Henri Cartan

Ouverts fondamentaux pour le groupe modulaire

Séminaire Henri Cartan, tome 10, n° 1 (1957-1958), exp. n° 3, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_1_A3_0>

25 novembre 1957

OUVERTS FONDAMENTAUX POUR LE GROUPE MODULAIRE

par Henri CARTAN

1. Opérations du groupe symplectique dans l'espace de Siegel.

On reprend en partie la fin de l'exposé précédent avec quelques modifications dans les notations ; on désire notamment que le groupe symplectique opère à gauche dans l'espace de Siegel, conformément aux habitudes.

Le groupe symplectique $Sp(n , \mathbb{R})$ est le sous-groupe des matrices $M \in GL(2n , \mathbb{R})$ qui conservent la forme bilinéaire alternée

$$J(x , y) = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i y_{n+i} - y_i x_{n+i} ,$$

forme dont la matrice J est $\begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$. La condition qui exprime que M est symplectique est

(1) $$^tMJM = J .$$

Utilisant les minuscules latines pour désigner les matrices à n lignes et n colonnes, écrivons

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Alors (1) se traduit par

(2) $$^tac = {}^tca , \quad {}^tbd = {}^tdb , \quad {}^tad - {}^tcb = 1_n .$$

Observons que $\det (M) = 1$ si M est symplectique. De plus, si M est symplectique, ^tM l'est ; donc les relations (2) sont équivalentes aux suivantes (obtenues en remplaçant M par ^tM) :

(2') $$a\,{}^tb = b\,{}^ta , \quad c\,{}^td = d\,{}^tc , \quad a\,{}^td - b\,{}^tc = 1_n .$$

On s'intéresse au quotient du groupe $G = Sp(n , \mathbb{R})$ par le sous-groupe compact maximal $K = Sp(n , \mathbb{R}) \cap O(2n , \mathbb{R})$, formé des matrices orthogonales et symplectiques (précisons que ce quotient G/K se compose des classes à gauche MK, où M parcourt G). Pour que M appartienne à K, il faut et il suffit que l'on ait, outre (1), la relation $JM = MJ$ (qui exprime que M est linéaire-commplexe pour la structure complexe définie par J sur $\underset{\sim}{R}^{2n}$). On trouve ainsi les M de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

où a et b satisfont aux conditions

(3) $$ {}^t ab = {}^t ba \ , \quad {}^t aa + {}^t bb = 1_n \ ,$$

qui expriment que $a + ib$ est <u>unitaire</u>. Ainsi K s'identifie à $U(n)$.

A chaque $M \in Sp(n\ ,\ \underset{\sim}{R})$ associons $M\,{}^tM$, qui est symplectique, symétrique et positive non dégénérée ; pour que M et M' aient même image, il faut et il suffit que M et M' soient dans la même classe à gauche suivant K ; comme toute matrice symplectique positive P est de la forme $M\,{}^tM$, avec M symplectique (ce qui se voit en réduisant P à la forme diagonale par une transformation symplectique) , on voit que l'espace homogène G/K se réalise comme l'espace des matrices P symplectiques et symétriques positives ; G opère à gauche dans cet espace par

$$(M\ ,\ P) \longrightarrow MP\,{}^tM \ .$$

Dire qu'une P symétrique est symplectique, revient à dire que $(PJ)^2 = -1_{2n}$. Donc PJ définit une <u>structure complexe</u> sur $\underset{\sim}{R}^{2n}$. Le complexifié $\underset{\sim}{C}^{2n}$ de $\underset{\sim}{R}^{2n}$ est alors somme directe de deux sous-espaces vectoriels (complexes) V et V' , de dimension (complexe) n , conjugués l'un de l'autre, V étant défini par

(4) $$x \in V \Longleftrightarrow PJx = -ix$$

Si x et y sont dans V , la forme bilinéaire symétrique $P^{-1}(x\ ,\ y)$ est égale à la forme alternée $iJ(x\ ,\ y)$, donc est identiquement nulle ; et puisque P^{-1} est $\gg 0$, on a $P^{-1}(x\ ,\ \bar{x}) > 0$ pour $x \in V\ ,\ x \neq 0$; d'où finalement

(5) $$J(x\ ,\ y) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in V\ ,\quad y \in V \quad ; \quad iJ(x\ ,\ \bar{x}) > 0 \quad \text{pour} \quad x \in V\ ,\quad x \neq 0\ .$$

Réciproquement, soit V un sous-espace vectoriel de dimension n de $\underset{\sim}{C}^{2n}$, satisfaisant à (5). Alors l'intersection de V et de son conjugué V' est réduite à 0 , car si $x \in V \cap V'$, on doit avoir $J(x\ ,\ \bar{x}) = 0$. Définissons une matrice réelle P par la condition (4) ; alors (5) exprime que P est symétrique et $\gg 0$,; et puisque $(PJ)^2 = -1_{2n}$, P est symplectique.

