

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

ICHIRO SATAKE

L'opérateur Φ

Séminaire Henri Cartan, tome 10, n° 2 (1957-1958), exp. n° 14, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_2_A5_0>

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1957-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'OPÉRATEUR Φ ;
par Ichiro SATAKE.

L'opérateur Φ a été plusieurs fois l'objet de notre considération (Exposé 4, n° 5 ; Exposé 7, n° 2, n° 4 ; Exposé 8, n° 1) ; mais il y a encore lieu de le compléter, parce que jusqu'ici nous nous sommes limité en principe à la considération des formes modulaires (i.e. formes automorphes relatives à $\Gamma = \text{SL}(n, \mathbb{Z})$ définies globalement, c'est-à-dire dans $\mathbb{H}_n$ tout entier) ; dans cet exposé on se propose de la généraliser au cas des formes automorphes locales relatives à un groupe commensurable quelconque.

On utilisera dans ce qui suit les abréviations que voici :

$$\xi(X) = \exp(2\pi i \text{Tr}(X)) ,$$

$$Y[U] = {}^t_U Y U ,$$

où X, Y sont des matrices carrées et U une matrice quelconque telle que ${}^t_U Y U$ ait un sens.

1. Le développement en série de Fourier des formes automorphes locales.

Soient Γ' un groupe commensurable au groupe modulaire, ρ une représentation holomorphe irréductible de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ dans un espace vectoriel complexe F_ρ de dimension finie et μ un multiplicateur de Γ' (i.e. une représentation de Γ' dans un espace F_μ de dimension finie, représentation dont le noyau est supposé d'indice fini dans Γ') ; soit de plus U_n un ouvert Γ' -saturé dans $\mathbb{H}_n$.

On appelle f une forme automorphe locale d'espèce (μ, ρ) pour Γ' dans U_n , si f est une fonction holomorphe définie dans U_n , à valeurs dans $\text{Hom}(F_\mu, F_\rho)$, vérifiant la condition

$$(1.1) \quad f(M.Z) = \rho(CZ + D) \circ f(Z) \circ \mu(M)^{-1}$$

pour toute $M \in \Gamma'$; on désigne par $\mathcal{H}_{\Gamma', U_n}(\mu, \rho)$ l'espace vectoriel formé de toutes ces fonctions.

Soit U un ouvert Γ' -saturé dans $\mathbb{H}_n^*$ et soient

$$U_r = U \cap \mathbb{H}_r, \quad \Gamma'_r = \Gamma' \cap \mathbb{G}_r^n \quad (0 \leq r \leq n) ;$$

alors il est clair que U_r est Γ'_r -saturé (on notera que, pour U_n donné, il y a un plus grand ouvert U dans $\tilde{\Sigma}_n^*$ tel que $U \cap \tilde{\Sigma}_n = U_n$, et que cet U est Γ' -saturé); on se propose de définir un opérateur Φ_r^n pour $r < n$ tel que $U_r \neq \emptyset$, qui applique $\tilde{\mathcal{H}}_{\Gamma', U_n}(\mu, \rho)$ dans $\tilde{\mathcal{H}}_{\Gamma', U_r}(\mu^{(r)}, \rho^{(r)})$, où $\rho^{(r)}$ est une représentation de $GL(r, \mathbb{C})$ déjà définie (voir n° 2), et où $\mu^{(r)}$ est un multiplicateur de Γ'_r que l'on définira plus tard.

Soit $Z_0 \in U_r$; il est clair que Z_0 possède un voisinage U' , contenu dans U , au sens de $\mathcal{C}_0^\Gamma$, tel que $U' \cap U_n$ soit stable par toutes les translations de la forme

$$Z \longrightarrow Z + T, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} \\ t_{T_{12}} & T_2 \end{pmatrix}, \quad T_2 = {}^t T_2, \quad T_{12}, T_2 : \text{réelles.}$$

(prendre, par exemple, $U' = \bigcup_{r \leq s \leq n} \Gamma^V(s)(U'_r, K)$). D'autre part, on a

$$\Gamma' \cap \mathcal{G}_r^n \supset \Gamma'_{Z_0} \supset \Gamma' \cap \mathcal{M}_r^n$$

et ce dernier, étant commensurable à $\Gamma' \cap \mathcal{M}_r^n$, contient toutes les transformations de la forme suivante

$$(i) \quad Z \longrightarrow Z[U], \quad U = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}, \quad U_2 \in \gamma'_{n-r},$$

(γ'_{n-r} : un sous-groupe d'indice fini de $\gamma_{n-r} = SL(n-r, \mathbb{Z})$)

$$(ii) \quad Z \longrightarrow Z[U], \quad U = \begin{pmatrix} E_r & U_{12} \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}, \quad U_{12} \equiv 0 \pmod{q},$$

(q : un entier positif)

$$(iii) \quad Z \longrightarrow Z + T, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} \\ t_{T_{12}} & T_2 \end{pmatrix}, \quad T_2 = {}^t T_2, \quad T_{12}, T_2 \equiv 0 \pmod{q};$$

on peut supposer de plus que la représentation μ est triviale pour toutes ces transformations.

Soit $f \in \tilde{\mathcal{H}}_{\Gamma', U_n}(\mu, \rho)$. Alors d'après (1.1) on a, en particulier,

$$f(Z + T) = f(Z)$$

pour toutes les translations (iii); de sorte que $f(Z)$ possède des développements

en série de Fourier dans $U' \cap U_n$ comme suit :

$$(1.2) \quad f(Z) = \sum_{S_2} a_{S_2}(Z_1, Z_{12}) \xi(S_2 Z_2) ,$$

$$(1.2)' \quad f(Z) = \sum_{S_2, S_{12}} b_{S_2, S_{12}}(Z_1) \xi({}^t S_{12} Z_{12} + S_2 Z_2) ,$$

où les sommations sont étendues à toutes les matrices S_2 ou (S_2, S_{12}) dont les coefficients sont dans $\frac{1}{q} \mathbb{Z}$, et où $a_{S_2}(Z_1, Z_{12})$, $b_{S_2, S_{12}}(Z_1)$ sont des fonctions holomorphes de (Z_1, Z_{12}) ou de Z_1 telles que $Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_{12} \\ {}^t Z_{12} & Z_2 \end{pmatrix} \in U' \cap U_n$

(Exposé 4, n° 2) ; ces séries convergent normalement sur tout compact dans $U' \cap U_n$.

