

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

ICHIRO SATAKE

Compactification des espaces quotients de Siegel, II

Séminaire Henri Cartan, tome 10, n° 2 (1957-1958), exp. n° 13, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_2_A4_0

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1957-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPACTIFICATION DES ESPACES QUOTIENTS DE SIEGEL, II.

par Ichiro SATAKE

Dans cet exposé on va considérer le cas des groupes commensurables au groupe modulaire. Les notations Γ , $\mathbb{G}_r^n$, Ω_n^* , $\mathcal{S}_n^*$, ..., sont les mêmes que dans l'exposé précédent.

1. Considérations supplémentaires sur l'espace $\mathcal{S}_n^*$.

Soit $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_n$ le "groupe des transformations" de $\tilde{\Gamma} = \text{Sp}(n, \mathbb{Z})$, i.e. $\tilde{\Gamma} = \text{Sp}(n, \mathbb{Q})$; montrons d'abord que l'on peut faire opérer $\tilde{\Gamma}$ sur l'espace $\mathcal{S}_n^*$.

Pour cela considérons l'ensemble $\tilde{\mathcal{S}}_n^*$ construit par la même méthode que celle de l'exposé 12, n° 2, mais en se servant de $\tilde{\Gamma}$ au lieu de Γ , c'est-à-dire l'ensemble des points $\tilde{M}.Z$ (classes des couples $(\tilde{M}, Z)$) avec $\tilde{M} \in \tilde{\Gamma}$, $Z \in \mathcal{S}_r$ ($0 \leq r \leq n$); on peut supposer de plus que $\tilde{\mathcal{S}}_n^*$ est muni d'une topologie satisfaisant aux conditions 1° et :

2° les opérations de $\tilde{M} \in \tilde{\Gamma}$ dans $\tilde{\mathcal{S}}_n^*$ sont continues (par exemple, considérer la topologie la plus fine satisfaisant aux conditions 1°, 2°, définie comme dans l'exposé précédent, n° 3); $\tilde{\mathcal{S}}_n^*$ contient alors $\mathcal{S}_n^*$ (comme sous-ensemble); mais en fait ils coïncident. En effet, pour chaque $\tilde{M} \in \tilde{\Gamma}$, il existe un nombre fini de $M_i \in \Gamma$ telles que $\tilde{M}\Omega_n \subset \bigcup_i M_i\Omega_n$ (parce que Ω_n est un "ouvert fondamental" pour un groupe "minkowskien" Γ); la topologie de $\mathcal{S}_n^*$ induisant sur $\mathcal{S}_n^*$ une topologie satisfaisant aux conditions 1°, 2°, on obtient en prenant l'adhérence par rapport à cette topologie (que l'on notera par * , notation qui ne se contredit pas avec la notation Ω_n^*), $\tilde{M}\Omega_n^* = (\tilde{M}\Omega_n)^* \subset \bigcup_i M_i\Omega_n^*$, d'où $\tilde{\mathcal{S}}_n^* = \tilde{\Gamma}\Omega_n^* \subset \Gamma\Omega_n^* = \mathcal{S}_n^*$; donc on a $\tilde{\mathcal{S}}_n^* = \mathcal{S}_n^*$. Puisque $\tilde{\mathcal{S}}_n^* = \mathcal{S}_n^*$, on peut considérer $\tilde{\Gamma}$ comme opérant sur $\mathcal{S}_n^*$.

Or si l'on décompose $\tilde{\Gamma}$ en classes à droite suivant $\tilde{\Gamma} \cap \mathbb{G}_r^n$, on aura une décomposition directe de l'espace $\mathcal{S}_n^*$ semblable à (2.3) dans l'exposé précédent; le fait que $\tilde{\mathcal{S}}_n^* = \mathcal{S}_n^*$ signifie alors qu'on peut prendre comme représentants des classes de $\tilde{\Gamma}/\tilde{\Gamma} \cap \mathbb{G}_r^n$ des éléments de $\tilde{\Gamma}$; cela veut dire que

$$(1.1) \quad \tilde{\Gamma} = \Gamma \cdot (\tilde{\Gamma} \cap \mathbb{G}_r^n) \quad (0 \leq r \leq n).$$

Ce fait a déjà été signalé par KOECHER [2] dans le cas particulier $r = 0$ (et

non seulement pour Γ , mais aussi pour tous les groupes satisfaisant à certaines conditions).