Ainsi G/K s'identifie maintenant à l'espace des sous-espaces vectoriels de dimension n de $\underset{\sim}{C}^{2n}$ qui satisfont à (5). Pour définir un tel sous-espace V , donnons-nous une application $\underset{\sim}{C}$-linéaire $L : \underset{\sim}{C}^n \longrightarrow \underset{\sim}{C}^{2n}$ ayant V pour image ; L est déterminée par V , sauf que L peut être remplacée par Lk , où k est une matrice inversible à n lignes et n colonnes. On voit immédiatement que si L est l'une des matrices attachées à P , la matrice ML est l'une des matrices attachées à $MP\,{}^tM$. Les conditions (5) donnent, pour L , les conditions nécessaires et suffisantes

$$(6)\qquad {}^tLJL = 0 \ , \qquad i\,{}^t\bar{L}JL \gg 0 \ .$$

Explicitons, en écrivant L sous la forme $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, u et v étant des matrices (complexes) à n lignes et n colonnes ; (6) devient

$$(6')\qquad {}^tuv = {}^tvu \ , \qquad i({}^t\bar{u}v - {}^t\bar{v}u) \gg 0 \ .$$

La deuxième relation (6') exprime que la partie imaginaire du produit scalaire hermitien des vecteurs ux et vx est > 0 , quel que soit le vecteur non nul $x \in \mathbb{C}^n$. Il en résulte que $ux \neq 0$ et $vx \neq 0$ pour $x \neq 0$, autrement dit on a $\det(u) \neq 0$, $\det(v) \neq 0$. Donc la classe de la matrice $L = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ est caractérisée par uv^{-1} , qui est une matrice complexe z . Les relations (6) deviennent

$$(7)\qquad {}^tz = z \ , \qquad \mathrm{Im}(z) \gg 0 \ .$$

En définitive, l'espace homogène G/K s'identifie à <u>l'espace de Siegel</u> $\mathfrak{S}_n$, formé des matrices complexes symétriques z (à n lignes et n colonnes) telles que $\mathrm{Im}(z) \gg 0$. Explicitons les opérations de G sur $\mathfrak{S}_n$: si M est une matrice symplectique $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a vu que M transforme L en ML , donc opère sur u et v comme suit :

$$(8)\qquad u \longrightarrow au + bv \ , \qquad v \longrightarrow cu + dv \ .$$

Donc sur $z = uv^{-1}$, M opère par

$$(9)\qquad z \longrightarrow (az + b)/(cz + d)^{-1} \ .$$

Il est facile d'expliciter la correspondance entre les points $z \in \mathfrak{S}_n$, et les matrices P symplectiques, symétriques et positives. D'après (4), on a

$$PJL = -\,iL \ , \quad \text{avec} \quad L = \begin{pmatrix} z \\ 1_n \end{pmatrix} \ .$$

En séparant le réel et l'imaginaire, et en posant $z = x + iy$, on trouve

$$(10)\qquad P = \begin{pmatrix} 1_n & x \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ x & 1_n \end{pmatrix}$$

ce qui donne aussi

$$(10')\qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ -x & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{-1} & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & -x \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}$$

On voit en même temps que la matrice P symplectique et $\gg 0$ la plus générale a la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où a et d sont symétriques $\gg 0$, $c = {}^t b$, $ac = ba$, $cd = db$, $ad - b^2 = 1_n$ (ces conditions ne sont pas toutes indépendantes) ; si P est une telle matrice, la matrice z associée est

(11) $$z = bd^{-1} + id^{-1} .$$

En particulier, à $P = 1_{2n}$ correspond la matrice z égale à $i.1_n$; le sous-groupe compact K de G est le groupe de stabilité du point $z = i.1_n$. Cherchons les éléments de G qui opèrent identiquement dans $\mathfrak{S}_n$; ce sont les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ telles que

$$az + b = z(-bz + a) \quad \text{pour tout } z .$$

Ceci exige $b = 0$ (remplacer z par λz, λ étant un scalaire réel) ; de plus a doit commuter avec tout z, donc a est de la forme $\lambda.1_n$, et puisque $a\,{}^t a = 1_n$, on a $\lambda = \pm 1$. En résumé, les opérations de $G = Sp(n, \mathbb{R})$ dans $\mathfrak{S}_n$ définissent une <u>représentation fidèle</u> du quotient de G par le sous-groupe à 2 éléments formé de 1_{2n} et -1_{2n}.

