Séminaire Henri Cartan

Ichiro Satake

Compactification des espaces quotients de Siegel, I

Séminaire Henri Cartan, tome 10, nº 2 (1957-1958), exp. nº 12, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_2_A2_0>

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1957-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

3 mars 1958

COMPACTIFICATION DES ESPACES QUOTIENTS DE SIEGEL, I.

par Ichiro SATAKE

Soient $\mathfrak{S}_n$ l'espace de Siegel, Γ_n le groupe modulaire de Siegel ; on se propose de construire une compactification de l'espace quotient $\Gamma_n \backslash \mathfrak{S}_n$. Bien entendu, il y aurait plusieurs possibilités de compactification ; mais, comme on le verra dans ce qui suit, il serait naturel de considérer une compactification de la forme

$$(\Gamma_n \backslash \mathfrak{S}_n)^* = \Gamma_n \backslash \mathfrak{S}_n \cup \Gamma_{n-1} \backslash \mathfrak{S}_{n-1} \cup \dots \cup \Gamma_0 \backslash \mathfrak{S}_0 ;$$

où $\mathfrak{S}_0$ désigne un espace composé d'un seul point, et Γ_0 un groupe composé seulement de l'élément neutre. Le but de cet exposé est de donner la construction topologique de cette compactification. On montrera ensuite, dans les exposés suivants, que $(\Gamma_n \backslash \mathfrak{S}_n)^*$, muni d'une structure d'espace annelé définie canoniquement, est un espace analytique normal qui est réalisable comme une sous-variété algébrique normale dans un espace projectif ; on considèrera en même temps les problèmes correspondants pour tous les groupes commensurables au groupe Γ_n.

Pour mettre en évidence notre méthode, rappelons le cas $n = 1$; dans ce cas, il est bien connu que le domaine fondamental classique pour Γ_1 possède un seul point " parabolique" (point à l'infini), de sorte que l'espace quotient $\Gamma_1 \backslash \mathfrak{S}_1$ se compactifie par l'adjonction d'un seul point P_∞ correspondant à ce point, ou plus précisément à la classe de ce point ; l'espace compactifié, $(\Gamma_1 \backslash \mathfrak{S}_1)^*$ est une surface de Riemann compacte, dont un paramètre local au point P_∞ est donné par $e^{2\pi i z}$ qui applique la partie $y > c$ du demi-plan $\mathfrak{S}_1$ sur un voisinage de P_∞ dans $(\Gamma_1 \backslash \mathfrak{S}_1)^*$. Or les transformés du point à l'infini par Γ_1 ne sont autres que les points rationnels sur l'axe réel et les transformés de la partie $y > c$ sont des horicycles (i.e. des cycles tangents à l'axe réel) à ces points. Donc la compactification $(\Gamma_1 \backslash \mathfrak{S}_1)^*$ s'obtiendra par le procédé suivant : considérer d'abord l'espace $\mathfrak{S}_1^*$ qui est une somme directe du demi-plan $\mathfrak{S}_1$ et de tous les points rationnels, y introduire une topologie en prenant les horicycles comme voisinages des points rationnels, et prendre l'espace quotient $\Gamma_1 \backslash \mathfrak{S}_1^*$ de $\mathfrak{S}_1^*$ par Γ_1. Notre but est de montrer que cette méthode se généralise au cas de n quelconque.

1. Considérations préliminaires.

Soit $\mathfrak{S}_n$ l'espace de Siegel ; on désignera toujours un élément de $\mathfrak{S}_n$ par $Z = X + iY$, $X = (x_{ij})$, $Y = (y_{ij})$, $Y = {}^tWDW$, avec une matrice diagonale $D = (d_i\,\delta_{ij})$ et une matrice triangulaire au sens strict $W = (w_{ij})$. Désignons par $\Omega_n(u)$ $(u > 0)$ l'ensemble des $Z \in \mathfrak{S}_n$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $\qquad |x_{ij}| < u$,

(ii) $\qquad |w_{ij}| < u \quad (1 \leq i < j \leq n)$,

(iii) $\qquad 1 < ud_1 \ , \ d_i < ud_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-1)$.

On sait déjà (Exposé 3 , n° 5) que la famille des $\Omega_n(u)$ avec $u > 0$ assez grand est une famille d' "ouverts fondamentaux" pour le groupe modulaire Γ_n . (On s'écarte ici de la définition donnée dans l'exposé 3 ; mais en posant $M_o = \begin{pmatrix} e_n & 0 \\ 0 & e_n \end{pmatrix}$, $e_n = (\delta_{i,n+1-j})$, il est facile de voir que la famille définie dans l'exposé 3 est équivalente à la famille $\{M_o\,\Omega_n(u)\}$ dans la présente notation.)

Soit $0 \leq r \leq n$; on décomposera les matrices en blocs $(r , n-r)$:

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_{12} \\ {}^tZ_{12} & Z_2 \end{pmatrix} , \quad D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} , \quad W = \begin{pmatrix} W_1 & W_{12} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix} , \ \ldots$$

Alors $Z \in \Omega_n(u)$ entraîne $Z_1 \in \Omega_r(u)$, vu la relation

$$(1.1) \qquad {}^tW\,D\,W = \begin{pmatrix} {}^tW_1\,D_1\,W_1 & {}^tW_1\,D_1\,W_{12} \\ 0 & {}^tW_{12}\,D_1\,W_{12} + {}^tW_2\,D_2\,W_2 \end{pmatrix} .$$

Dans ce qui suit, on fixera une fois pour toutes un nombre u tel que $\Omega_r(u)$ soit un ouvert fondamental de Γ_r pour tout $r \leq n$ et on écrira Ω_r au lieu de $\Omega_r(u)$.