Les opérations de $\tilde{M} \in \tilde{\Gamma}$ sont continues par rapport à $\mathcal{C}^\Gamma$. En effet, soit F un fermé de $\tilde{S}_n^*$ au sens de $\mathcal{C}^\Gamma$; on va montrer que pour toute $\tilde{M} \in \tilde{\Gamma}$, $\tilde{M}F$ l'est aussi, c'est-à-dire que $M\tilde{M}F \cap \Omega_n^*$ est fermé pour toute $M \in \Gamma$. Or il existe un nombre fini de $M_i \in \Gamma$ telles que $(M\tilde{M})^{-1}\Omega_n^* \subset \bigcup_i M_i\Omega_n^*$; alors $M\tilde{M}F \cap \Omega_n^* = \bigcup_i M\tilde{M}M_i(M_i^{-1}F \cap \Omega_n^*) \cap \Omega_n^*$ et, $M_i^{-1}F \cap \Omega_n^*$ étant fermé, ce dernier est fermé à cause de la "continuité" de $M\tilde{M}M_i$ dans Ω_n^* (ceci résulte du lemme 1 de l'exposé précédent). Les opérations de $\tilde{M} \in \tilde{\Gamma}$ sont encore continues par rapport à $\mathcal{C}_0^\Gamma$. Il suffira de montrer que si U est un $\mathcal{C}^\Gamma$ -voisinage de x , Γ_x -saturé, alors $\tilde{M}U$ ($\tilde{M} \in \tilde{\Gamma}$) contient un $\mathcal{C}^\Gamma$ -voisinage de $\tilde{M}x$, $\tilde{\Gamma}_{\tilde{M}x}$ -saturé. Cela résulte immédiatement du fait que $\tilde{M}U$ est $\tilde{M}\Gamma_x\tilde{M}^{-1}$ -saturé et que $\tilde{M}\Gamma_x\tilde{M}^{-1} = (\tilde{M}\Gamma\tilde{M}^{-1})_{\tilde{M}x}$ est commensurable à $\tilde{\Gamma}_{\tilde{M}x}$.

Soit maintenant $\Gamma' = \Gamma'_n$ un groupe commensurable à Γ ; alors il existe un nombre fini de $M_i \in \Gamma$ telles que

$$(1.2) \quad \Omega'_n = \bigcup_i M_i \Omega_n$$

soit un ouvert fondamental pour Γ' (on prend, par exemple, M_i telles que $\Gamma = \bigcup_i (\Gamma \cap \Gamma')M_i$). On a alors $\tilde{S}_n^* = \Gamma'(\Omega'_n)^*$ (* désignant l'adhérence par rapport à n'importe quelle topologie satisfaisant aux conditions 1°, 2°). En effet, pour chaque $M \in \Gamma$, il existe un nombre fini de $M'_j \in \Gamma'$ telles que $M\Omega_n \subset \bigcup_j M'_j\Omega'_n$; donc $M\Omega_n^* \subset \bigcup_j M'_j(\Omega'_n)^*$, d'où $\tilde{S}_n^* = \Gamma\Omega_n^* \subset \Gamma'(\Omega'_n)^*$.

Cela dit, considérons les conditions 1', 2', 3', 4' qui se déduisent des conditions 1°, 2°, 3°, 4° respectivement, en remplaçant Γ , Ω_n^* par Γ' , Ω'_n^* (la topologie "naturelle" de Ω'_n^* sera celle induite dans Ω'_n^* par n'importe quelle topologie de $\tilde{S}_n^*$ satisfaisant aux conditions 1°, 2°). Il est clair que $\mathcal{C}^\Gamma$ satisfait aux conditions 1', 2'. Réciproquement, on peut définir la topologie $\mathcal{C}^{\Gamma'}$ de $\tilde{S}_n^*$, comme la plus fine des topologies satisfaisant aux conditions 1', 2' (on procède comme dans l'exposé précédent, n° 3); alors $\mathcal{C}^{\Gamma'}$ satisfait aux conditions 1°, 2° (la "continuité" des opérations de $\tilde{M} \in \tilde{\Gamma}$ dans Ω_n^*); donc $\mathcal{C}^\Gamma = \mathcal{C}^{\Gamma'}$. On constate alors le même raisonnement que plus haut que le système des $\mathcal{C}^{\Gamma'}$ -voisinages Γ'_x -saturés de x est équivalent au système des $\mathcal{C}^\Gamma$ -voisinages Γ_x -saturés de x ; donc, si on définit la topologie $\mathcal{C}_0^{\Gamma'}$ de la même manière que $\mathcal{C}_0^\Gamma$, on a $\mathcal{C}_0^{\Gamma'} = \mathcal{C}_0^\Gamma$. Or il est facile de voir que $\mathcal{C}_0^{\Gamma'} = \mathcal{C}_0^\Gamma$ satisfait aux conditions 1', 2', 3', 4'; la condition 3' se démontre comme suit: soient $x, x' \in \tilde{S}_n^*$ deux points non équivalents par rapport à Γ' ,

