}(\Omega(X, A, x_0)) \xrightarrow{h_{i-1}} H_{i-1}(\Omega(X, A, x_0)) \xrightarrow{\sigma_{i-1}} H_i(X, A).$$

On va interpréter $\sigma_0 : H_0(\Omega(X, A, x_0)) \rightarrow H_1(X, A)$. Soit u un chemin de X , d'origine x_0 , d'extrémité dans A ; la rétraction canonique de l'espace $E'(X, x_0)$ lui associe un chemin v dans $E'(X, x_0)$, d'origine $\tilde{x}_0$, d'extrémité u ; le "bord" de $v - \tilde{x}_0$ au sens de l'homologie relative, est la classe de $u - \tilde{x}_0$ dans $H_0(\Omega(X, A, x_0))$. La projection p envoie le chemin v précisément sur le chemin u ; ceci montre que u , considéré comme 1-cycle relatif de X modulo A , a pour classe dans $H_1(X, A)$ l'image, par σ_0 , de la classe de $u - \tilde{x}_0$ dans $H_0(\Omega(X, A, x_0))$.

Cette interprétation de σ_0 fournit aussitôt une interprétation de l'application $h_1 : \pi_1(X, A, x_0) \rightarrow H_1(X, A)$: à la classe du chemin u (d'origine x_0 et d'extrémité dans A), elle associe la classe d'homologie de u (considéré comme 1-cycle relatif de X modulo A).

THEOREME 1. - Les applications

$$h_i : \pi_i(X, x_0) \rightarrow H_i(X), \quad i \geq 1,$$

$$h_i : \pi_i(X, A, x_0) \rightarrow H_i(X, A), \quad i \geq 2$$

sont des homomorphismes de groupes. De plus, si X est connexe,

$$h_1 : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$$

est surjectif et a pour noyau le sous-groupe des commutateurs de $\pi_1(X, x_0)$ (autrement dit, $H_1(X)$ est canoniquement isomorphe au groupe $\pi_1(X, x_0)$ rendu abélien).

DEMONSTRATION. - Pour montrer que h_1 est un homomorphisme de groupes lorsque $A = \{x_0\}$, et $i \geq 1$, il suffit, vu la définition récurrente de h_i , de le prouver pour $i = 1$. La même définition récurrente montre que h_i sera aussi un homomorphisme de groupes pour $i \geq 2$ et A quelconque. Le théorème va alors résulter entièrement de la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - Supposons que l'espace X soit connexe. Alors on a une suite exacte d'homomorphismes de groupes abéliens

$$(3) \quad H_0(\Omega(X, x_0)) \otimes H_0(\Omega(X, x_0)) \xrightarrow{\varphi} H_0(\Omega(X, x_0)) \xrightarrow{\sigma_0} H_1(X) \rightarrow 0,$$

où l'application φ est définie par la loi de composition de l'espace $\Omega(X, x_0)$.

Démontrons d'abord cette proposition. Nous admettons que l'homologie singulière de X connexe peut se calculer à l'aide des simplexes singuliers dont les sommets sont en x_0 (ce qui se prouve facilement au moyen d'une déformation). Toute classe d'homologie de X , de dimension 1, est une somme de classes dont chacune est définie par un 1-simplexe u , lequel est un lacet de X , d'origine et d'extrémité x_0 . Or on a vu que la classe d'un tel u est dans l'image de l'application σ_0 . Ceci montre que σ_0 est surjective.

Cherchons son noyau ; il est engendré par les classes (dans $H_0(\Omega(X, x_0))$) d'éléments de la forme

$$(a - \tilde{x}_0) + (b - \tilde{x}_0) - (c - \tilde{x}_0)$$

tels que le cycle $a + b - c$ de X soit le bord d'un 2-simplexe singulier. Or ceci exprime exactement que le composé $a.b$ des lacets a et b est

homotope au lacet c . Ainsi le noyau est engendré par les classes d'éléments de la forme

$$a + b - (a.b) - \tilde{x}_0, \quad ,$$

lequel est homotope au produit $(a - \tilde{x}_0).(\tilde{x}_0 - b)$. Ceci prouve la proposition.