Considérons l'ensemble

$$(1.2) \qquad \Omega_n^* = \overline{\Omega}_n \cup \overline{\Omega}_{n-1} \cup \ldots \cup \overline{\Omega}_o$$

(somme au sens abstrait), $\overline{\Omega}_r$ désignant l'adhérence de Ω_r dans $\mathfrak{S}_r$ et $\Omega_o = \mathfrak{S}_o$ (un ensemble composé d'un seul point). On y introduira une topologie "naturelle" : soient U un voisinage de $Z_o \in \overline{\Omega}_r$ dans $\overline{\Omega}_r$, K un nombre

positif ; on désignera par $V^{(s)}(U, K)$ $(r \leq s \leq n)$ l'ensemble des $Z \in \overline{\Omega}_s$ telles que $Z_1 \in U$ et $d_{r+1} > K$, Z_1 désignant la matrice de degré r dans la décomposition de Z en blocs $(r, s-r)$ comme ci-dessus et d_{r+1} le $(r+1)$-ième coefficient diagonal de D telle que $Z = X + iY$, $Y = {}^tWDW$; alors un voisinage de Z dans Ω_n^* sera donné par la réunion $\bigcup_{r \leq s \leq n} V^{(s)}(U, K)$; cela revient au même de dire qu'une suite $\{Z_\nu\}$ contenue dans $\overline{\Omega}_s$ converge vers Z_o de $\overline{\Omega}_r$, si et seulement si $Z_{\nu,1} \to Z_o$ et $d_{\nu,r+1} \to \infty$. Il est clair que ces définitions donnent une topologie séparée de Ω_n^* qui induit dans chaque $\overline{\Omega}_r$ la topologie initiale. Il est aussi clair que toute suite $\{Z_\nu\}$ contenue dans $\overline{\Omega}_s$ possède une suite partielle convergente dans notre sens (pour un r convenablement choisi) ; donc Ω_n^* est un espace séparé, <u>compact</u>.

Soit encore $0 \leq r \leq n$; on décomposera $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \underset{\sim}{R})$ comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_2 \end{pmatrix}, \ \ldots$$

en blocs $(r, n-r)$. On considerera le sous-groupe $\mathfrak{G}_r^n$ de $Sp(n, \underset{\sim}{R})$ composé des matrices de la forme

$$(1.3) \qquad M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & B_{12} \\ A_{21} & A_2 & B_{21} & B_2 \\ C_1 & 0 & D_1 & D_{12} \\ 0 & 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix} ;$$

Il est trivial que le sous-ensemble de toutes les matrices de cette forme est en fait un sous-groupe ; on notera que la seule condition $A_{12} = 0$, $C_{12} = 0$, $C_2 = 0$ (ou la condition $C_{21}=0$, $C_2=0$, $D_{21}=0$) est suffisante pour qu'un élément M de $Sp(n, \underset{\sim}{R})$ appartienne à $\mathfrak{G}_r^n$ à cause de la condition de symplecticité. Il résulte aussi de là que $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{G}_r^n$ entraîne $M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \in Sp(r, \underset{\sim}{R})$ et que l'application

$$(1.4) \qquad \pi_r : M \in \mathfrak{G}_r^n \longrightarrow M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \in Sp(r, \underset{\sim}{R})$$

est un homomorphisme de $\mathfrak{G}_r^n$ dans $Sp(r, \underset{\sim}{R})$. D'autre part, soit ι_n l'injection canonique de $Sp(r, \underset{\sim}{R})$ dans $Sp(n, \underset{\sim}{R})$ définie par

(1.5) $$\iota_n : \quad M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \longrightarrow M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

On a alors $\varpi_r \circ \iota_n = 1$ (l'identité), ce qui exprime que ϖ_r est surjective et qu'en désignant par $\mathfrak{N}_r^n$ le noyau de ϖ_r, $\mathfrak{G}_r^n$ se décompose en produit semi-direct comme suit :

(1.6) $$\mathfrak{G}_r^n = \iota_n(Sp(r, \underset{\sim}{R})).\mathfrak{N}_r^n .$$

On remarquera que pour le groupe modulaire Γ_n on a la relation

(1.7) $$\Gamma_n \cap \mathfrak{G}_r^n = \iota_n(\Gamma_r).(\Gamma_n \cap \mathfrak{N}_r^n) .$$

La signification du groupe $\mathfrak{G}_r^n$ sera montrée dans le lemme suivant :

LEMME 1 (GODEMENT). – Soient $\{Z_\nu\}$, $\{Z'_\nu\}$ des suites contenues dans $\bar{\Omega}_n$;
1° pour que $\{Z_\nu\}$ converge vers $Z_o \in \bar{\Omega}_r$, il faut et il suffit que Z_ν^{-1} converge vers $\begin{pmatrix} Z_o^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ au sens usuel ;

2° si $\{Z_\nu\}$, $\{Z'_\nu\}$ convergent respectivement vers $Z_o \in \bar{\Omega}_r$, $Z'_o \in \bar{\Omega}_{r'}$ et si $Z'_\nu = M Z_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ avec une matrice $M \in Sp(n, \underset{\sim}{R})$, alors on a $r = r'$, $M \in \mathfrak{G}_r^n$ et $Z'_o = \varpi_r(M) Z_o$.