soit $\Gamma' = \bigcup_i (\Gamma \cap \Gamma') M_i'$ et soient, pour chaque i , U_i , U_i' des voisinages de x , $M_i'^{-1} x'$ respectivement tels que $\Gamma U_i \cap U_i' = \emptyset$ si x , $M_i'^{-1} x'$ ne sont pas équivalents par rapport à Γ , et que $((\Gamma - \Gamma_x) U_i) \cap U_i = \emptyset$, $U_i' = M U_i$, si $M_i'^{-1} x' = Mx$ avec $M \in \Gamma$; alors, comme $\Gamma' \cap M \Gamma_x = \emptyset$, on a $((\Gamma \cap \Gamma') U_i) \cap U_i' = \emptyset$; donc en posant $U = \bigcap_i U_i$, $U' = \bigcap_i M_i' U_i'$, on a $(\Gamma' U) \cap U' = \emptyset$. Il s'ensuit que $\mathcal{C}^\Gamma$ satisfait à la condition 3'; on peut démontrer aussi par le même raisonnement que dans l'exposé précédent l'unicité de la topologie satisfaisant aux conditions 1', 2', 3', 4'.

On s'occupera désormais exclusivement de la topologie $\mathcal{C}_0^\Gamma = \mathcal{C}_0^{\Gamma'}$; les résultats obtenus ci-dessus s'énoncent comme suit :

THÉOREME 1. - Les opérations de $\tilde{M} \in \tilde{\Gamma}$ dans S_n^* sont continues par rapport à $\mathcal{C}_0^\Gamma$. Pour tout groupe Γ' commensurable au groupe Γ , $\mathcal{C}_0^{\Gamma'}$ satisfait aux conditions 1', 2', 3', 4' et est entièrement caractérisée par ces conditions.

2. La structure des espaces compactifiés $\Gamma' \backslash S_n^*$.

D'abord il est clair que le théorème 1 entraîne le suivant :

THÉOREME 2. - L'espace quotient $\Gamma' \backslash S_n^*$ est séparé et compact.

Si Γ'' est un sous-groupe d'indice fini de Γ' , il existe visiblement une application canonique

$$(2.1) \quad \pi_{\Gamma', \Gamma''}: \Gamma'' \backslash S_n^* \rightarrow \Gamma' \backslash S_n^*$$

qui est un "revêtement ramifié" (comme on le précisera plus loin); $\pi_{\Gamma', \Gamma''}$ est continue, c'est une application qui transforme les ouverts en ouverts, et les fermés en fermés. Si de plus Γ'' est un sous-groupe invariant de Γ' , alors $\Gamma'' \backslash S_n^*$ est "galoisien" sur $\Gamma' \backslash S_n^*$, ce qui veut dire que le groupe fini Γ'/Γ'' opère sur $\Gamma'' \backslash S_n^*$, et l'on a

$$(2.2) \quad (\Gamma'/\Gamma'') \backslash (\Gamma'' \backslash S_n^*) = \Gamma' \backslash S_n^* .$$

On va étudier maintenant la structure de l'espace $\Gamma' \backslash S_n^*$. Pour cela décomposons Γ dans les classes doubles à gauche suivant Γ' et à droite suivant $\tilde{\Gamma} \cap \mathcal{C}_r^n$, comme suit :

$$(2.3) \quad \tilde{\Gamma} = \bigcup_{r, \lambda} \Gamma M_{r, \lambda} (\tilde{\Gamma} \cap \mathcal{C}_r^n) ,$$

où il n'existe qu'un nombre fini de classes en vertu de (1.1) ; on a alors la décomposition correspondante de S_n^* :

$$(2.4) \quad S_n^* = \bigcup_r \bigcup_{\lambda} \Gamma_{r,\lambda}^M \tilde{S}_r^* ,$$