2. <u>Autre modèle pour l'espace de Siegel</u>.

Par la transformation de Cayley

$$w = (1_n + iz)(1_n - iz)^{-1} ,$$

$\mathfrak{S}_n$ se transforme dans l'ensemble des n-matrices complexes et symétriques w, telles que $\bar{w}w \ll 1_n$, ensemble qui est évidemment un ouvert <u>borné</u> de $\mathbb{C}^{n(n+1)/2}$. Le groupe symplectique se transforme dans un groupe transitif d'automorphismes de cet ouvert, à savoir

$$w \longrightarrow (aw + \bar{b})(bw + \bar{a})^{-1} ,$$

où a et b sont des matrices complexes satisfaisant à

$${}^t ba = {}^t ab , \quad {}^t a\bar{a} - {}^t b\bar{b} = 1_n .$$

Le groupe de stabilité du point $w = 0$ est

(12) $$w \longrightarrow aw\,{}^t a , \quad \text{où } a \text{ est } \underline{\text{unitaire}}.$$

Sous cette forme, ce "domaine borné homogène" avait été indiqué par E. CARTAN ([1], Partie 1, vol. 2, p. 1293 : "Type IV"). Il résulte d'un théorème général de la théorie des espaces symétriques (loc. cit.) que ce domaine n'admet pas d'autre automorphisme que ceux du groupe précédent. On peut d'ailleurs le vérifier : c'est un domaine cerclé (i.e. stable par les homothéties de rapport $e^{i\theta}$), et l'on sait que tout automorphisme d'un domaine cerclé borné, qui laisse fixe l'origine, est une transformation linéaire sur les variables complexes ; il reste seulement à vérifier, par un calcul élémentaire, que les seules transformations linéaires qui laissent stable $\bar{w}w \ll 1_n$ ont la forme (12).

Revenant à l'espace de Siegel $\mathcal{S}_n$, on voit qu'il n'admet pas d'autre automorphisme analytique-complexe que ceux définis par la formule (9).

3. Invariants différentiels.

On va chercher, dans $\mathcal{S}_n$, des expressions différentielles invariantes par le groupe $G = Sp(n, \mathbb{R})$. Un calcul immédiat montre que si $z' = (az + b)(cz + d)^{-1}$, on a ($\delta z$ et $\delta z'$ désignant les différentielles de z et z')

(13) $$\delta z' = {}^t(cz + d)^{-1}(\delta z)(cz + d)^{-1}$$

(14) $$\mathrm{Im}(z') = {}^t(c\bar{z} + d)^{-1}(\mathrm{Im}\, z)(cz + d)^{-1}$$

Etant donné $z = x + iy$, les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qui transforment z dans le point $i.1_n$ sont celles de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^{-1/2} & -y^{-1/2}x \\ 0 & y^{1/2} \end{pmatrix}$$

où $a - ib$ est la matrice unitaire la plus générale. La formule

(15) $$\delta z' = {}^t(a - ib)^{-1} y^{-1/2}(\delta z)y^{-1/2}(a - ib)^{-1}$$

indique alors comment la transformation considérée applique l'espace des covecteurs tangents au point z sur l'espace des covecteurs tangents au point $i.1_n$. On en déduit

$$\mathrm{Tr}(\delta z'.\delta \overline{z'}) = \mathrm{Tr}(y^{-1/2}(\delta z)y^{-1}(\delta \bar{z})y^{-1/2}) ,$$

et le second membre est aussi égal à $\mathrm{Tr}(y^{-1}(\delta z)y^{-1}(\delta \bar{z}))$. Ceci prouve que la forme différentielle (quadratique hermitienne)

$$\mathrm{Tr}(y^{-1}(\delta z)y^{-1}(\delta \bar{z}))$$

est invariante par le groupe G. Elle ne peut être nulle que si la forme

$$y^{-1/2}(\delta z)y^{-1/2}$$

est nulle, ce qui exige $\delta z = 0$. Donc l'expression (15) définit un ds^2 hermitien, défini positif, invariant par G. On va voir que ce ds^2 est même kählérien.