DÉMONSTRATION. – Supposons d'abord que $\{Z_\nu\}$ converge vers Z_o et posons

$$Z_\nu = X_\nu + i\, Y_\nu ,$$

$$Y_\nu = {}^tW_\nu\, D_\nu\, W_\nu ,$$

$$D_\nu = \begin{pmatrix} D_{\nu,1} & 0 \\ 0 & D_{\nu,2} \end{pmatrix} ,$$

$$X_\nu = \begin{pmatrix} X_{\nu,1} & X_{\nu,12} \\ {}^tX_{\nu,12} & X_{\nu,2} \end{pmatrix} ,$$

$$W_\nu = \begin{pmatrix} W_{\nu,1} & W_{\nu,12} \\ 0 & W_{\nu,2} \end{pmatrix} .$$

$$Z_o = X_o + i\, Y_o \quad ,$$

$$Y_o = {}^tW_o\, D_o\, W_o \quad ;$$

alors $X_{\nu,1} \longrightarrow X_o$, $W_{\nu,1} \longrightarrow W_o$, $D_{\nu,1} \longrightarrow D_o$.

En prenant une suite partielle, on peut supposer de plus que $\{X_\nu\}$, $\{W_\nu\}$ (et pas seulement $\{X_{\nu,1}\}$, $\{W_{\nu,1}\}$) sont convergentes, parce que tous les coefficients de X , W pour $Z \in \bar{\Omega}_n$ sont bornés ; on a alors

$$Z_\nu^{-1} = W_\nu^{-1}\, D_\nu^{-1/2}(i\, E + D_\nu^{-1/2}\, {}^tW_\nu^{-1}\, X_\nu\, W_\nu^{-1}\, D_\nu^{-1/2})^{-1}\, D_\nu^{-1/2}\, {}^tW_\nu^{-1}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} W_o^{-1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_o^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ i\, E + M_o \right\}^{-1} \begin{pmatrix} D_o^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tW_o^{-1} & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

où M_o désigne $\begin{pmatrix} D_o^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tW_o^{-1} & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_o & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_o^{-1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_o^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ceci est égal à :

$$\begin{pmatrix} W_o^{-1}\, D_o^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ i\, E + \begin{pmatrix} D_o^{-1/2}\, {}^tW_o^{-1}\, X_o\, W_o^{-1}\, D_o^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} D_o^{-1/2}\, {}^tW_o^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} W_o^{-1}\, D_o^{-1/2} \left\{ i\, E_r + D_o^{-1/2}\, {}^tW_o^{-1}\, X_o\, W_o^{-1}\, D_o^{-1/2} \right\}^{-1} D_o^{-1/2}\, {}^tW_o^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Z_o^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où la première assertion de 1° . La réciproque suit immédiatement de là et du fait que chaque suite contenue dans $\bar{\Omega}_n$ possède une suite partielle convergente.

Soit maintenant $\{Z'_\nu\}$ une autre suite qui converge vers $Z'_o \in \bar{\Omega}_{r'}$, et soit $Z'_\nu = (A\, Z_\nu + B)(C\, Z_\nu + D)^{-1}$ avec $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n\, ,\, \underset{\sim}{R})$; on peut supposer que $r' \leq r$. Alors on a

$$Z'^{-1}_\nu = (D\, Z_\nu^{-1} + C)(B\, Z_\nu^{-1} + A)^{-1}$$

et, par passage à la limite, on a

$$\begin{pmatrix} Z_o'^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_o^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} D_1 & D_{12} \\ D_{21} & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_o^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 & C_{12} \\ C_{21} & C_2 \end{pmatrix};$$

les blocs $\begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}$, ... désignant la décomposition des matrices A , ... en blocs $(r , n - r)$. En comparant les coefficients correspondants, on obtient les relations

$$(1.8) \qquad \begin{pmatrix} Z_o'^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (B_1 Z_o^{-1} + A_1) = D_1 Z_o^{-1} + C_1 ,$$

$$(1.9) \qquad \begin{pmatrix} Z_o'^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A_{12} = C_{12} ,$$

$$(1.10) \qquad 0 = D_{21} Z_o^{-1} + C_{21} ,$$

$$(1.11) \qquad 0 = C_2 .$$

Comme la partie imaginaire Y_o de Z_o est $\gg 0$, il résulte de (1.10) que $C_{21} = D_{21} = 0$, ce qui, avec (1.11) , prouve déjà que $M \in \mathfrak{G}_r^n$; on a donc $M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \in Sp(r , \underset{\sim}{R})$ et par suite (1.8) montre que $\begin{pmatrix} Z_o'^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang r ; donc $r = r'$ et $Z_o' = M_1 Z_o$, ce qui achève la démonstration.