et par conséquent on a

$$\Gamma' \backslash S_n^* = \bigcup_r \bigcup_{\lambda} \Gamma' \backslash \Gamma_{r,\lambda}^M \tilde{S}_r^* ;$$

or si l'on pose

$$(2.5) \quad \Gamma'_{r,\lambda} = \varpi_r(M_{r,\lambda}^{-1} \Gamma'_{r,\lambda} \wedge \mathbb{G}_r^n) ,$$

il est facile de voir que $\Gamma'_{r,\lambda}$ est un sous-groupe discret de $\text{Sp}(r, \mathbb{R})$ commensurable à Γ_r et que l'espace quotient $\Gamma' \backslash \Gamma_{r,\lambda}^M \tilde{S}_r^*$ s'identifie canoniquement à $\Gamma'_{r,\lambda} \backslash \tilde{S}_r^*$; donc la relation précédente s'écrit

$$(2.6) \quad \Gamma' \backslash S_n^* = \bigcup_{r,\lambda} \Gamma'_{r,\lambda} \backslash \tilde{S}_r^*$$

Il y a lieu de remarquer si l'on pose dans (1.2) $M_i = M'_i M_{r,\lambda i} L_i$, $M'_i \in \Gamma'$, $L_i \in \tilde{\Gamma} \cap \mathbb{G}_r^n$, alors

$$(2.7) \quad \Omega'_{r,\lambda} = \bigcup_{i: \lambda_i = \lambda} \varpi_r(L_i) \Omega_r$$

est un ouvert fondamental pour $\Gamma'_{r,\lambda}$; ceci est une conséquence immédiate du fait que $S_n^* = \Gamma'(\Omega'_n)^*$.

Or on va considérer la relation entre $\Gamma'_{r,\lambda} \backslash \tilde{S}_r^*$ et $\Gamma' \backslash S_n^*$. On note d'abord qu'il existe une injection canonique de $\tilde{S}_r^*$ dans S_n^* définie par

$$M.Z \longrightarrow \iota_n(M).Z \quad (M \in \tilde{\Gamma}_r, Z \in \tilde{S}_s, 0 \leq s \leq r) ,$$

parce que $(M, Z) \sim (M', Z')$ entraîne évidemment $(\iota_n(M), Z) \sim (\iota_n(M'), Z')$ et réciproquement ; cette application, étant visiblement un homéomorphisme pour $\mathcal{C}^\Gamma$ ou pour $\mathcal{C}_0^\Gamma$, nous permet d'identifier $\tilde{S}_r^*$ avec l'adhérence de $\tilde{S}_r$ dans S_n^* .

Or, pour Γ' donné, il existe encore une application $\Psi_{r,\lambda}$ de $\Gamma'_{r,\lambda} \backslash \tilde{S}_r^*$ dans $\Gamma' \backslash S_n^*$ définie par

$$(2.8) \quad \Psi_{r,\lambda} : M.Z \bmod \Gamma'_{r,\lambda} \longrightarrow M_{r,\lambda} \iota_n(M).Z \bmod \Gamma' ,$$

parce que, si $M.Z$, $M'.Z'$ sont équivalents par rapport à $\Gamma'_{r,\lambda}$, il existe $M'_0 \in \Gamma'$ telle que $\varpi_r(M_{r,\lambda}^{-1} M'_0 M_{r,\lambda}) M.Z = M'.Z'$, c'est-à-dire que

$\tilde{M}_0 = M'^{-1} \varpi_r (M_{r,\lambda}^{-1} M'_0 M_{r,\lambda}) M \in \mathcal{G}_s^r$ et $\varpi_s(\tilde{M}_0) Z = Z'$, d'où résulte que $\iota_n(M')^{-1} M_{r,\lambda}^{-1} M'_0 M_{r,\lambda} \iota_n(M) \in \mathcal{G}_s^n$ et $\varpi_s(\iota_n(M')^{-1} M_{r,\lambda}^{-1} M'_0 M_{r,\lambda} \iota_n(M)) = \varpi_s(\tilde{M}_0)$, i.e. que $M_{r,\lambda} \iota_n(M).Z$, $M_{r,\lambda} \iota_n(M').Z'$ sont équivalents par rapport à Γ' .