Pour cela, on considère la forme quadratique extérieure Ω associée au ds^2, à savoir

$$\Omega = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Tr}(y^{-1}\delta z \wedge y^{-1}\delta \bar{z}) = \mathrm{Tr}(y^{-1}\delta y\, y^{-1} \wedge \delta x) \quad ;$$

or $y^{-1}(\delta y)y^{-1} = -\delta(y^{-1})$, de sorte que

$$\Omega = \mathrm{Tr}(\delta x \wedge \delta(y^{-1})) \;. \tag{15}$$

Il s'ensuit que $\delta\Omega = 0$: le ds^2 est bien kählérien.

Si $x = (x_{ij})$ et $y^{-1} = y'_{ij}$, on a

$$\Omega = \sum_i \delta x_{ii} \wedge \delta y'_{ii} + 2\sum_{i<j} \delta x_{ij} \wedge \delta y'_{ij} \quad ;$$

en élevant Ω à la puissance extérieure d'ordre $\frac{n(n+1)}{2}$, on voit que la forme extérieure

$$\Big(\prod_{i\leqslant j} \delta x_{ij}\Big) \wedge \Big(\prod_{i\leqslant j} \delta y'_{ij}\Big)$$

est invariante par G (le symbole $\prod$ désigne un produit extérieur). Nous avons ainsi trouvé, dans l'espace $\mathfrak{S}_n$, l'<u>élément de volume invariant par</u> G, lequel, comme on sait, est bien défini à un facteur constant près. On voit que cet élément de volume invariant est le produit des éléments de volume euclidien de l'espace de x et de l'espace de y^{-1} (en posant toujours $z = x + iy$).

4. <u>Sous-groupes remarquables</u>.

Dans $G = Sp(n, \mathbb{R})$, on considèrera, outre $K = Sp(n, \mathbb{R}) \cap O(2n, \mathbb{R})$, les sous-groupes suivants :

T : sous-groupe des $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tels que $c = 0$; les transformations de $\mathfrak{S}_n$ définies par T sont les suivantes

$$z \longrightarrow a(z+s)\,{}^t a \,, \quad a \text{ inversible}, \quad s \text{ symétrique}.$$

Le groupe T possède un sous-groupe invariant U, formé des matrices $\begin{pmatrix} 1_n & s \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}$, où s est symétrique ; les transformations de U sont les translations $z \longrightarrow z + s$. Le groupe T est produit direct croisé de U et du sous-groupe H formé des transformations

$$z \longrightarrow az\,{}^t a \,, \quad a \text{ inversible}.$$

Pour que deux matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ appartiennent à la même classe à droite suivant U, il faut et il suffit que $c = c'$, $d = d'$.

Le groupe modulaire Γ se compose du sous-groupe de G formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à éléments entiers. Il possède les sous-groupes suivants :

$T \cap \Gamma$ définit les transformations $z \longrightarrow a(z+s)^t a$, où s est symétrique à éléments entiers, et $\pm a$ est unimodulaire à coefficients entiers (en effet, a et $d = {}^t a^{-1}$ sont à coefficients entiers)

$U \cap \Gamma$ définit les translations $z \longrightarrow z + s$, s symétrique entière ;
$H \cap \Gamma$ définit les "homothéties" $z \longrightarrow az\,{}^t a$, où $\pm a$ est unimodulaire entière.

Si z' est transformé de z par une transformation de $T \cap \Gamma$, on a, d'après (14) :

(16) $$\operatorname{Im} z' = a(\operatorname{Im} z)^t a\,, \qquad \text{d'où} \quad \det(\operatorname{Im} z') = \det(\operatorname{Im} z)\,.$$

5. Définition d'une famille d'ouverts fondamentaux.

A chaque nombre réel $u > 0$ associons l'ouvert $\Omega(u)$ de $\mathfrak{S}_n$ défini comme suit : étant donné $z = x + iy$, notons x_{jk} les éléments de la matrice symétrique x, et mettons y^{-1} sous la forme ${}^t w d w$, où d est une matrice diagonale (à éléments $d_i > 0$), et w une matrice triangulaire au sens strict, c'est-à-dire

$$w_{ii} = 1\,, \quad w_{ij} = 0 \quad \text{pour} \quad j < i$$

(cf. Exposé 1, p. 7-8). Alors, par définition, $\Omega(u)$ se compose des $z = x + iy$ satisfaisant aux inégalités (en nombre fini) :

(i) $$|x_{jk}| < u$$

(ii) $$\begin{cases} 0 < d_i < u d_{i+1} & \text{pour} \quad 0 < i < n \\ |w_{ij}| < u \end{cases}$$

(iii) $$0 < d_n < u\,.$$

(Les inégalités (ii) expriment que $y^{-1} \in S'(u)$, avec les notations de l'exposé 1, p. 8).