2. Construction de l'espace $\mathfrak{S}_n^*$.

On va maintenant passer à la construction de l'espace $\mathfrak{S}_n^*$ qui est une généralisation, pour le cas de n quelconque, de $\mathfrak{S}_1^*$ énoncé plus haut. On pourrait pour cela se servir du modèle borné de l'espace de Siegel, i.e. l'espace des matrices symétriques complexes W de degré n telles que $\overline{W} W \ll E_n$. Mais on va construire ici directement l'espace correspondant au demi-plan $\mathfrak{S}_n$.

Soit $\Gamma = \Gamma_n$ le groupe modulaire de Siegel ; considérons l'ensemble des couples (M , Z) avec $M \in \Gamma$, $Z \in \mathfrak{S}_r$ $(0 \leq r \leq n)$; introduisons-y une relation d'équivalence définie par

$$(M , Z) \sim (M' , Z') , \quad Z \in \mathfrak{S}_r , \quad Z' \in \mathfrak{S}_{r'}$$

$$\Longleftrightarrow r = r' , \quad M'^{-1} M \in \mathfrak{G}_r^n , \quad Z' = \varpi_r(M'^{-1} M)Z .$$

Il est immédiat que cette relation est en fait une relation d'équivalence ; on note $M.Z$ la classe de (M , Z) , et on désigne par $\mathfrak{S}_n^*$ l'ensemble des classes ainsi obtenues. On peut considérer $\mathfrak{S}_r$ comme un sous-ensemble de $\mathfrak{S}_n^*$ par l'injection naturelle $Z \longrightarrow 1.Z$; de même on peut faire opérer Γ sur $\mathfrak{S}_n^*$ par la formule évidente $M_1.(M.Z) = (M_1M).Z$, parce que $(M , Z) \sim (M' , Z')$ entraîne évidemment $(M_1 M , Z) \sim (M_1 M' , Z')$. Ces notations sont bien entendu d'accord avec les notations usuelles lorsque $n = r$.

On a donc

$$\mathfrak{S}_n^* = \bigcup_{0 \leq r \leq n} \Gamma \mathfrak{S}_r . \tag{2.1}$$

Plus précisément, si on décompose Γ à droite par $\Gamma \cap \mathfrak{G}_r^n$:

$$\Gamma = \bigcup_i M_{r,i}(\Gamma \cap \mathfrak{G}_r^n) , \tag{2.2}$$

on a une décomposition directe de $\mathfrak{S}_n^*$ comme suit :

$$\mathfrak{S}_n^* = \bigcup_{r,i} M_{r,i} \mathfrak{S}_r . \tag{2.3}$$

D'ailleurs on peut considérer comme $\Omega_n^* \subset \mathfrak{S}_n^*$ et on obtient $\mathfrak{S}_n^* = \Gamma\Omega_n^*$

Cela posé, on va définir une topologie dans $\mathfrak{S}_n^*$; on s'intéressera à une topologie $\mathcal{T}$ sur $\mathfrak{S}_n^*$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1° $\mathcal{T}$ induit dans Ω_n^* sa topologie "naturelle".

2° Les opérations de $M \in \Gamma$ dans $\mathfrak{S}_n^*$ sont continues.

3° Si deux points x , x' de $\mathfrak{S}_n^*$ ne sont pas équivalents par rapport à Γ, il existe des voisinages U de x et U' de x' tels que $\Gamma U \cap U' = \emptyset$.

4° Chaque point $x \in \mathfrak{S}_n^*$ possède un système fondamental de voisinages $\{U\}$ tels que $\Gamma_x U = U$ et que $M U \cap U \neq \emptyset$ entraîne $M \in \Gamma_x$, Γ_x désignant le stabilisateur de x dans Γ.

Or notre résultat principal consiste dans les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. - <u>Parmi les topologies satisfaisant aux conditions</u> 1°, 2° , <u>il en existe une plus fine</u> (notée $\mathcal{T}^\Gamma$) ; <u>elle satisfait aussi à la condition</u> 3° .

THÉORÈME 2. - <u>Il existe une topologie et une seule</u> (notée $\mathcal{T}_0^\Gamma$) <u>satisfaisant aux conditions</u> 1° , 2° , 3° , 4° .

Avant de passer à la démonstration, donnons les conséquences de ces théorèmes. Considérons d'abord l'espace quotient $\Gamma\backslash\mathfrak{S}_n^*$ muni de la topologie induite par $\mathcal{T}^\Gamma$: les ouverts de $\Gamma\backslash\mathfrak{S}_n^*$ sont des images des $\mathcal{T}^\Gamma$-ouverts de $\mathfrak{S}_n^*$ par la

projection canonique $\pi_n^* : \mathfrak{S}_n^* \longrightarrow \Gamma\backslash\mathfrak{S}_n^*$. Alors on a :

THÉORÈME 3. - <u>L'espace quotient</u> $\Gamma\backslash\mathfrak{S}_n^*$ <u>est séparé et compact.</u>

Il est séparé, grâce à la condition 3° ; il est compact, parce qu'il est une image continue de l'espace compact Ω_n^* .