Achevons maintenant la démonstration du théorème 1. Pour montrer que $h_1 : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ est un homomorphisme, il suffit évidemment de le faire lorsque X est connexe (car remplacer X par la composante connexe X' de x_0 ne change pas $\pi_1(X, x_0)$ et remplace $H_1(X)$ par un sous-groupe). Dans ce cas, la proposition 1 montre que l'élément $a.b \in \pi_1(X, x_0)$ a pour image dans $H_1(X)$ la somme des images de a et de b . Et la proposition 1 entraîne facilement que le noyau de h_1 est le sous-groupe engendré par les commutateurs de $\pi_1(X, x_0)$.

PROPOSITION 2. - La suite exacte d'homotopie relative (exposé 1, théorème 1) est envoyée, par l'application h de Hurewicz, dans la suite exacte d'homologie relative : de façon précise, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \pi_n(A) & \longrightarrow & \pi_n(X) & \longrightarrow & \pi_n(X, A) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\ & \downarrow & & \textcircled{1} & \downarrow & \textcircled{2} & \downarrow & \textcircled{3} & \downarrow & \\ \dots & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

DÉMONSTRATION. - Revenons à la définition des applications de la suite exacte d'homotopie (exposé 1, paragraphe 6). L'application $\pi_n(A) \rightarrow \pi_n(X)$ est définie par l'injection $A \rightarrow X$; le caractère fonctoriel de h_n assure donc la commutativité du carré $\textcircled{1}$ du diagramme. L'application $\pi_{n+1}(X, A) \rightarrow \pi_n(A)$ est définie par l'application $\Omega(X, A, x_0) \rightarrow E(X, A)$, d'où le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{n+1}(X, A) & = & \pi_n(\Omega(X, A, x_0)) & \longrightarrow & \pi_n(E(X, A)) & \approx & \pi_n(A) \\ \downarrow h_{n+1} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{n+1}(X, A) & \xleftarrow{\cong} & H_n(\Omega(X, A, x_0)) & \longrightarrow & H_n(E(X, A)) & \approx & H_n(A) \end{array}$$

la commutativité du premier carré résultant de la définition de h_{n+1} . Ceci prouve que le carré $\textcircled{3}$ est commutatif. Enfin, l'application $\pi_{n+1}(X) \rightarrow \pi_{n+1}(X, A)$ est définie par l'injection

$$\Omega(X, x_0) \longrightarrow \Omega(X, A, x_0)$$

et la commutativité du carré (2) résulte du fait que cette inclusion donne lieu au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi_n(\Omega(X, x_0)) & \rightarrow & H_n(\Omega(X, x_0)) & \xleftarrow{\cong} & H_{n+1}(E'(X, x_0), \Omega(X, x_0)) & \xrightarrow{p_*} & H_{n+1}(X) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_n(\Omega(X, A, x_0)) & \rightarrow & H_n(\Omega(X, A, x_0)) & \xleftarrow{\cong} & H_{n+1}(E'(X, x_0), \Omega(X, A, x_0)) & \xrightarrow{p_*} & H_{n+1}(X, A)
 \end{array}$$

2. Les théorèmes de Hurewicz.

Il est clair que si $\pi_0(X, x_0)$ est réduit à un élément, le groupe $H_0(X)$ est nul, et réciproquement ; ceci exprime que X est connexe. Par abus de langage, on écrira alors que $\pi_0(X) = 0$. Si en outre $\pi_1(X) = 0$, alors $H_1(X) = 0$ en vertu du théorème 1. Pour généraliser aux autres groupes d'homotopie et d'homologie, on utilisera un

LEMME 1. - Soit $x_0 \in A \subset X$, X étant tel que $\pi_0(X) = 0$, $\pi_1(X) = 0$, et soit n un entier ≥ 2 . Si l'on a

$$(i) \quad H_i(X, A) = 0 \text{ pour } 0 \leq i < n,$$

la suspension $\sigma_i : H_i(\Omega(X, A, x_0)) \rightarrow H_{i+1}(X, A)$ est bijective pour $0 \leq i < n$, et surjective pour $i = n$. (En particulier on a $H_i(\Omega(X, A, x_0)) = 0$ pour $i < n - 1$).

Ce lemme résulte aussitôt de la proposition 3 (B), de l'exposé 3, appliquée au fibré (1) et au sous-fibré (2).