Cela posé, on va étudier les propriétés des coefficients $a_{S_2}(Z_1, Z_{12})$, $b_{S_2, S_{12}}(Z_1)$ de ces développements. D'abord on se donne une transformation de $\Gamma' \cap \mathcal{A}_r^n$:

$$M : Z \longrightarrow Z[U] + T, \quad U = \begin{pmatrix} E_r & U_{12} \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} \\ {}^t T_{12} & T_2 \end{pmatrix},$$

ou plus précisément

$$\begin{cases} Z_1 \longrightarrow Z_1 \\ Z_{12} \longrightarrow Z_{12} U_2 + Z_1 U_{12} + T_{12} \\ Z_2 \longrightarrow Z_2 [U_2] + {}^t U_{12} Z_{12} U_2 + {}^t U_2 {}^t Z_{12} U_{12} + Z_1 [U_{12}] + T_2 \end{cases} ;$$

alors pour cette transformation la relation (1.1) s'écrit

$$(1.3) \quad f(Z[U] + T) = \rho(U)^{-1} \circ f(Z) \circ \mu \left(\begin{pmatrix} {}^t U & TU^{-1} \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \right)^{-1},$$

et par suite (pour Z suffisamment voisin de Z_0)

$$\begin{aligned} \sum a_{S_2}(Z_1, Z_{12} U_2 + Z_1 U_{12} + T_{12}) \xi(S_2(Z_2 [U_2] + {}^t U_{12} Z_{12} U_2 + Z_1 [U_{12}] + T_2)) \\ = \sum \rho(U)^{-1} \circ a_{S_2}(Z_1, Z_{12}) \circ \mu(M)^{-1} \xi(S_2 Z_2), \end{aligned}$$

$$\sum b_{S_2, S_{12}}(Z_1) \varepsilon(t_{S_{12}}(Z_{12} U_2 + Z_1 U_{12} + T_{12}) + S_2(Z_2 [U_2] + 2^t U_{12} Z_{12} U_2 + Z_1 [U_{12}] + T_2)) \\ = \sum \rho(U)^{-1} \circ b_{S_2, S_{12}}(Z_1) \circ \mu^{(M)^{-1}} \varepsilon(t_{S_{12}} Z_{12} + S_2 Z_2),$$

d'où l'on déduit

$$(1.4) \quad \rho(U)^{-1} \circ a_{S_2[t_{U_2}]}(Z_1, Z_{12}) \circ \mu^{(M)^{-1}} \\ = a_{S_2}(Z_1, Z_{12} U_2 + Z_1 U_{12} + T_{12}) \varepsilon(S_2(Z_1 [U_{12}] + 2^t U_{12} Z_{12} U_2 + T_2))$$

$$(1.4)' \quad \rho(U)^{-1} \circ b_{S_2[t_{U_2}], S_{12} t_{U_2} + 2U_{12} S_2 t_{U_2}}(Z_1) \circ \mu^{(M)^{-1}} \\ = b_{S_2, S_{12}}(Z_1) \varepsilon(t_{S_{12}}(Z_1 U_{12} + T_{12}) + S_2(Z_1 [U_{12}] + T_2))$$

et, en particulier, pour les transformations (i), (ii), (iii) les relations suivantes

$$(1.5) \quad a_{S_2[t_{U_2}]}(Z_1, Z_{12}) = \rho(U) \circ a_{S_2}(Z_1, Z_{12} U_2),$$

$$(1.6) \quad a_{S_2}(Z_1, Z_{12} + Z_1 U_{12}) = \rho(U)^{-1} \circ a_{S_2}(Z_1, Z_{12}) \varepsilon(-S_2(Z_1 [U_{12}] + 2^t U_{12} Z_{12})),$$

$$(1.7) \quad a_{S_2}(Z_1, Z_{12} + T_{12}) = a_{S_2}(Z_1, Z_{12}),$$

ou

$$(1.5)' \quad b_{S_2[t_{U_2}], S_{12} t_{U_2}}(Z_1) = \rho(U) \circ b_{S_2, S_{12}}(Z_1),$$

$$(1.6)' \quad b_{S_2, S_{12} + 2U_{12} S_2}(Z_1) = \rho(U) \circ b_{S_2, S_{12}}(Z_1) \varepsilon(S_2 Z_1 [U_{12}] + t_{S_{12}} Z_1 U_{12}).$$

On dit que S_{12} est un multiple rationnel de S_2 s'il existe une matrice rationnelle W de type $(r, n - r)$ telle que $S_{12} = W S_2$. Alors une conséquence importante de ces relations et de la convergence des séries ci-dessus est la suivante :

THÉOREME 1. - Si $n \geq 2$, les coefficients $a_{S_2}(Z_1, Z_{12})$ du développement (1.2) sont identiquement nuls lorsque S_2 n'est pas ≥ 0 ; les coefficients $b_{S_2, S_{12}}(Z_1)$ du développement (1.2)' sont identiquement nuls lorsque S_2 n'est

pas ≥ 0 ou S_{12} n'est pas un multiple rationnel de S_2 .

Si $r = 0$ la deuxième assertion du théorème n'a pas de sens et, d'autre part, les relations (1.5)-(1.7) se réduisent à la seule relation

$$a_{S_2}[{}^t U_2] = \rho(U) a_{S_2} ;$$

ce cas n'est autre que le théorème de Koecher (Exposé 4, n° 3, Théorème 1 ; il faut le généraliser d'une façon évidente).

Soit donc $r > 0$ et supposons que $b_{S_2, S_{12}}(Z)$ ne soit pas identiquement nul. Si $U_{12} S_2 = 0$, (1.6)' s'écrit

$$b_{S_2, S_{12}}(Z_1) = \rho(U) \circ b_{S_2, S_{12}}(Z_1) \xi({}^t S_{12} Z_1 U_{12}) ,$$

ce qui exprime que $\xi(-{}^t S_{12} Z_1 U_{12})$ est une valeur propre de $\rho(U)$; mais comme les valeurs propres sont en nombre fini et que Z_1 peut parcourir un ouvert dans $\tilde{\Sigma}_r$, on a nécessairement $U_{12} {}^t S_{12} = 0$, d'où résulte que S_{12} est un multiple rationnel de S_2 .