Comme le diagramme suivant est commutatif, il est clair que l'application $\Psi_{r,\lambda}$ est continue :

$$(2.9) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_r^* & \xrightarrow{M_{r,\lambda}} & \mathcal{S}_n^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma'_{r,\lambda} \backslash \mathcal{S}_r^* & \xrightarrow{\Psi_{r,\lambda}} & \Gamma' \backslash \mathcal{S}_n^* \end{array}$$

mais, comme on le verra tout de suite, elle n'est pas injective en général.

En effet, soit $s < r < n$ et soit

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \tilde{\Gamma}_n &= \bigcup_{\lambda} \Gamma' M_{r,\lambda} (\tilde{\Gamma}_n \cap \mathcal{G}_r^n) \\ &= \bigcup_{\lambda} \Gamma' M_{s,\mu} (\tilde{\Gamma}_n \cap \mathcal{G}_s^n), \\ \tilde{\Gamma}_r &= \bigcup_{\nu} \Gamma'_{r,\lambda} M_{s,\nu}^{(r,\lambda)} (\tilde{\Gamma}_r \cap \mathcal{G}_s^r); \end{aligned}$$

on a alors

$$\tilde{\Gamma}_n \cap \mathcal{G}_r^n = \bigcup_{\nu} (M_{r,\lambda}^{-1} \Gamma' M_{r,\lambda} \cap \mathcal{G}_r^n) \iota_n(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)}) (\tilde{\Gamma}_n \cap \mathcal{G}_r^n \cap \mathcal{G}_s^n),$$

puisque $\tilde{\Gamma}_r = \varpi_r(\tilde{\Gamma}_n \cap \mathcal{G}_r^n)$ et $\varpi_r^{-1}(\mathcal{G}_s^r) = \mathcal{G}_r^n \cap \mathcal{G}_s^n$; donc

$$(2.11) \quad \tilde{\Gamma}_n = \bigcup_{\lambda,\nu} \Gamma' M_{r,\lambda} \iota_n(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)}) (\tilde{\Gamma}_n \cap \mathcal{G}_r^n \cap \mathcal{G}_s^n);$$

ceci est la décomposition de $\tilde{\Gamma}_n$ en classes doubles suivant Γ' et $\tilde{\Gamma}_n \cap \mathcal{G}_r^n \cap \mathcal{G}_s^n$, la décomposition plus fine que la deuxième décomposition de (2.10). On écrit

$$(2.12) \quad (\lambda, \nu) \rightarrow \mu, \text{ si } M_{r,\lambda} \iota_n(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)}) \in \Gamma' M_{s,\mu} (\tilde{\Gamma}_n \cap \mathcal{G}_s^n).$$

Alors l'application $\Psi_{r,\lambda}$ applique

$$\Gamma'_{r,\lambda} \backslash \Gamma'_{r,\lambda} M_{s,\nu}^{(r,\lambda)} \mathcal{S}_s \text{ sur } \Gamma' \backslash \Gamma' M_{r,\lambda} \iota_n(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)}) \mathcal{S}_s = \Gamma' \backslash \Gamma' M_{s,\mu} \mathcal{S}_s,$$

ou, en posant

$$\begin{aligned} (\Gamma'_{r,\lambda})_{s,\nu} &= \varpi_s (M_{s,\nu}^{(r,\lambda)})^{-1} \Gamma'_{r,\lambda} M_{s,\nu}^{(r,\lambda)} \cap \mathcal{G}_s^r, \\ M_{r,\lambda} M_{s,\nu}^{(r,\lambda)} &= M' M_{s,\mu} L, \quad M' \in \Gamma', \quad L \in \tilde{\Gamma}_n \cap \mathcal{G}_s^n, \end{aligned}$$

$\psi_{r,\lambda}$ applique

$$(\Gamma'_{r,\lambda})_{s,\nu} \backslash \tilde{\mathcal{S}}_s \text{ sur } \Gamma'_{s,\mu} \backslash \tilde{\mathcal{S}}_s$$

comme suit :

$$(2.13) \quad \mathbb{Z}(\text{mod } (\Gamma'_{r,\lambda})_{s,\nu}) \rightarrow \mathbb{L} \cdot \mathbb{Z}(\text{mod } \Gamma'_{s,\mu}) ,$$

pour $(\lambda, \nu) \rightarrow \mu$. Or il est bien possible que deux couples distincts (λ, ν) , (λ', ν') (même avec $\lambda = \lambda'$) correspondent à un même μ ; d'autre part, on a