THÉORÈME. - Pour $u > 0$ assez grand, l'ouvert $\Omega(u)$ est un ouvert fondamental pour le groupe modulaire Γ. D'une façon précise (cf. les conditions '(M) de l'Exposé 2, p. 1) :

(a) pour tout $u > 0$, la mesure invariante de $\Omega(u)$ est finie ;
(b) si une matrice symplectique M appartient à Γ (notation de l'Exposé 2, p. 1) il n'existe qu'un nombre fini de $M_i \in \Gamma$ telles que $M_i . \Omega(u)$ rencontre $M . \Omega(u)$;

(c) <u>si</u> $u > 0$ <u>est assez grand, l'espace de Siegel est réunion des transformés de</u> $\Omega(u)$ <u>par les</u> $M \in \Gamma$.

L'assertion (a) est presque évidente : les inégalités (i), (ii), (iii) entraînent en effet que l'image de $\Omega(u)$ dans l'espace (x, y^{-1}) est bornée ; donc cette image a un volume euclidien fini.

On va démontrer (b). Observons d'abord que $\tilde{\Gamma}$ est le groupe des matrices symplectiques à coefficients rationnels. On a vu (paragraphe 1) que l'application qui, à chaque $z = x + iy \in \mathcal{S}_n$, associe la matrice P^{-1} définie par (10'), est un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n$ sur l'espace $\mathcal{P}_n$ des matrices symplectiques, symétriques et $\gg 0$. Le groupe $G = Sp(n, \mathbb{R})$ opère sur $\mathcal{P}_n$ par

$$(M, Q) \longrightarrow {}^tM^{-1}QM^{-1}, \quad M \in G, \quad Q \in \mathcal{P}_n .$$

Soit $\Lambda(u)$ l'ouvert de $\mathcal{P}_n$, image de $\Omega(u)$ par l'homéomorphisme $\mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{P}_n$. Dans l'espace de toutes les matrices réelles, symétriques et $\gg 0$ à $2n$ lignes et $2n$ colonnes, considérons les ouverts $S'(v)$ (notation de l'Exposé 1, p. 8). Soit π la matrice unimodulaire

$$\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & e_n \end{pmatrix}$$

où $(e_n)_{i,j} = \delta_{i,n+1-j}$ (symbole de Kronecker). On a $\pi^{-1} = {}^t\pi = \pi$. On voit facilement que les inégalités (i), (ii), (iii) expriment que si $z \in \Omega(u)$, la matrice P^{-1} définie par (10') satisfait à

$$\pi P^{-1} \pi \in S'(v)$$

pour un $v > 0$ convenable (dépendant seulement de u). Or si $M \in \tilde{\Gamma}$, il n'existe qu'un nombre fini de M_i (unimodulaire à coefficients entiers) telles que $M_i . S'(v)$ rencontre $M.S'(v)$: cela résulte du théorème de Siegel (cf. Exposé 1, p. 8). L'assertion (b) de l'énoncé en résulte.

Il reste à prouver l'assertion (c) de l'énoncé. Elle va résulter d'une suite de propositions.

PROPOSITION 1. - <u>Etant donné</u> $z \in \mathcal{S}_n$, <u>il existe un</u> $M_0 \in \Gamma$ <u>tel que</u>

$$\det(\mathrm{Im}(Mz)) \leqslant \det(\mathrm{Im}(M_0 z)) \quad \text{pour toute } M \in \Gamma .$$

D'après (16), $\det(\mathrm{Im}(Mz))$ ne dépend que de la classe à droite de M suivant le sous-groupe $T \cap \Gamma$. La proposition 1 résulte alors évidemment de la

PROPOSITION 2. - <u>Pour tout</u> $\alpha > 0$, <u>il n'y a qu'un nombre fini de classes à droite suivant</u> $T \cap \Gamma$, <u>jouissant de la propriété que</u> $\det(\operatorname{Im}(Mz)) \geqslant \alpha$ <u>pour les</u> M <u>d'une telle classe</u>.