Or, en posant $U_{12} = q U'_{12}$, on a d'après (1.6)'

$$\begin{aligned} a_{S_2}(Z_1, Z_{12}) &= \sum_{S_{12}} \sum_{\substack{U'_{12} \\ \text{mod } \{2q U'_{12} S_2\} \text{ mod } Z^{r(n-r)}(S_2)}} b_{S_2, S_{12} + 2q U'_{12} S_2}(Z_1) \xi({}^t S_{12} Z_{12} + 2q S_2 {}^t U'_{12} Z_{12}) \\ &= \sum_{S_{12}} \sum_{U'_{12}} \rho(U) \circ b_{S_2, S_{12}}(Z_1) \xi(q^2 S_2 Z_1 [U'_{12}] \\ &\quad + q {}^t S_{12} Z_1 U'_{12} + 2q S_2 {}^t U'_{12} Z_{12} + {}^t S_{12} Z_{12}) ; \end{aligned}$$

$Z^{r(n-r)}(S_2)$ désignant l'ensemble des U'_{12} telles que $U'_{12} S_2 = 0$; donc, si $b_{S_2, S_{12}}(Z_1)$ n'est pas identiquement nul, le sous-espace de $\text{Hom}(F_\mu, F_\rho)$ formé des éléments b tels que

$$\sum_{U'_{12}} \rho(U) \xi(q^2 S_2 Z_1 [U'_{12}] + q({}^t S_{12} Z_1 + 2S_2 {}^t Z_{12}) U'_{12}) b$$

soit convergente pour une $Z_1 \in U_r$ donnée et pour toutes les Z_{12} n'est pas $\neq \{0\}$; comme ce dernier est un sous-espace invariant par rapport à la

représentation $\rho\left(\begin{pmatrix} E & qU'_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix}\right)$ du groupe abélien $\{U'_{12}\}$, on en conclut, en considérant un vecteur propre de cette représentation, la convergence de la série

$$\sum_{U'_{12}} |\varepsilon(q^2 S_2 Z_1 [U'_{12}] + q({}^t S_{12} Z_1 + 2S_2 {}^t Z_{12})U'_{12})| ;$$

Or il existe une matrice rationnelle non-singulière P telle que

$$S_2 = P \begin{pmatrix} S_2^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} {}^t P, \quad S_{12} = (S_{12}^0 \ 0) {}^t P, \quad \text{où } S_2^0 \text{ est une matrice non-singulière}$$

de degré $t \leq n - r$ et S_{12}^0 est une matrice de type (r, t) ; alors la sommation ci-dessus s'étend à toutes les matrices entières U'_{12} modulo le sous-groupe

formé des U'_{12} telles que $U'_{12} P = \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix}$; donc elle contient la sommation

étendue à toutes les matrices U'_{12} telles que $qU'_{12} P = (q'U''_{12} \ 0)$, où U''_{12}

est une matrice entière de type (r, t) , et q' est un entier positif; posons de plus $Z_{12} P = (Z_{12}^0, *)$ avec Z_{12}^0 de type (r, t) ; alors la série ci-dessus s'écrit

$$\sum_{U''_{12}} |\varepsilon(q^{12} S_2^0 Z_1 [U''_{12}] + q'({}^t S_{12}^0 Z_1 + 2S_2^0 {}^t Z_{12}^0)U''_{12})| < \infty,$$

la sommation étant étendue à toutes les matrices entières U''_{12} de type (r, t) , d'où résulte immédiatement que $S_2^0 \gg 0$.

Si $n = 1$, $r = 0$, la conclusion du théorème est évidemment fausse; dans ce cas on suppose cette propriété, i.e. on suppose que f possède un développement de Fourier de la forme

$$f(Z) = \sum_{s \geq 0} a_s \varepsilon(sz) ;$$

cette hypothèse est, comme on sait, équivalente à dire que f est bornée dans un voisinage (au sens de $\mathcal{C}_0^1$) du point à l'infini; on appelle une telle f une forme automorphe locale bornée.

REMARQUE. - Soit S_2 une matrice ≥ 0 de degré $n - r$ dont tous les coefficients sont dans $\frac{1}{q} \mathbb{Z}$; désignons par $\{S_2\}_q$ l'ensemble des matrices S_{12} qui sont des multiples rationnels de S_2 et dont tous les coefficients sont dans $\frac{1}{q} \mathbb{Z}$, et par $\{\{S\}\}_q$ l'ensemble des matrices S_{12} de la forme $2q U'_{12} S_2$ avec des matrices entières U'_{12} ; alors il est clair que $\{\{S_2\}\}_q$ est un sous-groupe d'indice fini du groupe additif $\{S_2\}_q$. Or il est facile de voir que

si S_{12} est un multiple rationnel de S_2 la série

$$(1.8) \Theta_{q; S_2, S_{12}}^{(\rho)}(Z_1, Z_{12}) = \sum_{U_{12}: Z^{r(n-r)}/Z^{r(n-r)}(S_2)} \rho \left(\begin{pmatrix} E & qU_{12}' \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) (q^2 S_2 Z_1 [U_{12}'] + q(t_{S_{12}} Z_1 + 2S_2 t_{Z_{12}}) U_{12}') \\ + q(t_{S_{12}} Z_1 + 2S_2 t_{Z_{12}}) U_{12}') \\$$

est convergente, et que $a_{S_2}(Z_1, Z_{12})$ est une combinaison linéaire de celles-là de la forme suivante

$$a_{S_2}(Z_1, Z_{12}) = \sum_{S_{12}: \{S\}_q / \{S_2\}_q} \Theta_{q; S_2, S_{12}}^{(\rho)}(Z_1, Z_{12}) \circ b_{S_2, S_{12}}(Z_1) \varepsilon(t_{S_{12}} Z_{12}) ;$$

d'autre part, vu (1.5), $f(Z)$ est une combinaison linéaire de

$$\sum_{t_{U_2} \in t_{\gamma'(S_2)} \setminus t_{\gamma'} S_2 [t_{U_2}]} a_{S_2}(Z_1, Z_{12}) \varepsilon(S_2 Z_2 [U_2]) \\ = \sum \rho \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \right) a_{S_2}(Z_1, Z_{12} U_2) \varepsilon(S_2 Z_2 [U_2]) ,$$

$t_{\gamma'(S_2)}$ désignant le groupe des unités de S_2 dans $t_{\gamma'}$, i.e.