$$\begin{aligned} (\Gamma'_{r,\lambda})_{s,\nu} &= \varpi_s^{(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)})^{-1}} \Gamma'_{r,\lambda} M_{s,\nu}^{(r,\lambda)} \cap \mathcal{G}_s^r \\ &= \varpi_s(\iota_n(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)}))^{-1} M_{r,\lambda}^{-1} \Gamma' M_{r,\lambda} \iota_n(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)}) \cap \mathcal{G}_r^n \cap \mathcal{G}_s^n \\ &\subset \varpi_s(\iota_n(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)}))^{-1} M_{r,\lambda}^{-1} \Gamma' M_{r,\lambda} \iota_n(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)}) \cap \mathcal{G}_s^n \\ &= \varpi_s(L^{-1} M_{s,\mu}^{-1} \Gamma' M_{s,\mu} L \cap \mathcal{G}_s^n) \\ &= \varpi_s(L)^{-1} \Gamma'_{s,\mu} \varpi_s(L) ; \end{aligned}$$

et il est encore bien possible que $(\Gamma'_{r,\lambda})_{s,\nu}$ soit strictement plus petit que $\varpi_s(L)^{-1} \Gamma'_{s,\mu} \varpi_s(L)$. Ces deux possibilités impliquent en général que $\psi_{r,\lambda}$ n'est pas injective.

EXEMPLE. - Considérons le cas du "Hauptkongruenzgruppe" :

$$\Gamma_n(q) = \{M ; M \in \Gamma_n, M \equiv E_n \pmod{q}\} .$$

Dans ce cas tout $\Gamma'_{r,\lambda}$ est égal à $\Gamma_r(q)$ (donc la seconde possibilité :

$(\Gamma'_{r,\lambda})_{s,\nu} \subsetneq \varpi_s(L)^{-1} \Gamma'_{s,\mu} \varpi_s(L)$ n'a pas lieu) ; calculons le nombre $\nu_{n,r}$ de "multiplicité" de $\Gamma_r(q)$. On a évidemment

$$\begin{aligned} \nu_{n,r} &= [\Gamma_n : \Gamma_n(q)(\Gamma_n \cap \mathcal{G}_r^n)] \\ &= [\Gamma_n : \Gamma_n(q)] / [\Gamma_n \cap \mathcal{G}_r^n : \Gamma_n(q) \cap \mathcal{G}_r^n] \\ &= [\Gamma_n : \Gamma_n(q)] / [\Gamma_r : \Gamma_r(q)] \cdot [\Gamma_n \cap \mathcal{M}_r^n : \Gamma_n(q) \cap \mathcal{M}_r^n] , \end{aligned}$$

$\mathcal{M}_r^n$ désignant le noyau de ϖ_r . Or $\mathcal{M}_r^n$ se décompose dans le produit semi-direct comme suit :

$$(2.14) \quad \mathcal{M}_r^n = \mathcal{U}_r^n \cdot \mathcal{C}_r^n ,$$

avec

$$\mathfrak{U}_r^n = \left\{ \begin{pmatrix} t_U & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} ; U = \begin{pmatrix} E_r & U_{12} \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}, \det(U_2) \neq 0 \right\},$$

(2.15)

$$\mathfrak{C}_r^n = \left\{ \begin{pmatrix} E & T \\ 0 & E \end{pmatrix} ; T = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} \\ t_{T_{12}} & T_2 \end{pmatrix}, T_2 : \text{symétrique} \right\},$$

le dernier étant un sous-groupe invariant de $\mathfrak{U}_r^n$. Comme

$$\Gamma_n(q) \cap \mathfrak{U}_r^n = (\Gamma_n(q) \cap \mathfrak{U}_r^n) \cdot (\Gamma_n(q) \cap \mathfrak{C}_r^n)$$