Pour prouver la proposition 2, on observe d'abord que, dans chaque classe suivant $T \cap \Gamma$, on peut choisir M de manière que la matrice positive $(\operatorname{Im}(Mz))^{-1}$ soit <u>réduite</u> au sens de Minkowski : car si on pose pour un instant $Mz = z'$, on peut, grâce au groupe des homothéties $H \cap \Gamma$, remplacer z' par $az'\,{}^t a$, où a est unimodulaire entière ; si y' désigne $\operatorname{Im} z'$, y'^{-1} est remplacé par

$$ {}^t a^{-1} y'^{-1} a^{-1} , $$

qui, pour un choix convenable de a , est réduite au sens de Minkowski.

On voit alors que la proposition 2 résultera du

LEMME. - $z \in \mathfrak{S}_n$ <u>étant donné, considérons les</u> $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ <u>telles</u> que $(\operatorname{Im}(Mz))^{-1}$ <u>soit réduite au sens de Minkowski, et que</u> $\det(\operatorname{Im}(Mz)) \geqslant \alpha > 0$. <u>Alors</u> c <u>et</u> d <u>ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs</u>.

Nous admettons provisoirement ce lemme, qui sera établi plus loin. La proposition 1 nous dit alors que chaque point $\mathfrak{S}_n$ est congru, modulo Γ , à un point z tel que

$$ (17) \qquad \det(\operatorname{Im}(Mz)) \leqslant \det(\operatorname{Im} z) \quad \text{pour toute} \quad M \in \Gamma . $$

Observons que, d'après (14), la condition (17) équivaut à

$$ (17') \qquad |\det(cz + d)| \geqslant 1 \quad \text{pour toute matrice} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma . $$

PROPOSITION 3. - <u>La relation</u> (17) <u>entraîne</u> $|z_{nn}| \geqslant 1$.

En effet, on applique (17') dans le cas où

$$ a = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad c = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad d = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} $$

On a alors $cz + d = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ 0 & z_{nn} \end{pmatrix}$, et par suite (17') entraîne $|z_{nn}| \geqslant 1$.

Cela étant, considérons un z satisfaisant à (17). Remplaçant z par $az\,{}^t a$ (a unimodulaire entière convenable), on peut supposer que $(\operatorname{Im} z)^{-1}$ est réduite au sens de Minkowski, sans que (17) cesse d'être vérifiée. On peut ensuite, en remplaçant z par $z + s$ (s matrice symétrique réelle, à coefficients entiers convenables), faire en sorte que la partie réelle x du nouveau z satisfasse à $|x_{jk}| \leq 1/2$; ceci ne modifie pas $(\mathrm{Im}\ z)^{-1}$, et (17) reste vérifiée. On a donc prouvé la

PROPOSITION 4. - <u>Tout point de $\mathcal{S}_n$ est congru, modulo Γ, à un point z de l'ensemble $\mathcal{H}_n$</u> ("domaine fondamental" de Siegel) <u>défini par les conditions suivantes</u> :

1° $\det(\mathrm{Im}(Mz)) \leq \det(\mathrm{Im}\ z)$ pour toute $M \in \Gamma$;

2° $(\mathrm{Im}\ z)^{-1}$ est réduite au sens de Minkowski ;

3° $|x_{jk}| \leq 1/2$, où $x = (x_{jk})$ désigne la partie réelle de z.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver l'assertion (c) du théorème. Il suffit de montrer que les conditions 1°, 2° et 3° de la proposition 4 entraînent les conditions (i), (ii), (iii) du théorème, dès que $u > 0$ est assez grand. Or on sait (Exposé 1) que la condition 2° implique que $(\mathrm{Im}\ z)^{-1} \in S'(u)$ pour un u convenable, autrement dit : 2° entraîne (ii). Il est trivial que 3° entraîne (i) pour $u > 1/2$. Enfin, 1° et 3° entraînent (d'après la proposition 3)

$$|z_{nn}| \geq 1 \quad \text{et} \quad |x_{nn}| \leq 1/2 \text{, d'où } y_{nn} \geq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