$t_{\gamma'(S_2)} = \{t_{U_2} ; U_2 \in \gamma' = \gamma'_{n-r}, S_2 [t_{U_2}] = S_2\}$; comme ce dernier s'écrit

$$\sum_{U_2} \sum_{S_{12}} \rho \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \right) \Theta_{q; S_2, S_{12}}^{(\rho)}(Z_1, Z_{12} U_2) \circ b_{S_2, S_{12}}(Z_1) \varepsilon(S_2 Z_2 [U_2] + t_{S_{12}} Z_{12} U_2),$$

$f(Z)$ est une combinaison linéaire avec coefficients $b_{S_2, S_{12}}(Z_1)$ des séries "thêta"

$$\Theta_{q; S_2, S_{12}}^{(\rho)}(Z) = \sum_{U_2} \rho \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \right) \Theta_{q; S_2, S_{12}}^{(\rho)}(Z_1, Z_{12} U_2) \varepsilon(S_2 Z_2 [U_2] + t_{S_{12}} Z_{12} U_2) \\ = \sum_{U_2, U_{12}} \rho \left(\begin{pmatrix} E & U_{12} \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \right) \varepsilon(S_2 Z_1 [U_{12}] + (t_{S_{12}} Z_1 + 2S_2 t_{U_2} t_{Z_{12}}) U_{12} + S_2 Z_2 [U_2] + t_{S_{12}} Z_{12} U_2) \\ (1.9) \\ = \sum_{U_{12}: qZ^{r(n-r)}/qZ^{r(n-r)}(S_2)} \rho \left(\begin{pmatrix} E & U_{12} \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \right) \varepsilon(S_2 Z \begin{bmatrix} U_{12} \\ U_2 \end{bmatrix} + (t_{S_{12}}, 0) Z \begin{pmatrix} U_{12} \\ U_2 \end{pmatrix}),$$

où $S_2 \geq 0$ est pris modulo ${}^t\mathcal{Y}'$ et $S_{12} \in \{S_2\}_q$ modulo $\{\{S_2\}\}_q$; la convergence de cette série est facile à voir.

2. Définition de l'opérateur Φ_r^n .

Les notations étant comme ci-dessus, le théorème 1 affirme en particulier que $a_o(Z_1, Z_{12}) = b_{oo}(Z_1)$ ne dépend que de Z_1 ; c'est une fonction holomorphe définie dans un voisinage de Z_o ; en faisant varier Z_o dans U_r , on obtient une fonction holomorphe définie dans U_r ; on la note $f_r = \Phi_r^n f$:

$$(2.1) \quad f_r(Z_1) = (\Phi_r^n f)(Z_1) = a_o(Z_1, Z_{12}) = b_{oo}(Z_1) ;$$

considérons maintenant les propriétés de cette fonction.

On déduit d'abord de (1.5), (1.6)

$$(2.2) \quad \rho(U) \circ f_r(Z_1) = f_r(Z_1) \quad \text{pour} \quad U = \begin{pmatrix} E & U_{12} \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}, \quad U_2 \in \mathcal{Y}', \quad U_{12} \equiv 0 \pmod{q},$$

d'où résulte, par le raisonnement de l'Exposé 7, p. 14-17, que

$$(2.3) \quad f_r(Z_1) \in \text{Hom}(F_\mu, F_\rho^{(r)}) ,$$

où

$$(2.4) \quad f_\rho^{(r)} = F_{\rho^{(r)}} = \left\{ \alpha ; \alpha \in F_\rho, \rho(g)\alpha = \alpha \right. \\ \left. \text{pour } g = \begin{pmatrix} E_r & g_{12} \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}, g_2 \in \text{SL}(n-r, \mathbb{C}) \right\} ;$$

$$(2.5) \quad \rho^{(r)}(g_1) = \text{restriction de } \rho \left(\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} \right) \text{ à } F_\rho^{(r)} .$$

On sait que $F_\rho^{(r)} \neq \{0\}$ si et seulement si $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_{n-1} = 0$, et qu'alors $\rho^{(r)}$ est une représentation holomorphe irréductible de $\text{GL}(r, \mathbb{C})$ dans $F_\rho^{(r)}$, dont les exposants du plus haut poids sont $\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_r + \alpha_n$; en outre on a la relation

$$(2.6) \quad \rho \left(\begin{pmatrix} g_1 & g_{12} \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \right) \alpha = \rho^{(r)}(g_1) \det(g_2)^{\alpha_n} \alpha, \quad \text{pour } \alpha \in F_\rho^{(r)} .$$

Cela dit, on va montrer que f_r est une forme automorphe locale d'espèce $(\mu^{(r)}, \rho^{(r)})$ pour $\Gamma_r' = \omega_r(\Gamma' \cap \mathbb{C}_r^n)$ dans U_r ; ce fait se démontre par l'un

ou l'autre des raisonnements de l'Exposé 4 , n° 5 , théorème 3 , et de l'Exposé 8 , p. 4-6 ; mais on peut encore le démontrer de la manière suivante.

Soit

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & B_{12} \\ A_{21} & A_2 & B_{21} & B_2 \\ C_1 & 0 & D_1 & B_{12} \\ 0 & 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix} \in \Gamma' \cap \mathcal{G}_r^n ;$$

on note que $M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \in \Gamma'_r$ et que $A_2 = {}^t D_2^{-1}$; par un calcul de matrices

on constate facilement que

$$MZ = \begin{pmatrix} M_1 Z_1 & (\text{fonction de } Z_1, Z_{12}) \\ Z_2 [D_2^{-1}] + (\text{fonction de } Z_1, Z_{12}) \end{pmatrix}.$$

Or si $Z \in U_n$ est voisine de $Z_0 \in U_r$, MZ est voisine de $M_1 Z_0 \in U_r$; donc on a

$$\begin{aligned} f(MZ) &= \sum a_{S_2} (M_1 Z_1, \dots) \xi(S_2(Z_2 [D_2^{-1}] + \dots)) \\ &= \rho \left(\begin{pmatrix} C_1 Z_1 + D_1 & * \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \right) \circ f(Z) \circ \mu(M)^{-1} \\ &= \sum \rho \left(\begin{pmatrix} C_1 Z_1 + D_1 & * \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \right) \circ a_{S_2}(Z_1, Z_{12}) \circ \mu(M)^{-1} \xi(S_2 Z_2), \end{aligned}$$

d'où

$$a_{S_2}(M_1 Z_1, \dots) \xi(S_2(\dots)) = \rho \left(\begin{pmatrix} C_1 Z_1 + D_1 & * \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \right) \circ a_{S_2}[A_2](Z_1, Z_{12}) \circ \mu(M)^{-1}$$

et en particulier

$$(2.7) \quad f_r(M_1 Z_1) = \rho \left(\begin{pmatrix} C_1 Z_1 + D_1 & * \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \right) \circ f_r(Z_1) \circ \mu(M)^{-1} ;$$

mais comme $f_r(Z_1) \in \text{Hom}(F_\mu, F_\rho^{(r)})$, on a d'après (2.6)

$$\rho \left(\begin{pmatrix} C_1 Z_1 + D_1 & * \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \right) \circ f_r(Z_1) = \rho^{(r)}(C_1 Z_1 + D_1) \circ \det(D_2)^{\alpha_n} f_r(Z_1),$$

en sorte que $\det(D_2)^{\alpha_n} f_r(Z_1) \circ \mu(M)^{-1}$ ne dépend que de $M_1 = \varpi_r(M)$.