et

$$\begin{aligned} \Gamma_n(q) \cap \mathfrak{U}_r^n &= \left\{ \begin{pmatrix} t_U & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} ; U = \begin{pmatrix} E_r & U_{12} \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} : \text{unimodulaire,} \right. \\ &\quad \left. \equiv E_n(\text{mod } q) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_n(q) \cap \mathfrak{C}_r^n &= \left\{ \begin{pmatrix} E & T \\ 0 & E \end{pmatrix} ; T = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} \\ t_{T_{12}} & T_2 \end{pmatrix} : \text{entière, symétrique,} \right. \\ &\quad \left. \equiv E_n(\text{mod } q) \right\}, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} [\Gamma_n \cap \mathfrak{U}_r^n : \Gamma_n(q) \cap \mathfrak{U}_r^n] &= [\Gamma_n \cap \mathfrak{U}_r^n : \Gamma_n(q) \cap \mathfrak{U}_r^n] \cdot [\Gamma_n \cap \mathfrak{C}_r^n : \Gamma_n(q) \cap \mathfrak{C}_r^n] \\ &= (2) [\gamma_{n-r} : \gamma_{n-r}(q)] q^{r(n-r)} \cdot q^{\frac{(n-r)(n-r+1)}{2} + r(n-r)}, \end{aligned}$$

où $\gamma_{n-r} = \text{SL}(n-r, \mathbb{Z})$, $\gamma_{n-r}(q) = \{U ; U \in \gamma_{n-r}, U \equiv E_{n-r}(q)\}$

et le facteur 2 apparaît lorsque $n-r \geq 1$, $q > 2$. Or il est bien connu que

$$[\gamma_n : \gamma_n(q)] = q^{n^2-1} \prod_{p|q} \prod_{2 \leq k \leq n} (1 - p^{-k}),$$

$$[\Gamma_n : \Gamma_n(q)] = q^{n(2n+1)} \prod_{p|q} \prod_{1 \leq k \leq n} (1 - p^{-2k})$$

Cf. KOECHER [1]). Donc on a

$$\begin{aligned}
 (2.16) \quad \nu_{n,r} &= \frac{q^{n(2n+1) - r(2r+1)} \prod_{p|q} \prod_{r+1 \leq k \leq n} (1 - p^{-2k})}{(2)_q \frac{(n-r)(n-r+1)}{2} + 2r(n-r) + (n-r)^2 - 1 \prod_{p|q} \prod_{2 \leq k \leq n-r} (1 - p^{-k})} \\
 &= q^{\frac{1}{2}(n-r)(n+3r+1)+1} (2)^{-1} \prod_{p|q} \frac{\prod_{r+1 \leq k \leq n} (1 - p^{-2k})}{\prod_{2 \leq k \leq n-r} (1 - p^{-k})}
 \end{aligned}$$

pour $r < n$. Si $s < r < n$, on a donc

$$\frac{\nu_{n,r} \mu_{r,s}}{\nu_{n,s}} = q^{(n-r)(r-s)+1} (2)^{-1} \prod_{p|q} \frac{\prod_{2 \leq k \leq n-s} (1 - p^{-k})}{\prod_{2 \leq k \leq n-r} (1 - p^{-k}) \prod_{2 \leq k \leq r-s} (1 - p^{-k})} > 1,$$

ce qui montre que l'application $\Gamma_r(q) \setminus \tilde{\mathcal{S}}_r^* \rightarrow \Gamma_n(q) \setminus \tilde{\mathcal{S}}_n^*$ n'est certainement pas injective pour $0 < r < n$.

3. Un théorème de connexité

Finalement on ajoute un théorème qui nous sera utile ultérieurement.

THÉOREME 3. - Chaque point de $\tilde{\mathcal{S}}_n^* = \tilde{\mathcal{S}}_n$ possède un système fondamental de $\mathcal{U}_0$ -voisinages qui coupent $\tilde{\mathcal{S}}_n$ suivant un ouvert connexe.

DÉMONSTRATION. - On peut supposer que le point en question est $Z_0 \in \Omega_r$ ($r < n$). Soit U_r un voisinage connexe, $(\Gamma_r)_{Z_0}$ -saturé de Z_0 dans Ω_r et soit $U_s = V^{(s)}(U_r, K)$ ($r \leq s \leq n$) l'ensemble défini dans l'exposé précédent p.3, i.e. l'ensemble des $Z \in \Omega_s$ telles que