Cela étant, on a $\Gamma\backslash\mathfrak{S}_n^* = \bigcup_{0 \leq r \leq n} \Gamma\backslash\Gamma\mathfrak{S}_r$ par (2.1) ; or le stabilisateur de $\mathfrak{S}_r$ dans Γ étant $\Gamma \cap \mathfrak{G}_r^n$ et l'opération de $\Gamma \cap \mathfrak{G}_r^n$ sur $\mathfrak{S}_r$ étant égale à celle de $\varpi_r(\Gamma \cap \mathfrak{G}_r^n) = \Gamma_r$, $\Gamma\backslash\Gamma\mathfrak{S}_r$ s'identifie canoniquement à $\Gamma_r\backslash\mathfrak{S}_r$; donc on a

$$\Gamma\backslash\mathfrak{S}_n^* = \bigcup_{0 \leq r \leq n} \Gamma_r\backslash\mathfrak{S}_r \quad . \tag{2.4}$$

Il existe plusieurs topologies satisfaisant aux conditions 1° , 2° ; mais chacune d'elles induit la même topologie dans la réunion d'un nombre fini de $M_i\,\Omega_n^*$ $(M_i \in \Gamma)$. Si elle satisfait de plus à la condition 3° , elle induit la même topologie dans l'espace quotient $\Gamma\backslash\mathfrak{S}_n^*$, de sorte qu'on peut considérer dans le théorème 3 que la topologie $\Gamma\backslash\mathfrak{S}_n^*$ est définie par n'importe quelle topologie de $\mathfrak{S}_n^*$ satisfaisant aux conditions 1° , 2° , 3° .

3. <u>Démonstration des théorèmes</u> 1 <u>et</u> 2 .

Définissons d'abord la topologie $\mathcal{T}^\Gamma$ de la manière suivante : on dit qu'un sous-ensemble F de $\mathfrak{S}_n^*$ est fermé au sens de $\mathcal{T}^\Gamma$ si et seulement si $M\,F \cap \Omega_n^*$ est fermé au sens de la topologie "naturelle" de Ω_n^* , pour tout $M \in \Gamma$. Il est clair qu'alors les conditions pour les sous-ensembles fermés d'une topologie sont remplies ; il est aussi clair que la topologie $\mathcal{T}^\Gamma$ ainsi définie satisfait à la condition 2° . Pour vérifier la condition 1° , il suffira de montrer que si F est un fermé dans Ω_n^* (au sens de la topologie naturelle), alors $M\,F \cap \Omega_n^*$ l'est aussi pour tout $M \in \Gamma$; mais c'est une conséquence immédiate du lemme 1 . Il est clair que $\mathcal{T}^\Gamma$ est la plus fine des topologies satisfaisant aux conditions 1° , 2° .

Pour démontrer la dernière assertion du théorème 1, on va donner quelques lemmes :

LEMME 2. - <u>Pour chaque</u> r <u>il existe un nombre fini de</u> $M_i^{(r)} \in \mathfrak{G}_r^n$ <u>telles que les relations</u> $M\overline{\Omega}_r \cap \overline{\Omega}_r \neq \emptyset$, $M \in \Gamma$ (donc nécessairement $M \in \mathfrak{G}_r^n$), <u>entraînent</u> $\varpi_r(M) = \varpi_r(M_i^{(r)})$ <u>pour un indice</u> i .

C'est une conséquence immédiate du fait que Ω_r est un "ouvert fondamental" de Γ_r . On notera d'ailleurs que, si $r < n$, il existe un nombre <u>infini</u> de $M \in \Gamma$ telles que $M\overline{\Omega}_r \cap \overline{\Omega}_r \neq \emptyset$.

LEMME 3. – Pour chaque $Z \in \bar{\Omega}_r$, il existe un voisinage U de Z relatifs à Ω_n^* et jouissant des propriétés suivantes ;

1° si $M \in \Gamma$ et $MU \cap \Omega^* \neq \emptyset$, on a $M \in \mathfrak{S}_r^n$ et $MZ \in \bar{\Omega}_r$;

2° $M \in \Gamma$ et $MU \cap U \neq \emptyset$ entraînent $M \in \Gamma_Z$ (le stabilisateur de Z dans Γ).

DÉMONSTRATION. – Il est clair que, si $MU \cap \Omega_n^* \neq \emptyset$ pour tous les voisinages U de Z (dans Ω_n^*), M étant fixée, on a $MZ \in \Omega_n^*$ et donc $M \in \mathfrak{S}_r^n$, $MZ \in \bar{\Omega}_r$. Par conséquent, on peut prendre un voisinage U de Z tel que $U \subset \bigcup_{r \leq s \leq n} \bar{\Omega}_s$ et que l'assertion du lemme soit vraie pour toutes les $M_i^{(s)}$ $(r \leq s \leq n)$ (en nombre fini) énoncées dans le lemme 2. On va montrer qu'alors l'assertion du lemme est vraie pour toute $M \in \Gamma$. En effet, si $MU \cap \Omega_n^* \neq \emptyset$, on a $MU \cap \bar{\Omega}_s \neq \emptyset$ pour un indice s $(r \leq s \leq n)$; d'après le lemme 2 on a alors $M \in \mathfrak{S}_s^n$ et $\varpi_s(M) = \varpi_s(M_i^{(s)})$. Donc $M_i^{(s)} U \cap \bar{\Omega}_s \neq \emptyset$ et par notre choix de U on a $M_i^{(s)} \in \mathfrak{S}_r^n$, $M_i^{(s)} Z \in \bar{\Omega}_r$; par suite $\varpi_s(M) = \varpi_s(M_i^{(s)}) \in \mathfrak{S}_r^s$, d'où $M \in \mathfrak{S}_r^n$, $\varpi_r(M) = \varpi_r(M_i^{(s)})$ et donc $MZ = M_i^{(s)} Z \in \bar{\Omega}_r$, ce qui prouve la première assertion du lemme. La deuxième assertion du lemme peut se montrer tout pareillement.