THÉOREME 2 (théorème de Hurewicz "absolu"). - Soit n un entier ≥ 2 . Si $\pi_0(X) = 0$ et $\pi_1(X) = 0$, les conditions

$$(i) \quad H_i(X) = 0 \text{ pour } 0 \leq i < n,$$

$$(ii) \quad \pi_i(X) = 0 \text{ pour } 0 \leq i < n$$

sont équivalentes ; elles entraînent :

a. l'homomorphisme $h_n : \pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$ est bijectif ;

b. l'homomorphisme $h_{n+1} : \pi_{n+1}(X) \rightarrow H_{n+1}(X)$ est surjectif.

DEMONSTRATION. - Montrons d'abord que (i) entraîne (ii) et (a), et ceci par récurrence sur n . Pour $n = 2$, il y a seulement à prouver (a) ; d'après la définition de h_2 , il suffit de prouver que

$$h_1 : \pi_1(\Omega(X)) \rightarrow H_1(\Omega(X)) \quad \text{et} \quad \sigma_1 : H_1(\Omega(X)) \rightarrow H_2(X)$$

sont bijectifs. La première application est bijective à cause du théorème 1, compte tenu du fait que $\pi_1(\Omega(X))$ est abélien (exposé 1, proposition 11). Quant à σ_1 , c'est un isomorphisme, en vertu du lemme ci-dessus (appliqué pour $n = 2$ dans le cas où $\Lambda = \{x_0\}$).

Supposons prouvé que (i) entraîne (ii) et (a) pour $n - 1$, et montrons-le pour n ($n \geq 3$). D'après le lemme, la suspension

$$\sigma_i : H_i(\Omega(X)) \rightarrow H_{i+1}(X)$$

est bijective pour $0 \leq i \leq n - 1$. On a donc $H_i(\Omega(X)) = 0$ pour $0 \leq i < n - 1$ (d'après l'hypothèse (i)) ; donc $\pi_0(\Omega(X)) = 0$ et $\pi_1(\Omega(X)) = 0$, et l'hypothèse de récurrence est applicable à l'espace $\Omega(X)$. On en conclut que $\pi_i(\Omega(X)) = 0$ pour $0 \leq i < n - 1$, et que $\pi_{n-1}(\Omega(X)) \rightarrow H_{n-1}(\Omega(X))$ est bijectif. Donc $\pi_i(X) = 0$ pour $i < n$, et puisque $\sigma_{n-1} : H_{n-1}(\Omega(X)) \rightarrow H_n(X)$ est bijective, on conclut que $h_n : \pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$ est bijectif.

On a ainsi montré que (i) entraîne (ii) et (a). Il s'ensuit que (ii) entraîne (i) ; sinon, soit p le plus petit entier $< n$ tel que $H_p(X) \neq 0$; d'après ce qu'on vient de démontrer, $h_p : \pi_p(X) \rightarrow H_p(X)$ est bijectif, d'où une contradiction.

Il reste finalement à montrer que (i) et (ii) entraînent (b). Si on peut le prouver pour $n = 2$, cette assertion se démontrera ensuite par récurrence sur $n \geq 3$. En effet, d'après le lemme, la suspension $\sigma_n : H_n(\Omega(X)) \rightarrow H_{n+1}(X)$ est surjective ; et, par l'hypothèse de récurrence appliquée à $\Omega(X)$, $h_n : \pi_n(\Omega(X)) \rightarrow H_n(\Omega(X))$ est surjective. On s'appuiera sur le

LEMME 2. - $H_3(\pi, 2) = 0$ pour tout groupe abélien π (on note ainsi l'homologie d'un espace $K(\pi, 2)$ dont tous les groupes d'homotopie sont nuls, sauf π_2 qui est π).