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1^{(r)} & Z_{12} \\ {}^t Z_{12} & Z_2 \end{pmatrix} = X + iY, \quad Y = {}^t W D W, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_s \end{pmatrix}$$

avec $Z_1^{(r)} \in U_r$, $d_{r+1} > K$;

alors $U = \bigcup_{r \leq s \leq n} U_s$ est un voisinage de Z_0 dans Ω_n^* et par conséquent $\tilde{U} = \Gamma_{Z_0} U$ est un $\mathcal{C}_0^\Gamma$ -voisinage de Z_0 dans $\mathcal{S}_n^*$. On va montrer que $\tilde{U} = \Gamma_{Z_0} U$ coupe $\mathcal{S}_n$ suivant un ensemble connexe, c'est-à-dire que $\Gamma_{Z_0} U_n$ est connexe. Or il est facile de voir que Γ_{Z_0} est de génération finie (noter que $\Gamma \cap \mathcal{M}_r^n$ est un sous-groupe d'indice fini de Γ_{Z_0} et est de génération finie) ; soit $\{M_i\}$ un système de générateurs de Γ_{Z_0} en nombre fini, et contenant l'identité E ; on peut supposer de plus que M_i a l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$(3.1) \quad M_i = \begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^t U_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_2^{-1} \end{pmatrix}, \quad U_2 : \text{unimodulaire},$$

$$(3.2) \quad M_i = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & B_{12} \\ A_{21} & E_{n-r} & B_{21} & B_2 \\ C_1 & 0 & D_1 & D_{12} \\ 0 & 0 & 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}$$

(en effet, Γ_{Z_0} est un produit semi-direct de sous-groupes formés des matrices de la forme (3.1), (3.2) respectivement, dont le dernier est un sous-groupe invariant). En décomposant $Z' = M_i Z$, $Z \in U_n$ comme ci-dessus, on voit facilement que, si M_i est de la forme (3.2), Z' appartient à $\Omega_n(u')$, où $u' (\geq u)$ ne dépend que de U_r , K , M_i ; donc on a $M_i U_n \subset \Omega_n(u')$ pour u' suffisamment grand. Soit maintenant M_i de la forme (3.1) ; pour une matrice Z_i (quelconque mais fixée) de U_n on peut prendre encore u' tel que $Z'_i = M_i Z_i \in \Omega_n(u')$; dans ce cas, on a les relations

$$\begin{aligned} X'_1 &= X_1, \quad X'_{12} = X_{12} U_2, \quad X'_2 = {}^t U_2 X_2 U_2, \quad W'_1 = W_1, \\ W'_{12} &= W_{12} U_2, \quad D'_1 = D_1, \quad {}^t W'_2 D'_2 W'_2 = {}^t U_2 {}^t W_2 D_2 W_2 U_2; \end{aligned}$$

donc si l'on désigne par $Z_i(\lambda)$, $Z'_i(\lambda)$ les matrices obtenues en remplaçant D_2 , D'_2 par λD_2 , $\lambda D'_2$ ($\lambda \geq 1$) respectivement, dans Z_i

(resp. Z_i^1) , on voit facilement que $Z_i(\lambda) \in U_n$, $Z_i^1(\lambda) \in \Omega_n(u')$,
 $Z_i^1(\lambda) = M_i Z_i(\lambda)$ et donc $Z_i^1(\lambda)$ ($\lambda \geq 1$) appartient à $M_i U_n \cap \Omega_n(u')$. Soit
 u' tel que toutes les conditions ci-dessus soient satisfaites ; définissons un
voisinage $U' = \bigcup_{r \leq s \leq n} U'_s$ de Z_0 dans $\Omega_n(u')^*$ exactement comme ci-dessus
avec $U'_r = U_r$ et avec K' suffisamment grand pour que $U' \subset \tilde{U}$; alors on a
 $M_i U_n \cap U'_n = \emptyset$ pour tout i ; en effet, si M_i est de la forme (3.2), on peut
prendre, pour K' donné, K_1 tel que $M_i V^{(n)}(U_r, K_1) \subset U'_n$; d'autre part,
si M_i est de la forme (3.1) , $Z_i^1(\lambda)$ appartient à $M_i U_n \cap U'_n$ pour λ
suffisamment grand. Alors U_n , U'_n étant connexes, $U_n \cup U'_n$ est connexe, et
 $(U_n \cup U'_n) \cap M_i(U_n \cup U'_n) \neq \emptyset$ pour tout i , d'où résulte la connexité de
 $\Gamma_{Z_0} U_n = \Gamma_{Z_0} (U_n \cup U'_n)$.

BIBLIOGRAPHIE

Les deux résultats de KOECHER cités dans cet exposé se trouvent dans

- [1] KOECHER (Max). - Zur Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, 1, Math. Z., t. 59, 1954, p. 399-416.
- [2] KOECHER (Max). - Zur Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, 2, Math. Z., t. 61, 1955, p. 455-466.