Or si l'on désigne par $N_\mu^{(r)}$ le sous-espace de F_μ engendré par

$$\det(D_2)^{-\alpha_n} \mu(M) \tilde{x} = x ; \tilde{x} \in F_\mu, M \in \Gamma' \cap \mathcal{A}_r^n,$$

l'endomorphisme $\det(D_2)^{-\alpha_n} \mu(M)$ ($M \in \Gamma' \cap \mathcal{G}_r^n$) laisse $N_\mu^{(r)}$ invariant et l'endomorphisme induit par celui-ci dans $F_{\mu(r)} = F_\mu / N_\mu^{(r)}$ ne dépend que de $M_1 = \mathcal{W}_r(M)$; on obtient ainsi une représentation de Γ'_r dans $F_{\mu(r)}$ qui est évidemment un multiplicateur de Γ'_r ; on le désigne par $\mu^{(r)}$:

$$(2.8) \quad \mu^{(r)}(M_1) = \text{l'endomorphisme induit par } \det(D_2)^{-\alpha_n} \mu(M) \text{ dans } F_{\mu(r)} = F_\mu / N_\mu^{(r)}.$$

Alors $f_r(Z_1)$ peut être considéré comme un élément de $\text{Hom}(F_{\mu(r)}, F_{\rho(r)})$ et (2.7) s'écrit

$$(2.9) \quad f_r(M_1 Z_1) = \rho^{(r)}(C_1 Z_1 + D_1) \circ f_r(Z_1) \circ \mu^{(r)}(M_1)^{-1},$$

ce qui prouve notre assertion.

On notera que

$$(2.10) \quad \det(D_2) = \pm 1 \text{ pour } M \in \Gamma' \cap \mathcal{G}_r^n.$$

En effet, pour $M \in \Gamma' \cap \mathcal{G}_r^n$, D_2 est unimodulaire et donc $\det(D_2) = \pm 1$; par suite la représentation $\Gamma' \cap \mathcal{G}_r^n \ni M \rightarrow \det(D_2)$ est essentiellement une représentation du groupe fini dans le groupe multiplicatif de $\mathbb{R}$; donc l'image de cette représentation est dans $\{\pm 1\}$.

Considérons le cas particulier où le multiplicateur μ est trivial ; alors $F_\mu = \mathbb{C}$; si $\det(D_2)^{\alpha_n} = 1$ pour toute $M \in \Gamma' \cap \mathcal{A}_r^n$ on a $N_\mu^{(r)} = \{0\}$, $F_{\mu(r)} = \mathbb{C}$ et le multiplicateur $\mu^{(r)}$ est encore trivial ; mais s'il existe une $M \in \Gamma' \cap \mathcal{A}_r^n$ telle que $\det(D_2)^{\alpha_n} = -1$, alors on a $N_\mu^{(r)} = \mathbb{C}$, $F_{\mu(r)} = \{0\}$, de sorte que $\Phi_r^n f = 0$ pour toute $f \in \mathcal{H}_{\Gamma', U_n}(\mu, \rho)$. Par exemple, si $\Gamma' = \Gamma$ et si α_n est impaire, on a toujours $\Phi_r^n f = 0$ pour tout $r < n$.

Nous avons ainsi démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Soit U un ouvert Γ' -saturé dans $\tilde{S}_n^*$ et soit $U_r = U \cap \tilde{S}_r$ ($0 \leq r \leq n$). Si $U_r \neq \emptyset$ et $f \in \mathcal{H}_{\Gamma', U_n}(\mu, \rho)$ (supposé bornée au cas où $n = 1$, $r = 0$), on a $f_r = \Phi_r^n f \in \mathcal{H}_{\Gamma', U_r}(\mu^{(r)}, \rho^{(r)})$, où $\rho^{(r)}$ est une représentation holomorphe irréductible de $GL(r, \mathbb{C})$ définie par (2.5), et $\mu^{(r)}$ est un multiplicateur de $\Gamma'_r = \mathcal{W}_r(\Gamma' \cap \mathcal{G}_r^n)$ défini par (2.8).

3. Propriétés de l'opérateur Φ_r^n .

Continuité de Φ_r^n : Soit W un compact dans l'espace de (Z_1, Z_{12}) (i.e. dans $\mathbb{S}_r \times \mathbb{C}^{r(n-r)}$) et soit $c > 0$; on désigne par $V(W, c)$ l'ensemble des $Z \in \tilde{\mathcal{S}}_n$ telles que

$$(3.1) \quad (Z_1, Z_{12}) \in W, \quad Y_2 \geq cE ;$$

alors on a le lemme suivant (cf. Exposé 4, n° 4, Proposition 1) :

LEMME 1. - Si $V(W, c) \subset U_n$ et si $f \in \tilde{\mathcal{H}}_{F', U_n}(\mu, \rho)$ (bornée dans le cas $n = 1, r = 0$), le développement de Fourier (1.2) de f converge normalement dans $V(W, c)$.

C'est une conséquence immédiate du fait que pour $Z \in V(W, c)$ on a

$$\|a_{S_2}(Z_1, Z_{12}) \varepsilon(S_2 Z_2)\| \leq \|a_{S_2}(Z_1, Z_{12}) \varepsilon(S_2 icE)\|$$

et que la série (1.2) converge normalement dans l'ensemble compact formé des $Z \in \tilde{\mathcal{S}}_n$ telles que

$$(Z_1, Z_{12}) \in W, \quad Z = icE.$$

Il résulte de là que la limite de la série (1.2) peut se calculer terme à terme. Par conséquent, si $\{Z_\nu\} \subset V(W, c)$ est une suite telle que

$$(3.2) \quad Z_{\nu,1} \rightarrow Z_0 \in U_r, \quad Y_{\nu,2} \rightarrow \infty,$$

alors on a

$$(3.3) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} f(Z_\nu) = f_r(Z_0)$$

(où l'on considère $f_r(Z_0)$ comme un élément de $\text{Hom}(F_\mu, F_\rho)$), puisqu'on a visiblement

$$a_{S_2}(Z_1, Z_{12}) \varepsilon(S_2 Z_2) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } S_2 \neq 0, \\ f_r(Z_0) & \text{si } S_2 = 0, \end{cases}$$

(cf. Exposé 4, n° 5, Théorème 2).

Soit maintenant $\{Z_\nu\} \subset U_n$ une suite contenue dans la réunion $\bigcup_i M_i \bar{\Omega}_n$ d'un nombre fini des transformés de $\bar{\Omega}_n$ (par Γ), et convergente vers $Z_0 \in U_r$

au sens de n'importe quelle topologie satisfaisant aux conditions 1°, 2° ; alors il est clair que la condition (3.2) est remplie et par suite, on a (3.3) ; on a ainsi établi la continuité de Φ_r^n dans $\bigcup_i M_i \Omega_n^*$.