Admettons provisoirement ce lemme. On montre qu'on peut plonger X dans un espace $V = K(\pi_2(X), 2)$ de façon que l'application $\pi_2(X) \rightarrow \pi_2(V)$ définie

par l'injection $X \rightarrow V$ soit l'identité (V s'obtient par adjonction de cellules à X). Soit alors X' l'espace des chemins de V , d'extrémité dans X ; X est rétracte par déformation de X' . L'application fibrée $p: X' \rightarrow V$ qui associe à chaque chemin son origine a pour fibre un espace $\tilde{X}$ tel que

$$\pi_i(\tilde{X}) = 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq 2, \quad \pi_3(\tilde{X}) = \pi_3(X),$$

comme le montre la suite exacte d'homotopie du fibré. D'après la partie déjà démontrée du théorème 2, il s'ensuit que

$$H_i(\tilde{X}) = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq 2, \quad H_3(\tilde{X}) = \pi_3(X).$$

Le terme E^2 de la suite spectrale du fibré est donné par

$$E_{p,q}^2 = H_p(\pi_2, 2; H_q(\tilde{X})), \text{ d'où } E_{p,q}^2 = 0 \text{ pour } q = 1 \text{ ou } 2,$$

avec $E_{0,3}^2 = \pi_3(X)$, $E_{p,0}^2 = H_p(\pi_2, 2)$ (Remarque : ici, on ne prend pas, en dimension 0, les groupes d'homologie "réduits"). Le théorème 5.12 (a), page 328 du livre de CARTAN-EILENBERG ⁽¹⁾ donne alors la suite exacte

$$E_{4,0}^2 \rightarrow E_{0,3}^2 \rightarrow H_3(X) \rightarrow E_{3,0}^2 \rightarrow 0,$$

c'est-à-dire

$$H_4(\pi_2, 2) \rightarrow \pi_3(X) \xrightarrow{h_3} H_3(X) \rightarrow H_3(\pi_2, 2) \rightarrow 0.$$

Si l'on admet le lemme 2, il s'ensuit que h_3 est surjectif.

Indication sur la démonstration du lemme 2. - Soit B l'espace $K(\pi, 2)$, et soit X l'espace des chemins de B , d'origine donnée; la fibre F est un espace $K(\pi, 1)$, comme le montre la suite exacte d'homotopie du fibré. La suite spectrale de ce fibré donne une suite exacte

$$H_1(\pi, 1) \otimes H_1(\pi, 1) \xrightarrow{f} H_2(\pi, 1) \rightarrow H_3(\pi, 2) \rightarrow 0,$$

où f est l'application définie par la loi de composition du groupe abélien π . Il suffira de montrer que l'application f est surjective; pour cela, on peut se borner au cas où le groupe π est de type fini (le cas général s'en

⁽¹⁾ CARTAN (H.) et EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

déduit par limite inductive). Montrons que si f est surjective pour deux groupes π et π' , f est surjective pour le groupe produit $\pi \times \pi'$: en effet, d'après la formule de Künneth, $H_2(\pi \times \pi', 1)$ est somme directe de $H_2(\pi, 1)$, $H_2(\pi', 1)$ et $H_1(\pi, 1) \otimes H_1(\pi', 1)$, et il est clair que chacun de ces groupes est contenu dans l'image de $H_1(\pi \times \pi', 1) \otimes H_1(\pi \times \pi', 1)$. Pour achever la démonstration, il suffit de montrer que $H_2(\pi, 1) = 0$ lorsque π est un groupe cyclique, fini ou infini. Or cela résulte du calcul explicite, bien connu, de l'homologie d'un groupe cyclique.

THEOREME 3 (théorème de Hurewicz "relatif"). - Soient $x_0 \in A \subset X$, et supposons $\pi_0(A) = \pi_0(X) = 0$, $\pi_1(X) = 0$. Alors $\pi_1(X, A)$ et $H_1(X, A)$ sont nuls ; $h_2 : \pi_2(X, A, x_0) \rightarrow H_2(X, A)$ est surjectif et a pour noyau le groupe des commutateurs de $\pi_2(X, A, x_0)$. Si de plus $\pi_1(A, x_0) \neq 0$, alors $\pi_2(X, A, x_0) \rightarrow H_2(X, A)$ est un isomorphisme. Moyennant toutes les hypothèses précédentes, soit n un entier ≥ 3 ; alors les conditions

$$(i) \quad H_i(X, A) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq i < n,$$

$$(ii) \quad \pi_i(X, A) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq i < n$$

sont équivalentes ; elles entraînent :

- a. l'homomorphisme $h_n : \pi_n(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$ est bijectif ;
- b. l'homomorphisme $h_{n+1} : \pi_{n+1}(X, A) \rightarrow H_{n+1}(X, A)$ est surjectif.