LEMME 4. – Soit Z un élément de Ω_r ; si U est un voisinage de Z relatif à Ω_n^*, alors $\tilde{U} = \Gamma_Z U$ est un voisinage de Z au sens de $\mathcal{T}^\Gamma$.

DÉMONSTRATION. – On peut supposer que U vérifie la propriété 1° énoncée dans le lemme 3 ; alors $M\tilde{U} \cap \Omega_n^* \neq \emptyset$, $M \in \Gamma$ entraîne $M \in \mathfrak{S}_r^n$, $MZ \in \bar{\Omega}_r$. Donc il n'existe qu'un nombre fini de possibilités de M (modulo à droite Γ_Z) telles que $MU \cap \Omega_n^* \neq \emptyset$. Il suffira donc de démontrer que $M\tilde{U} \cap \Omega_n^*$ est un voisinage de MZ relatif à Ω_n^* pour ces représentants M modulo Γ_Z en nombre fini. Soient $r \leq s \leq n$, $U_s = U \cap \bar{\Omega}_s$; alors $M\tilde{U} \cap \Omega_n^* = \bigcup_{r \leq s \leq n} M\Gamma_Z U_s \cap \bar{\Omega}_s$. Or comme $\Gamma_Z \supset \Gamma \cap \mathfrak{S}_r^n$ et $\Gamma = \iota_n(\Gamma_r)$: $(\Gamma \cap \mathfrak{S}_r^n)$, on peut prendre M telle que $M \in \iota_n(\Gamma_r)$. Alors $M\Gamma_Z U_s \cap \bar{\Omega}_s$ contient toutes les matrices $Z^{(s)} \in \bar{\Omega}_s$

telles que $Z^{(s)} = \begin{pmatrix} Z_1^{(r)} & Z_{12} \\ {}^tZ_{12} & Z_2 \end{pmatrix} = X + iY$, $Y = {}^tW D W$, $D = (d_i \delta_{ij})$, avec $Z_1^{(r)}$ assez voisine de MZ et d_{r+1} suffisamment grand. (Ceci résulte de la proposition démontrée dans l'Appendice). Donc $M\tilde{U} \cap \Omega_n^*$ est un voisinage de MZ dans Ω_n^*,

C.Q.F.D.

Maintenant on va démontrer la dernière assertion du théorème 1 . Soient x , x' deux points de $\mathfrak{S}_n^*$, non équivalents par rapport à Γ ; il s'agit de construire des voisinages $\tilde{U}$, $\tilde{U}'$ de x , x' respectivement, qui soient Γ-saturés et disjoints ; il suffira de le faire pour deux points Z , Z' appartenant à $\bigcup_{0 \leq r \leq n} \Omega_r$. Soient U , U' des voisinages de Z , Z' respectivement, relatifs à Ω_n^* , tels que $M_i^{(r)} U \cap U' = \emptyset$ pour toutes les $M_i^{(r)}$ dans le lemme 2 ; il est clair qu'alors $M U \cap U' = \emptyset$ pour toute $M \in \Gamma$. Soit $\tilde{U} = \Gamma U$, $\tilde{U}' = \Gamma U$; d'après le lemme 4 ils sont des voisinages de Z , Z' respectivement, dans $\mathfrak{S}_n^*$, au sens de $\mathcal{T}^\Gamma$, et ils sont Γ-saturés et ne se rencontrent pas, ce qui démontre notre assertion.

Passons à la démonstration du théorème 2 . Définissons la topologie $\mathcal{T}_o^\Gamma$ de la manière suivante : on dit que U est un voisinage de $x \in \mathfrak{S}_n^*$ au sens de $\mathcal{T}_o^\Gamma$ si et seulement si U est un voisinage Γ_x-saturé de x au sens de $\mathcal{T}^\Gamma$. Pour $Z \in \bigcup_{0 \leq r \leq n} \Omega_r$ un tel voisinage contient toujours un voisinage $\tilde{U} = \Gamma_Z U$ donné dans le lemme 4 ; en y prenant U suffisamment petit tel que la condition 2° du lemme 3 soit remplie, $\tilde{U} = \Gamma_Z U$ sera un $\mathcal{T}_o^\Gamma$-voisinage de Z satisfaisant à la condition 4° ; d'où résulte immédiatement que les conditions pour les systèmes de voisinages sont remplies pour $\mathcal{T}_o^\Gamma$; alors il est clair que $\mathcal{T}_o^\Gamma$ est une topologie satisfaisant aux conditions 1° , 2° , 3° , 4° ; la condition 1° est remplie, parce que pour $\tilde{U} = \Gamma_Z U$, on peut faire $\tilde{U} \cap \Omega_n^* = \bigcup_{M_i^{(s)} \in \Gamma_Z} M_i^{(s)} U \cap \Omega_n^*$

aussi petit qu'on veut en prenant U suffisamment petit.