Si de plus la représentation ρ est de dimension 1, on peut démontrer la continuité de Φ_r^n au sens de $\mathcal{C}_0^\Gamma$; cela veut dire que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage $\tilde{U}'$ de Z_0 au sens de $\mathcal{C}_0^\Gamma$ tel qu'on ait $\|f(Z) - f_r(Z_0)\| < \varepsilon$ pour toute $Z \in \tilde{U}' \cap U_n$. En effet, soit $Z_0 \in \Omega_r$ et soit $\tilde{U}' = \Gamma_{Z_0} U'$, où U' est un voisinage de Z_0 dans Ω_n^* ; il existe un nombre fini de $M_i \in \Gamma_{Z_0}$ tels que $\Gamma_{Z_0} = \bigcup_i (\Gamma \cap \Gamma' \mathcal{M}_r^n) M_i$; d'après ce qui précède on peut prendre, pour ε donné, U' tel qu'on ait $\|f(Z) - f_r(Z_0)\| < \varepsilon$ pour $Z \in \bigcup_i M_i U' \cap U_n$; or chaque $Z \in \tilde{U}' = \Gamma_{Z_0} U'$ s'écrit $Z' = MZ$, $M \in \Gamma' \cap \mathcal{M}_r^n$, $Z \in \bigcup_i M_i U'$; donc d'après (1.3), (1.4) on a

$$\begin{aligned} \|f(Z') - f_r(Z_0)\| &= \|\rho(U)^{-1} \circ f(Z) \circ \mu(M)^{-1} - f_r(Z_0)\| \\ &= \|f(Z) - \rho(U) \circ f_r(Z_0) \circ \mu(M)\| \\ &= \|f(Z) - f_r(Z_0)\| \end{aligned}$$

puisque $\mu(M)$ est unitaire et que $\rho(U) = \det(U)^{\alpha_n} = \pm 1$.

Transitivité de Φ_r^n : Soit $s < r < n$ et $U_s \neq \emptyset$; alors il est facile de voir, soit par la comparaison des coefficients des séries de Fourier, soit par la continuité ci-dessus, la relation

$$(3.4) \quad \Phi_s^r \Phi_r^n f = \Phi_s^n f$$

pour $f \in \mathcal{H}_{\Gamma', U_n}(\mu, \rho)$, où l'on considère $\Phi_r^n f, \dots$, comme des fonctions à valeurs dans $\text{Hom}(F_\mu, F_\rho)$. (Si $r = 1$, $s = 0$, $\Phi_1^n f$ est nécessairement bornée.)

On a d'ailleurs les relations suivantes :

$$(3.5) \quad (\Gamma_r')_s \subset \Gamma_s'$$

$$(3.6) \quad (F_\rho^{(r)})^{(s)} \supset F_\rho^{(s)}, \quad \rho^{(s)} = \text{restriction de } (\rho^{(r)})^{(s)} \text{ à } F_\rho^{(s)}$$

(($\rho^{(r)}$)^(s) étant irréductible, on a $(F_\rho^{(r)})^{(s)} = F_\rho^{(s)}$, sauf dans le cas où $(F_\rho^{(r)})^{(s)} \neq \{0\}$, $F_\rho^{(s)} = \{0\}$, i.e. le cas où $\alpha_{s+1} = \dots = \alpha_{r-1} = 0$, $\alpha_r \neq 0$, $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_{n-1} = 0$)

(3.7) $N_{\mu^{(r)}}^{(s)} \subset N_{\mu}^{(s)} / N_{\mu}^{(r)}$, de sorte qu'il existe une projection canonique

$$p : F_{(\mu^{(r)})}^{(s)} = F_{\mu^{(r)}}^{(s)} / N_{\mu^{(r)}}^{(s)} \rightarrow F_{\mu^{(s)}} = F_{\mu} / N_{\mu}^{(s)}.$$

En tenant compte de ces situations, la transitivité (3.4) signifie, plus précisément, la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} F_{(\mu^{(r)})}^{(s)} & \xrightarrow{p} & F_{\mu^{(s)}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\Phi_s^r(\Phi_r^n f))(Z^{(s)}) & & (\Phi_s^n f)(Z^{(s)}) \\ F_{(\rho^{(r)})}^{(s)} & \supset & F_{\rho^{(s)}} \end{array}$$

Si l'on écrit $\tilde{\Phi}$ au lieu de Φ_{n-1}^n (ce qui est la définition originale de Φ), on peut écrire $\tilde{\Phi}^{n-r}$ au lieu de Φ_r^n .

4. Définition de l'opération $\tilde{\Phi}_r^n(f|M)$.

Pour compléter la définition de $\tilde{\Phi}$ dans le cas d'un groupe commensurable au groupe modulaire, il faut encore définir l'opérateur $\tilde{\Phi}_r^n(f|M)$ pour $M \in \tilde{\Gamma}$, qui applique $\tilde{\mathcal{H}}_{\Gamma', U_n}(\mu, \rho)$ dans $\tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{\omega}_r(M^{-1}\Gamma'M \cap \mathcal{C}_r^n), M^{-1}U \cap \tilde{\Sigma}_r}(\mu_M^{(r)}, \rho^{(r)})$, où $\mu_M^{(r)}$ est un multiplicateur de $\tilde{\omega}_r(M^{-1}\Gamma'M \cap \mathcal{C}_r^n)$ défini ci-dessous.

Pour cela, attachons à chaque $M \in \tilde{\Gamma}$ un espace vectoriel F_{μ_M} et un isomorphisme

$$(4.1) \quad \sigma_M : F_{\mu_M} \rightarrow F_{\mu};$$

on peut définir alors un multiplicateur μ_M de $M^{-1}\Gamma'M$ dans F_{μ_M} par

$$(4.2) \quad \mu_M(M^{-1}M'M) = \sigma_M^{-1} \circ \mu(M') \circ \sigma_M \quad (M' \in \Gamma');$$

on suppose qu'on a

$$(4.3) \quad \sigma_{M'M} = \mu(M') \circ \sigma_M \quad \text{pour } M' \in \Gamma',$$

ce qui implique que l'espace vectoriel F_{μ_M} et le multiplicateur μ_M ci-dessus ne dépendent que de la classe de M modulo à gauche Γ' .