DEMONSTRATION. - $\pi_1(X, A)$ et $H_1(X, A)$ sont nuls à cause de la suite exacte d'homotopie (resp. d'homologie). L'espace $Y = \Omega(X, A, x_0)$ est donc connexe ; d'après le théorème 1 appliqué à Y , l'application $\pi_2(X, A) \rightarrow H_1(\Omega(X, A, x_0))$ identifie le second groupe au premier "rendu abélien" ; de plus, d'après le lemme 1, la suspension $\sigma_1 : H_1(\Omega(X, A, x_0)) \rightarrow H_2(X, A)$ est bijective. De là s'ensuit bien que $h_2 : \pi_2(X, A) \rightarrow H_2(X, A)$ identifie le second groupe au premier "rendu abélien". Si maintenant on suppose $\pi_1(A) = 0$, la suite exacte d'homotopie montre que $\pi_2(X, A)$ est un quotient de $\pi_2(X)$, qui est abélien ; donc $\pi_2(X, A)$ est abélien, et $h_2 : \pi_2(X, A) \rightarrow H_2(X, A)$ est un isomorphisme.

Sous les hypothèses précédentes, les conditions $\pi_2(X, A) = 0$ et $H_2(X, A) = 0$ sont équivalentes. Elles sont remplies si on fait l'hypothèse (i) de l'énoncé, avec un $n \geq 3$. D'après le lemme 1,

$$\sigma_1 : H_1(\Omega(X, A, x_0)) \rightarrow H_{i+1}(X, A)$$

est alors bijective pour $i < n$, et surjective pour $i = n$. L'espace $Y = \mathcal{Q}(X, A, x_0)$ satisfait donc à $\pi_0(Y) = \pi_1(Y) = 0$, $H_1(Y) = 0$ pour $i < n - 1$; d'après le théorème 2 (appliqué à Y), on a $\pi_i(Y) = 0$ pour $i < n - 1$, $\pi_{n-1}(Y) \rightarrow H_{n-1}(Y)$ est bijectif, et $\pi_n(Y) \rightarrow H_n(Y)$ est surjectif. On en conclut que $\pi_i(X, A) = 0$ pour $i < n$, que $h_n : \pi_n(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$ est bijectif, et que $h_{n+1} : \pi_{n+1}(X, A) \rightarrow H_{n+1}(X, A)$ est surjectif. Ceci démontre les propriétés (ii), (a) et (b) de l'énoncé. Comme plus haut, on montre que (ii) entraîne (i), et le théorème 3 est établi.

3. Les théorèmes de J.H.C. WHITEHEAD.

THÉORÈME 4. - Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue d'espaces topologiques, telle que $f(x_0) = y_0$. Supposons

$$\pi_0(X, x_0) = \pi_1(X, x_0) = \pi_0(Y, y_0) = \pi_1(Y, y_0) = 0,$$

et soit n un entier ≥ 2 . Alors les conditions :

(i) $f_* : \pi_i(X, x_0) \rightarrow \pi_i(Y, y_0)$ est bijectif pour $i < n$ et surjectif pour $i = n$;

(ii) $f_* : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$ est bijectif pour $i < n$ et surjectif pour $i = n$;

sont équivalentes.

DEMONSTRATION. - On peut se ramener au cas où f est une injection grâce au "mapping cylinder" (cylindre d'application) de f : c'est un espace M tel que X soit plongé dans M , que Y soit rétracte par déformation de M , et que l'application composée de l'injection $X \rightarrow M$ et de la rétraction $M \rightarrow Y$ soit l'application donnée f .

Supposons donc désormais que $f : X \rightarrow Y$ soit une injection topologique (X étant donc un sous-espace de Y avec la topologie induite). Alors les conditions (i) de l'énoncé équivalent à $\pi_i(Y, X, x_0) = 0$ pour $i \leq n$, et les conditions (ii) équivalent à $H_i(Y, X) = 0$ pour $i \leq n$. Le présent théorème résulte alors du théorème 3 (équivalence des conditions (i) et (ii) du théorème 3).