Finalement, démontrons l'unicité de la topologie satisfaisant aux conditions 1° , 2° , 3° , 4° . Pour cela soit $\mathcal{T}$ une telle topologie et soit $\tilde{U}_1$ un $\mathcal{T}$-voisinage de $Z \in \Omega_r$ satisfaisant à la condition 4° ; en posant $U = \tilde{U}_1 \cap \Omega_n^*$, $\tilde{U} = \Gamma_Z U$, on obtient un $\mathcal{T}_o^\Gamma$-voisinage $\tilde{U}$ de Z , contenu évidemment dans $\tilde{U}_1$; réciproquement soit $\tilde{U} = \Gamma_Z U$ un $\mathcal{T}_o^\Gamma$-voisinage de $Z \in \Omega_r$; on peut supposer que $\tilde{U}$ est contenu dans un $\mathcal{T}$-voisinage de $\tilde{U}_1$ de Z satisfaisant à la condition 4° ; soit d'autre part $\tilde{U}_2 = \Gamma U$; $\tilde{U}_2$ est un $\mathcal{T}$-voisinage de Z , parce qu'il est un $\mathcal{T}_o^\Gamma$-voisinage de Z , Γ-saturé et que $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_o^\Gamma$ définissent la même topologie dans l'espace quotient $\Gamma \backslash \mathfrak{S}_n^*$ en vertu des conditions 1° , 2° , 3° ; alors on a $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \tilde{U}_1 \cap \bigcup_{M_i : \Gamma / \Gamma_Z} M_i \tilde{U} = \tilde{U}_1 \cap \tilde{U} = \tilde{U}$, donc $\tilde{U}$ est un

$\mathcal{T}$-voisinage de Z , ce qui prouve notre assertion.

La topologie classique de $\mathfrak{S}_1^*$ est $\mathcal{T}_o^\Gamma$; on voit facilement que les deux topologies $\mathcal{T}^\Gamma$ et $\mathcal{T}_o^\Gamma$ sont en fait différentes ; on remarquera aussi que ces

topologies ne sont pas localement compactes. On remarquera d'ailleurs que les topologies $\mathcal{T}^{\Gamma}$ et $\mathcal{T}_o^{\Gamma}$ induisent la même topologie dans $\mathfrak{S}_r$ $(0 \leq r \leq n)$, i.e. la topologie initiale de $\mathfrak{S}_r$.

APPENDICE

On va ici compléter la fin de la démonstration du lemme 4 . En changeant de notations, il s'agit de ceci : soient U_r et U'_r des voisinages de $Z_o \in \Omega_r$ dans Ω_r ; soient K et K' des nombres positifs, $U_s = V^{(s)}(U_r , K)$ l'ensemble de toutes les matrices $Z \in \Omega_s$ telles que $Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_{12} \\ {}^tZ_{12} & Z_2 \end{pmatrix} = X + iY$, $Y = {}^tW\, D\, W$, $D = (d_i\, \delta_{ij})$, avec $Z_1 \in U_r$, $d_{r+1} > K$. Soit U'_s l'ensemble défini de manière analogue à U_s , mais en remplaçant Ω_s , U_r et K par $M_o^{-1}\Omega_s$, U'_r et K' respectivement (M_o désigne un élément de $\iota_s(\Gamma_r)$). Alors il s'agit de démontrer que, U_r , K et M_o étant donnés, on peut choisir U'_r et K' de manière que

$$U'_s \subset (\Gamma_s)_{Z_o}\, U_s \quad . \tag{1}$$

Ensuite il suffira de prendre K'' tel que $M_o^{-1}\, V^{(s)}(M_o\, U'_r , K'') \subset U'_s$, ce qui est possible grâce à la continuité de M_o^{-1} dans $\Omega_s^* \cup M_o^{-1}\Omega_s^*$.

On va utiliser le résultat suivant :

PROPOSITION. - <u>Avec les notations précédentes, supposons donnés</u> U'_r <u>et</u> M_o (U'_r étant <u>borné</u>). <u>Alors on peut choisir</u> K' <u>de manière que</u> U'_s <u>soit contenu dans</u> $(\Gamma_s \cap \mathfrak{M}_r^s)\Omega_s$.

L'assertion à démontrer en résultera : on aura en effet un nombre fini de $M_i \in \Gamma_s \cap \mathfrak{M}_r^s$ tels que

$$U'_s \subset \bigcup_i M_i\, \Omega_s$$

et donc, en modifiant U'_r et K' de manière que

$$(M_i^{-1}\, U'_s) \cap \Omega_s \subset U_s \qquad \text{pour tout } i$$

(ce qui est possible grâce à la continuité de M_i^{-1} dans Ω_s^*) , on obtiendra

$$U'_s \subset \bigcup_i M_i\, U_s \quad ,$$

d'où (1) ;