et comme $d_{nn} = (y_{nn})^{-1}$, (iii) est vérifiée lorsque $u > \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Ainsi la démonstration du théorème est achevée, à cela près qu'il reste à établir le lemme qui a été provisoirement admis. Posons $Mz = z'$, $\mathrm{Im}\ z = y$, $\mathrm{Im}\ z' = y'$. A l'aide de (14), on vérifie que

$$y'^{-1} = (cx + d)y^{-1}(x\,{}^tc + {}^td) + cy\,{}^tc .$$

Soient u_{ii} les éléments diagonaux de y'^{-1} ; on a

$$u_{ii} = (c_ix + d_i)y^{-1}(x\,{}^tc_i + {}^td_i) + c_iy\,{}^tc_i , \tag{18}$$

en notant c_i et d_i les i-ièmes lignes des matrices c et d ; chacun des deux termes du second membre est ≥ 0. Lorsque M parcourt le sous-groupe discret Γ, les u_{ii} sont minorés par un nombre >0 fixe (une fois z donné) : car, y étant ≥ 0, $cy\,{}^tc$ est minoré par un nombre >0 fixe lorsque $c \neq 0$ (puisque c est à éléments entiers) ; et pour $c = 0$, $d(y^{-1})^td$ est minoré par un nombre >0 fixe lorsque $d \neq 0$ est à éléments entiers. Si maintenant on suppose que y'^{-1} est réduite au sens de Minkowski, le produit des u_{ii} est majoré par un nombre fixe, puisque $\det y'^{-1} \leq \alpha^{-1}$ par hypothèse. De là résulte que chacun des u_{ii} est majoré ; mais ceci implique, d'après (18), que c_i et d_i ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs (car dès que l'une des composantes de c_i est assez grande, $c_i y\,{}^tc_i$ est grand ; et si les composantes de c_i restent bornées, et que l'une au moins des composantes de d_i est grande, $(c_i x + d_i)y^{-1}(x\, {}^tc_i + {}^td_i)$ est grand).

Le lemme est donc démontré.

6. Les groupes paramodulaires.

Sur l'espace $\mathbb{R}^{2n}$, considérons un lattice Λ, et, au lieu de la forme alternée $J(x, y)$ du n° 1, considérons une forme alternée non dégénérée $F(x, y)$, à valeurs entières sur Λ. Soit G_f le groupe des matrices réelles qui conservent F, et Γ_f le sous-groupe des matrices transformant Λ en lui-même. On sait, par la théorie des diviseurs élémentaires, qu'on peut choisir une base de manière que Λ soit le lattice des points à coordonnées entières, et que F prenne la forme canonique

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \delta_i(x_i y_{n+i} - y_i x_{n+i}) \text{ , les } \delta_i \text{ étant entiers } \neq 0 \text{ .}$$

Supposons donc que F ait cette forme, et que Λ soit le lattice des points entiers; par le changement de variables

$$x'_i = x_i \text{ , } x'_{n+i} = \delta_i x_{n+i} \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \text{ ,}$$

la forme F devient à nouveau la forme J du paragraphe 1, et G_f devient donc le groupe symplectique $G = Sp(n, \mathbb{R})$. Quant au sous-groupe discret Γ_f, il devient le groupe des matrices symplectiques M telles que $\Delta M \Delta^{-1}$ ait ses éléments entiers, en notant Δ la matrice $\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, où δ désigne la matrice diagonale ayant pour éléments les entiers δ_i. Ainsi Γ_f devient le sous-groupe Γ_δ du groupe symplectique formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que les matrices

$$a \text{ , } b\delta^{-1} \text{ , } \delta c \text{ , } \delta d \delta^{-1}$$

soient à éléments entiers. Un tel groupe Γ_δ s'appellera un groupe paramodulaire.

Il résulte des considérations générales de l'Exposé 2 qu'un tel groupe paramodulaire est minkowskien dans $Sp(n, \mathbb{R})$, c'est-à-dire satisfait à la condition (M) (Exposé 2, page 1). Mais il ne semble pas qu'en général il existe dans $\mathfrak{S}_n$ un ouvert fondamental (pour le groupe Γ_δ considéré) dans lequel y^{-1} soit borné, comme c'était le cas pour le groupe modulaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Elie). - Oeuvres complètes. - Paris, Gauthier-Villars, 1952-1955. 3parties en 6 volumes.

[2] SIEGEL (C.L.). - Einfünhrung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, Math. Annalen, t. 116, 1939, p. 617-657.

[3] SIEGEL (C.L.). Symplectic Geometry, Amer. J., t. 65, 1943, p. 1-86.