THÉORÈME 5. - Soient X et Y des espaces connexes, et soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue telle que $f(x_0) = y_0$. Soit enfin n un entier ≥ 2 . Alors :

a. Si l'application $\pi_i(X, x_0) \rightarrow \pi_i(Y, y_0)$ définie par f est bijective pour $i < n$ et surjective pour $i = n$, il en est de même de l'application $H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$ définie par f ;

b. Si $\pi_i(X, x_0) \rightarrow \pi_i(Y, y_0)$ est bijective pour $i \leq n$, il en est de même de l'application $H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$;

c. Si $\pi_i(X, x_0) \rightarrow \pi_i(Y, y_0)$ est bijective pour $i \leq n$ et injective pour $i = n + 1$, il en est de même de $H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$.

DÉMONSTRATION. - On va d'abord supposer que $\pi_1(X, x_0) = 0$ et $\pi_1(Y, y_0) = 0$. D'autre part, on supposera, comme dans la démonstration du théorème 4, que X est un sous-espace de Y , et $x_0 = y_0$. L'assertion (a) est une conséquence du théorème 4. Prouvons (b) : on suppose que l'application $\pi_i(X) \rightarrow \pi_i(Y)$ est bijective pour $i \leq n$; d'après (a), $H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$ est bijective pour $i < n$ et surjective pour $i = n$, et tout revient à montrer que $H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ est injective. Or on a $\pi_i(Y, X) = 0$ pour $i \leq n$, donc, d'après le théorème 3, $\pi_{n+1}(Y, X) \rightarrow H_{n+1}(Y, X)$ est bijective ; le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+1}(Y, X) & \xrightarrow{0} & \pi_n(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{n+1}(Y, X) & \longrightarrow & H_n(X) \end{array}$$

montre alors que l'application $H_{n+1}(Y, X) \rightarrow H_n(X)$ est nulle, et par suite $H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ est injective.

Prouvons (c) (en supposant toujours $\pi_1(X) = \pi_1(Y) = 0$). On peut appliquer ce qui vient d'être dit dans le cas (b) ; le théorème 3 dit que l'application $\pi_{n+2}(Y, X) \rightarrow H_{n+2}(Y, X)$ est surjective ; comme on suppose que $\pi_{n+1}(X) \rightarrow \pi_{n+1}(Y)$ est injective, le même diagramme que ci-dessus (mais où n serait remplacé par $n + 1$) montre que l'application $H_{n+2}(Y, X) \rightarrow H_{n+1}(X)$ est nulle ; donc $H_{n+1}(X) \rightarrow H_{n+1}(Y)$ est injective, ce qui démontre (c).

On va maintenant, dans chacun des trois cas (a), (b), (c), s'affranchir de l'hypothèse $\pi_1(X) = 0$, $\pi_1(Y) = 0$. Supposant toujours que X est un sous-espace de Y , nous plongeons Y dans un espace $V = K(\pi, 1)$, où π désigne le groupe $\pi_1(Y, y_0) = \pi_1(X, x_0)$. Soit X' l'espace des chemins de V dont l'extrémité est dans X ; X' est un fibré (de Serre) sur V , la fibre $\tilde{X}$ étant l'espace des chemins de V d'origine x_0 et d'extrémité dans X . De

même, soit Y' l'espace des chemins de V dont l'extrémité est dans Y ; Y' est fibré de base V , de fibre $\tilde{Y}$. Le fibré X' est un sous-fibré de Y' , de même base V , la fibre $\tilde{X}$ s'identifiant à un sous-espace de la fibre $\tilde{Y}$. De plus, Y est rétracte par déformation de Y' , et dans la déformation X' se rétracte sur X . La suite spectrale du fibré X' s'envoie dans celle du fibré Y' ; elles aboutissent respectivement à $H_*(X)$ et $H_*(Y)$. L'homomorphisme des termes E^2 est

$$g_{p,q} : H_p(V, H_q(\tilde{X})) \rightarrow H_p(V, H_q(\tilde{Y}))$$

(il s'agit d'homologie de V à valeurs dans le système local des homologies des fibres).