On pose

$$(4.4) \quad (f|M)(Z) = \rho(CZ + D)^{-1} \circ f(MZ) \circ \sigma_M$$

pour $f \in \tilde{\mathcal{H}}_{\Gamma', U_n}(\mu, \rho)$; alors il est immédiat que

$$(4.5) \quad f|M \in \tilde{\mathcal{H}}_{M^{-1}\Gamma'M, M^{-1}U_n}(\mu_M, \rho)$$

de sorte qu'on a

$$(4.6) \quad \tilde{\Phi}_r^n(f|M) \in \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{\omega}_r(M^{-1}\Gamma'M \cap \mathcal{C}_r^n), M^{-1}U \cap \tilde{\Sigma}_r}(\mu_M^{(r)}, \rho^{(r)}).$$

D'après l'hypothèse (4.3), $f|M$ et donc $\Phi_r^n(f|M)$ ne dépendent que de la classe de M modulo à gauche Γ' .

$$\text{Soit maintenant } L = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & B_{12} \\ A_{21} & A_2 & B_{21} & B_2 \\ C_1 & 0 & D_1 & D_{12} \\ 0 & 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix} \in \tilde{\Gamma} \cap \mathcal{G}_r^n, \quad L_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} = \mathcal{W}_r(L);$$

alors il est clair que

$$\mathcal{W}_r(L^{-1} M^{-1} \Gamma' M L \cap \mathcal{G}_r^n) = L_1^{-1} (M^{-1} \Gamma' M \cap \mathcal{G}_r^n) L_1, \quad L^{-1} M^{-1} U \cap \mathcal{S}_r = L_1^{-1} (M^{-1} U \cap \mathcal{S}_r).$$

D'autre part, considérons l'isomorphisme

$$\det(D_2)^{-\alpha_n} \sigma_M^{-1} \circ \sigma_{ML} : F_{\mu_{ML}} \longrightarrow F_{\mu_M};$$

comme $L^{-1} M^{-1} \Gamma' M L \cap \mathcal{G}_r^n = L^{-1} (M^{-1} \Gamma' M \cap \mathcal{G}_r^n) L$, on voit facilement que cet isomorphisme applique $N_{\mu_{ML}}^{(r)}$ sur $N_{\mu_M}^{(r)}$, ce qui donne l'isomorphisme induit

$$(4.7) \quad F_{\mu_{ML}}^{(r)} = F_{\mu_{ML}} / N_{\mu_{ML}}^{(r)} \longrightarrow F_{\mu_M}^{(r)} = F_{\mu_M} / N_{\mu_M}^{(r)};$$

il est clair d'après la définition que, si l'on attache à $L_1 = \mathcal{W}_r(L)$ cet isomorphisme induit, le multiplicateur de $L_1^{-1} \mathcal{W}_r(M^{-1} \Gamma' M \cap \mathcal{G}_r^n) L_1$ défini d'une manière analogue à (4.2) est précisément $\mu_{ML}^{(r)}$. De façon précise, soit $L_0 \in \tilde{\Gamma} \cap \mathcal{M}_r^n$; comme on a pour les isomorphismes (4.7) un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F_{\mu_{ML}}^{(r)} & \xrightarrow{\quad} & F_{\mu_M}^{(r)} \\ \uparrow & \nearrow & \\ F_{\mu_{ML} L_0}^{(r)} & & \end{array},$$

on peut identifier tous les espaces $F_{\mu_{ML}}^{(r)}$ tels que $\mathcal{W}_r(L) = L_1$ avec un seul espace noté $F_{(\mu_M^{(r)})_{L_1}}$, et désigner par $\sigma_{L_1}^{(M)}$ l'isomorphisme

$$F_{(\mu_M^{(r)})_{L_1}} \longrightarrow F_{\mu_M}^{(r)}$$

défini par (4.7) ; alors on a

$$(4.8) \quad (\mu_{ML})^{(r)} = (\mu_M^{(r)})_{L_1} ;$$

on constate facilement que le système $F_{(\mu_M^{(r)})_{L_1}}, \sigma_{L_1}^{(M)} (L_1 \in \tilde{\Gamma}_r)$ vérifie la même condition que (4.3) pour $\varpi_r(M^{-1}\Gamma_M \cap \mathbb{G}_r^n)$ et $\mu_M^{(r)}$.

Cela dit, on pose

$$(4.9) \quad (g|_{L_1})(Z_1) = \rho^{(r)}(C_1 Z_1 + D_1)^{-1} \circ g(L_1 Z_1 \circ \sigma_{L_1}^{(M)})$$

pour $g \in \mathcal{H}_{\varpi_r(M^{-1}\Gamma_M \cap \mathbb{G}_r^n), M^{-1}U \cap \tilde{\Sigma}_r}(\mu_M^{(r)}, \rho^{(r)})$, $L_1 \in \tilde{\Gamma}_r$; alors par le raisonnement du n° 2 on constate facilement la relation

$$(4.10) \quad \Phi_r^n(f|ML) = \Phi_r^n(f|M)|_{L_1}$$

pour $f \in \mathcal{H}_{\tilde{\Gamma} \cap U_n}(\mu, \rho)$, $L \in \tilde{\Gamma} \cap \mathbb{G}_r^n$; cette relation montre que l'opérateur $\Phi_r^n(f|M)$ ne dépend essentiellement que de la classe de M modulo à droite $\tilde{\Gamma} \cap \mathbb{G}_r^n$.

Soit donc

$$\tilde{\Gamma} = \bigcup_{\lambda} \Gamma_{r,\lambda} (\tilde{\Gamma} \cap \mathbb{G}_r^n),$$

et soient

$$U_{r,\lambda} = M_{r,\lambda}^{-1} U \cap \tilde{\Sigma}_r,$$

$$\Gamma'_{r,\lambda} = \varpi_r(M_{r,\lambda}^{-1} \Gamma_{r,\lambda} \cap \mathbb{G}_r^n) ;$$

alors $U_{r,\lambda}$ est $\Gamma'_{r,\lambda}$ -saturé et on a la décomposition en somme directe

$$(4.11) \quad U = \bigcup_{r,\lambda} \Gamma'_{r,\lambda} U_{r,\lambda} ;$$

en faisant usage de cette représentation, on pose

$$(4.12) \quad f_{r,\lambda} = \Phi_{r,\lambda}^n f = \Phi_r^n(f|M_{r,\lambda})$$

pour $f \in \tilde{\Gamma}'_{U_n}(\mu, \rho)$; alors on a

$$(4.13) \quad f_{r,\lambda} \in \tilde{\Gamma}'_{r,\lambda, U_{r,\lambda}}(\mu_{r,\lambda}, \rho^{(r)}),$$

où l'on pose $\mu_{r,\lambda} = \mu_{M_{r,\lambda}}^{(r)}$.