Ainsi tout revient à prouver la proposition. Soit $Z' = \begin{pmatrix} Z'_1 & Z'_{12} \\ {}^tZ'_{12} & Z'_2 \end{pmatrix} \in U'_s$. On va montrer, en prenant K' assez grand, l'existence d'une $M \in \Gamma_s \cap \mathfrak{M}_r^s$ telle que $M Z' \in \Omega_s$. Or le groupe $\Gamma_s \cap \mathfrak{M}_r^s$ est engendré par les transformations de la forme suivante :

(i) $M = \begin{pmatrix} {}^tU & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}$, avec $U = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$, U_2 étant entière et unimodulaire ;

(ii) $M = \begin{pmatrix} {}^tU & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}$, avec $U = \begin{pmatrix} E & U_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix}$, U_{12} entière ;

(iii) $M = \begin{pmatrix} E & T \\ 0 & E \end{pmatrix}$, avec $T = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} \\ {}^tT_{12} & T_2 \end{pmatrix}$, où T_{12} et T_2 sont entières, et $T_2 = {}^tT_2$.

Si l'on pose

$$Z' = X' + iY' , \quad Y' = {}^tW' D' W' , \quad X' = \begin{pmatrix} X'_1 & X'_{12} \\ {}^tX'_{12} & X'_2 \end{pmatrix} , \quad W' = \begin{pmatrix} W'_1 & W'_{12} \\ 0 & W'_2 \end{pmatrix} ,$$

$D' = \begin{pmatrix} D'_1 & 0 \\ 0 & D'_2 \end{pmatrix}$, alors ces transformations opèrent comme suit :

(i) $W'_{12} \longrightarrow W'_{12} U'_2 , \quad {}^tW'_2 D'_2 W'_2 \longrightarrow {}^tU_2 \, {}^tW'_2 D'_2 W'_2 U_2$;

(ii) $W'_{12} \longrightarrow W'_{12} + W'_1 U_{12} , \quad {}^tW'_2 D'_2 W'_2$ inchangé ;

(iii) $X'_{12} \longrightarrow X'_{12} + T_{12} , \quad X'_2 \longrightarrow X'_2 + T_2 , \quad Y'$ inchangé ;

et ces transformations ne changent pas X'_1 , W'_1 et D'_1 . Donc on peut, en faisant $Z'' = M Z'$ (où M est du type (i)), faire en sorte que ${}^tW''_2 D''_2 W''_2 \in S'(u)$ (notation des Exposés 1 et 2), i.e. que

$$|w''_{ij}| < u \quad (\text{pour } r + 1 \leq i < j \leq s) , \quad d''_i < u d''_{i+1} \quad (\text{pour } r + 1 \leq i < s) .$$

Ensuite, en faisant une transformation du type (ii) , on peut faire en sorte que

$$|w''_{ij}| \leq 1/2 \quad (\text{pour } 1 \leq i \leq r , \quad r + 1 \leq j \leq s) .$$

Enfin, en faisant une transformation du type (iii) , on peut faire en sorte que

$$|x''_{ij}| \leq 1/2 \quad \text{pour} \quad r+1 \leq j \leq s \text{ , quel que soit } i \text{ .}$$

Dans toutes ces transformations $Z''_1 = Z'_1$ ne change pas. Finalement, on voit qu'on peut choisir $M \in \Gamma'_s \cap \mathfrak{M}^s_r$ de manière que $Z'' = MZ'$ satisfasse à toutes les conditions pour appartenir à Ω_s , à la seule exception de la condition

$$d''_r < ud''_{r+1} \quad .$$

Or $d''_r = d'_r$ est borné lorsque Z'_1 parcourt U'_r . De plus, les transformations (i) utilisées ci-dessus sont en nombre fini lorsque Z' parcourt $M_o^{-1}\Omega_s$ avec $Z'_1 \in U'_r$ (en effet, pour $Z' = M_o^{-1} Z \in M_o^{-1}\Omega_s$ et $Z'_1 \in U'_r$, tous les coefficients de $Y'_2 - Y_2$ sont bornés). On peut donc choisir K' ne dépendant que de U'_r , u et M_o , de façon que, pour tout $Z' \in U'_s$, $Z'' = M Z'$ satisfasse aussi à $d''_r < ud''_{r+1}$, c'est-à-dire finalement $M Z' \in \Omega_s$.

Ceci achève de prouver la proposition.

BIBLIOGRAPHIE

La compactification ci-dessus a été donnée dans :

[1] SATAKE (Ichiro). - On the compactification of the Siegel space, J. Indian math. Soc., new Series, t. 20, 1956, p. 259-281.

(mais en n'utilisant pas l'espace $\mathfrak{S}^*_n$). Le lemme 2 de ce mémoire correspond au lemme 1 de notre exposé, mais la démonstration est beaucoup simplifiée par l'idée de GODEMENT. D'ailleurs l'introduction de l'espace $\mathfrak{S}^*_n$ est préférable surtout en raison de son utilité dans la considération des groupes commensurables au groupe Γ.

On trouvera d'autres méthodes de compactification dans :

[2] SATAKE (Ichiro). - On Siegel's modular functions, Proceedings of the international Symposium on algebraic number theory, Tokyo and Nikko 1955. - Tokyo, Science council of Japan, 1956 ; p. 107-129.

[3] SIEGEL (Carl Ludwig). - Zur Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, Comm. pure and appl. Math., t. 8, 1955, p. 677-681.