La suite exacte d'homotopie des fibrés montre que $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ sont connexes, que $\pi_1(\tilde{X}) = \pi_1(\tilde{Y}) = 0$, et que $\pi_i(\tilde{X}) \rightarrow \pi_i(X)$ et $\pi_i(\tilde{Y}) \rightarrow \pi_i(Y)$ sont des isomorphismes pour tout $i \geq 2$. Dans le cas (a), l'application $\pi_i(\tilde{X}) \rightarrow \pi_i(\tilde{Y})$ est donc bijective pour $i < n$ et surjective pour $i = n$; dans le cas (b), elle est bijective pour $i \leq n$; dans le cas (c), elle est bijective pour $i \leq n$ et injective pour $i = n + 1$. On peut appliquer le présent théorème à l'injection $\tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$, et on en déduit ceci :

- dans le cas (a), l'application $H_i(\tilde{X}) \rightarrow H_i(\tilde{Y})$ est bijective pour $i < n$, et surjective pour $i = n$;
- dans le cas (b), l'application $H_i(\tilde{X}) \rightarrow H_i(\tilde{Y})$ est bijective pour $i \leq n$,
- dans le cas (c), l'application $H_i(\tilde{X}) \rightarrow H_i(\tilde{Y})$ est bijective pour $i \leq n$, et injective pour $i = n + 1$.

Dans le cas (a), l'homomorphisme $g_{p,q}$ des termes E^2 est bijectif pour $p + q < n$, et surjectif pour $p + q = n$ (car si $p + q = n$, ou bien $p > 0$, et alors $g_{p,q}$ est bijectif, ou bien $p = 0$ et $q = n$, et alors $H_0(V, H_n(\tilde{X})) \rightarrow H_0(V, H_n(\tilde{Y}))$ est surjectif).

Dans le cas (b), l'homomorphisme $g_{p,q}$ est bijectif pour $p + q \leq n$, et il est surjectif (et même bijectif) pour $p + q = n + 1$, $p \geq 2$.

Dans le cas (c), l'homomorphisme $g_{p,q}$ est bijectif pour $p + q \leq n$, injectif pour $p + q = n + 1$, et surjectif pour $p + q \leq n + 2$ et $p \geq 2$ (en fait dans ce dernier cas, $g_{p,q}$ est même bijectif).

Dans le cas (a), on peut appliquer le lemme 3 (Appendice), qui dit que l'application $H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$ des aboutissements des suites spectrales est bijective

pour $i < n$, et surjective pour $i = n$; ceci prouve l'assertion (a) de l'énoncé.

Dans le cas (b), le lemme 4 (appendice) montre que l'application $H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$ est bijective pour $i \leq n$; ceci prouve l'assertion (b) de l'énoncé. Enfin, dans le cas (c), le lemme 5 (appendice) dit que $H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$ est bijective pour $i \leq n$ et injective pour $i = n + 1$, ce qui démontre l'assertion (c) de l'énoncé.

Le théorème 5 est ainsi entièrement démontré.

REMARQUE. - Lorsque $\pi_1(X)$ et $\pi_1(Y)$ ne sont pas nuls, il ne faudrait pas croire que la condition (ii) du théorème 4 entraîne (i), même lorsque $\pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ est bijectif. Voici en effet l'exemple d'une application $f: X \rightarrow Y$, (X et Y étant connexes) telle que les applications $H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$ définies par f soient toutes des isomorphismes, ainsi que l'application $\pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$; et cependant $\pi_i(X) \rightarrow \pi_i(Y)$ n'est pas un isomorphisme pour tout $i \geq 2$.

Soit π le groupe Z_2 des entiers modulo 2; l'espace $K(\pi, 1) = Y$ est, comme on sait, la base d'un fibré principal P dont le groupe structural est π . Soit d'autre part M un espace tel que $\pi_0(M) = \pi_1(M) = 0$, $H_2(M) = Z_3$, $H_i(M) = 0$ pour $i \geq 3$ ("espace de Moore" $M(Z_3, 2)$; un tel espace existe). Si on fait opérer $Z_2 = \pi$ sur Z_3 , cela définit des opérations de π sur l'espace M , et on a donc un fibré de base Y et de fibre M associé au fibré principal P . Nous ferons opérer π dans Z_3 de manière non triviale, le générateur de $\pi = Z_2$ définissant l'automorphisme de Z_3 qui change 1 en -1 . Soit X le fibré ainsi défini, de base Y et de fibre M . Soit f l'application de ce fibré sur sa base. Puisque $\pi_1(M) = 0$, l'application $\pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ définie par f est un isomorphisme.