Or si l'on remplace F_{μ_M}, σ_M par un autre système $F_{\mu'_M}, \sigma'_M$, on aura l'isomorphisme

$$\tau_M = \sigma'^{-1}_M \circ \sigma_M : F_{\mu_M} \longrightarrow F_{\mu'_M}$$

qui applique $N_{\mu_M}^{(r)}$ sur $N_{\mu'_M}^{(r)}$ pour tout r et donc induit un isomorphisme

$$\tau_M^{(r)} : F_{\mu_M}^{(r)} \longrightarrow F_{\mu'_M}^{(r)}.$$

En désignant par $f|_M$ l'opérateur défini comme (4.4) par σ'_M , on obtiendra les relations

$$f|_M = (f|'_M) \circ \tau_M, \quad \tilde{\Phi}_r^n(f|_M) = (\tilde{\Phi}_r^n(f|'_M)) \circ \tau_M^{(r)};$$

ce qui montre que toutes les définitions ci-dessus ne dépendent pas essentiellement du choix du système F_{μ_M}, σ_M .

Dans le cas particulier où le multiplicateur μ est trivial, on peut poser $F_{\mu_M} = F_{\mu} = C$ et $\sigma_M =$ identité ; alors $(f|_M)(Z) = \rho(CZ + D)^{-1} \circ f(MZ) \in F_p$ et $\tilde{\Phi}_r^n(f|_M)(Z_1) \in F_{\rho(r)}$. Or on a $F_{\mu_M}^{(r)} = C$ ou $\{0\}$, et c'est nul si et seulement s'il existe une $M \in M^{-1} \Gamma'_M \cap \tilde{\Phi}_r^n \mu_M^{\alpha_n}$ telle que $\det(D_2'')^{\alpha_n} = -1$; s'il en est ainsi, $\tilde{\Phi}_r^n(f|_M)$ est identiquement nulle. D'après ce que nous avons dit cette alternative ne dépend que de la classe de M à gauche modulo Γ' et à droite modulo $\tilde{\Gamma} \cap \tilde{\Phi}_r^n$; en posant $\sigma_{L_1}^{(M)} =$ identité dans (4.9) on obtient toujours la relation (4.10).

Transitivité de $\tilde{\Phi}_{r,\lambda}^n$: Soit $s < r < n$ et soient

$$\tilde{\Gamma}_r = \bigcup_{s,\lambda} \Gamma'_{r,\lambda} M_{s,\lambda}^{(r,\lambda)} (\tilde{\Gamma}_r \cap \mathcal{G}_s^r),$$

$$\begin{aligned}
U_{s,\nu}^{(r,\lambda)} &= M_{s,\nu}^{(r,\lambda)-1} (M_{r,\lambda}^{-1} U \cap \xi_r^*) \cap \xi_s \\
&= \iota_n(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)})^{-1} M_{r,\lambda}^{-1} U \cap \xi_s, \\
(\Gamma'_{r,\lambda})_{s,\nu} &= \varpi_s(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)-1} \Gamma'_{r,\lambda} M_{s,\nu}^{(r,\lambda)} \cap \mathbb{G}_s^r) \\
&= \varpi_s(\iota_n(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)})^{-1} M_{r,\lambda}^{-1} \Gamma'_{r,\lambda} M_{r,\lambda} \iota_n(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)}) \cap \mathbb{G}_r^n \cap \mathbb{G}_s^n),
\end{aligned}$$

alors $U_{s,\nu}^{(r,\lambda)}$ est $(\Gamma'_{r,\lambda})_{s,\nu}$ -saturé et on a

$$M_{r,\lambda}^{-1} U \cap \xi_r^* = \bigcup_{s,\nu} \Gamma'_{r,\lambda} M_{s,\nu}^{(r,\lambda)} U_{s,\nu}^{(r,\lambda)};$$

on pose pour $g \in \mathcal{H}_{\Gamma'_{r,\lambda}, U_{r,\lambda}}(\mu_{r,\lambda}, \rho^{(r)})$

$$(4.14) \quad \Phi_{s,\nu}^{r,\lambda} g = \Phi_s^r (g|_{M_{s,\nu}^{(r,\lambda)}}) \in \mathcal{H}_{(\Gamma'_{r,\lambda})_{s,\nu}, U_{s,\nu}^{(r,\lambda)}}((\mu_{r,\lambda})_{s,\nu}, (\rho^{(r)})(s)).$$

Or, si $(\lambda, \nu) \rightarrow \mu$, i.e. s'il y a $M' \in \Gamma'$, $L \in \tilde{\Gamma} \cap \mathbb{G}_s^n$ telles que

$$M_{r,\lambda} M_{s,\nu}^{(r,\lambda)} = M' M_{s,\mu} L,$$

on a

$$\begin{aligned}
(4.15) \quad U_{s,\nu}^{(r,\lambda)} &= \varpi_s(L)^{-1} U_{s,\mu}, \\
(\Gamma'_{r,\lambda})_{s,\nu} &\subset \varpi_s(L)^{-1} \Gamma'_{s,\mu} \varpi_s(L);
\end{aligned}$$

on va montrer la relation suivante

$$(4.16) \quad \Phi_{s,\nu}^{r,\lambda} (\Phi_{r,\lambda}^n f) = (\Phi_{s,\mu}^n f) | \varpi_s(L);$$

en effet, d'après la définition et (3.4), (4.10) on a

$$\begin{aligned}
\Phi_{s,\nu}^{r,\lambda} (\Phi_{r,\lambda}^n f) &= \Phi_s^r (\Phi_r^n (f|_{M_{r,\lambda}}) |_{M_{s,\nu}^{(r,\lambda)}}) \\
&= \Phi_s^r (\Phi_r^n (f|_{M_{r,\lambda}} \cdot \iota_n(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)}))) \\
&= \Phi_s^n (f|_{M_{s,\mu}} L) \\
&= \Phi_s^n (f|_{M_{s,\mu}}) | \varpi_s(L) \\
&= (\Phi_{s,\mu}^n f) | \varpi_s(L).
\end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

La généralisation de l'opérateur Φ donnée dans cet exposé se trouve partiellement dans :

- [1] KOECHER (Max). - Zur Theorie der Modulfunktionen n -ten Grades, I., Math. Z., t. 59, 1954, p. 399-416.
 - [2] SATAKE (Ichiro). - On the compactification of the Siegel space, J. Indian math. Soc., new Series, t. 20, 1956, p. 259-281.
 - [3] SATAKE (Ichiro). - On Siegel's modular functions, Proceedings of the international Symposium on algebraic number theory, Tokyo and Nikko 1955. - Tokyo, Science Council of Japan, 1956 ; p. 107-129.
-