Le terme E^2 de la suite spectrale du fibré X est donné par

$$E_{p,q}^2 = H_p(\pi, 1; H_q(M)) .$$

Donc $E_{p,q}^2 = 0$ si q est distinct de 0 et de 2. Pour $p \neq 0$, $q = 2$, les éléments de $E_{p,q}^2$ sont à la fois d'ordre 2 et d'ordre 3, donc $E_{p,q}^2 = 0$. Enfin, pour $p = 0$, $q = 2$, $E_{0,2}^2$ est le quotient de $H_2(M) = Z_3$ par les opérations de π , donc c'est 0. Finalement, $E_{p,q}^2 = 0$ pour $q \neq 0$. Il en résulte que $H_p(X) \rightarrow H_p(Y)$ est un isomorphisme pour tout p . Or M a des groupes d'homotopie non nuls (et même, en fait, possède une infinité de groupes d'homotopie non nuls); il en résulte que $\pi_i(X) \rightarrow \pi_i(Y)$ ne peut être un isomorphisme pour tout i (ni même pour tous les i sauf un nombre fini).

Un homomorphisme de groupes différentiels gradués définit un homomorphisme des suites spectrales correspondantes. Soit $g_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p,q}^{r+1}$ l'homomorphisme des termes E^r et soit $h_i : H_i \rightarrow H_i^1$ l'homomorphisme des aboutissements de ces suites spectrales. On se propose de donner des conditions suffisantes pour que certains des h_i soient bijectifs, resp. surjectifs, resp. injectifs. Observons d'abord que si $g_{p,q}^{\omega}$ est injectif (resp. surjectif, resp. injectif) pour tout couple (p, q) tel que $p + q = i$, alors h_i est bijectif (resp. surjectif, resp. injectif).

LEMME 3. - Si $g_{p,q}^2$ est bijectif pour $p + q < n$ et surjectif pour $p + q = n$, alors h_i est bijectif pour $i < n$ et surjectif pour $i = n$.

LEMME 4. - Si $g_{p,q}^2$ est bijectif pour $p + q \leq n$ et surjectif pour $p + q = n + 1$, $p \geq 2$, alors h_i est bijectif pour $i \leq n$.

LEMME 5. - Si $g_{p,q}^2$ est bijectif pour $p + q \leq n$, injectif pour $p + q = n + 1$ et surjectif pour $p + q \leq n + 2$, $p \geq 2$, alors h_i est bijectif pour $i \leq n$ et injectif pour $i = n + 1$.

DÉMONSTRATION de ces trois lemmes. - Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 E_{p+r, q-r+1}^r & \xrightarrow{d^r} & E_{p,q}^r & \xrightarrow{d^r} & E_{p-r, q+r-1}^r \\
 \downarrow g_{p+r, q-r+1}^r & & \downarrow g_{p,q}^r & & \downarrow g_{p-r, q+r-1}^r \\
 E_{p+r, q-r+1}^{r+1} & \xrightarrow{d^{r+1}} & E_{p,q}^{r+1} & \xrightarrow{d^{r+1}} & E_{p-r, q+r-1}^{r+1}
 \end{array}$$

Si $g_{p,q}^r$ est surjectif, et $g_{p-r, q+r-1}^r$ est injectif, il est clair que $g_{p,q}^{r+1}$ est surjectif. Si $g_{p,q}^r$ est injectif, et $g_{p+r, q-r+1}^r$ est surjectif, il est clair que $g_{p,q}^{r+1}$ est injectif.

Dans les hypothèses du lemme 3, on montre par récurrence sur $r \geq 2$, que $g_{p,q}^r$ est bijectif pour $p + q < n$ et surjectif pour $p + q = n$. Dans les hypothèses du lemme 4, on montre, par récurrence sur r , que $g_{p,q}^r$ est bijectif pour $p + q \leq n$, et surjectif pour $p + q = n + 1$, $p \geq 2$. Dans les hypothèses du lemme 5, on montre, par récurrence sur r , que $g_{p,q}^r$ est bijectif pour $p + q \leq n$, injectif pour $p + q = n + 1$, et surjectif pour $p + q \leq n + 2$, $p \geq 2$.