

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

HENRI CARTAN

Théorie des fibrés principaux

Séminaire Henri Cartan, tome 9 (1956-1957), exp. n° 4, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1956-1957__9__A4_1>

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1956-1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORIE DES FIBRÉS PRINCIPAUX,

par Henri CARTAN

N.B. - Ce qui suit est la rédaction d'un exposé qui n'a pas plus eu lieu que l'exposé n° 3.

1. Relèvements dans les fibrés.

DÉFINITION. - Soit $p : X \rightarrow B$ un fibré au sens de Kan (cf. Exp. 1, p. 1-08 ; désormais nous dirons simplement "fibré"). Une application $\rho : B \rightarrow X$ s'appelle un relèvement si elle satisfait aux conditions suivantes

- (1) $p \circ \rho = \text{identité}$, $s_i \rho = \rho s_i$, $d_{i+1} \rho = \rho d_{i+1}$ pour $i \geq 0$
(on ne suppose donc pas que $d_0 \rho = \rho d_0$).

PROPOSITION 1. - Si $p : X \rightarrow B$ est fibré, et si B est connexe, il existe des relèvements. D'une façon précise, soit B' un sous-ensemble simplicial de B , et soit donné un relèvement $\rho' : B' \rightarrow p^{-1}(B')$; alors il existe un relèvement $\rho : B \rightarrow X$ qui prolonge ρ' .

La première partie de cet énoncé avait été affirmée sans démonstration, dans un cas particulier, au bas de la page 10 de l'Exposé 1 ; nous allons ici faire une démonstration complète.

Tout d'abord, l'application p est surjective sur les éléments de dimension 0 (on suppose, bien entendu, que X n'est pas vide) : cela résulte de la condition de Kan (Exposé 1, p. 1-06) appliquée aux éléments de dimension $n = 1$. Cela étant on va prouver par récurrence sur n , l'assertion suivante :

(R_n) Il existe, pour chaque dimension $q \leq n$, une application $\rho : B_q \rightarrow X_q$ qui prolonge ρ' , et satisfait à

$$(2) \quad \begin{cases} p \rho b = b & \text{pour } b \in B_q, \quad q \leq n, \\ \rho d_i b = d_i \rho b & \text{pour } i \geq 1, \quad b \in B_q, \quad 1 \leq q \leq n \\ \rho s_i b = s_i \rho b & \text{pour } i \geq 0, \quad b \in B_q, \quad q < n. \end{cases}$$

L'assertion (R_0) est vraie, puisque $p : X_0 \rightarrow B_0$ est surjective. Supposons qu'on ait prouvé (R_n) , et démontrons (R_{n+1}) . Il s'agit de définir ρb pour $b \in B_{n+1}$. Si $b \in B'_{n+1}$, on pose $\rho b = \rho' b$. Supposons désormais que $b \in B_{n+1}$; on va distinguer deux cas, suivant que b est dégénéré ou ne l'est pas.

PREMIER CAS. - $b \in B_{n+1}$ est dégénéré. On a donc $b = s_i y$, avec $y \in B_n$. Si l'on veut satisfaire à la dernière condition (2), il faut poser $\rho b = s_i \rho y$. Ceci définira bien ρb , si l'on prouve que la relation $s_i y = s_j z$ ($y, z \in B_n$) entraîne $s_i \rho y = s_j \rho z$. Montrons-le : si $i = j$, on trouve (en appliquant d_i à la relation $s_i y = s_i z$) que $y = z$, d'où $s_i \rho y = s_i \rho z$. Supposons donc $i < j$; de $s_i y = s_j z$ on déduit

$$z = d_{j+1} s_i y = s_i d_j y,$$

d'où

$$s_i y = s_j z = s_j s_i d_j y = s_i s_{j-1} d_j y.$$

Appliquons d_i aux deux membres de la relation $s_i y = s_i s_{j-1} d_j y$; il vient

$$(3) \quad y = s_{j-1} d_j y.$$

Alors $s_j \rho z = s_j \rho s_i d_j y = s_j s_i \rho d_j y = s_i s_{j-1} \rho d_j y = s_i \rho s_{j-1} d_j y$, et ceci, compte tenu de (3), est égal à $s_i \rho y$.

C.Q.F.D.

DEUXIÈME CAS. - $b \in B_{n+1}$ n'est pas dégénéré. Alors, d'après la condition de Kan, il existe un $x \in X_{n+1}$ satisfaisant à

$$(4) \quad px = b, \quad d_i x = \rho d_i b \quad \text{pour } i \geq 1.$$

En effet, il suffit de vérifier que ces données sont consistantes, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} p \rho d_i b &= d_i b, \\ d_i (\rho d_j b) &= d_{j-1} (\rho d_i b) \quad \text{pour } 1 \leq i < j. \end{aligned}$$

Or cela résulte aussitôt des relations (2).

Choisissons un x satisfaisant à (4); on posera $\rho b = x$.

ρ étant ainsi défini sur les éléments $b \in B_{n+1}$, il reste à vérifier que les relations (2) (où n serait remplacé par $n+1$) sont remplies. Si $b \in B'$, elles

le sont puisque ρ' est un relèvement. Supposons donc que $b \notin B'$; si $b = s_i y$ ($y \in B_n$), on a

$$p \rho b = p s_i \rho y = s_i p \rho y = s_i y = b ;$$

si b n'est pas dégénéré, la relation $p \rho b = b$ est vraie par construction.

Soit à vérifier maintenant que $\rho d_i b = d_i \rho b$ pour $b \in B_{n+1}$, $i \geq 1$; si $b = s_j z$, on a bien $\rho d_i s_j z = d_i s_j \rho z$ (distinguer 3 cas, suivant que $i < j$, $i = j$ ou $j + 1$, $i > j + 1$) ; enfin, si b n'est pas dégénéré, la relation $\rho d_i b = d_i \rho b$ est vraie par construction (pour $i \geq 1$). Enfin on a bien $\rho s_i b = s_i \rho b$ pour $i \geq 0$, $b \in B_n$, par construction.

2. Morphismes de fibrés principaux.

Pour la définition d'un fibré principal de groupe G , voir exposé 1 (pages 1-09 et 1-10) ; voir aussi la proposition 2 de l'Exposé 1, p. 1-10, qui affirme qu'un tel "fibré" est fibré au sens de Kan.

Soient donnés deux fibrés principaux X et X' de même groupe G ; appelons morphisme de X dans X' toute application simpliciale $f : X \rightarrow X'$ qui commute aux opérations de G ; alors f induit une application simpliciale $g : B \rightarrow B'$ des bases $B = X/G$ et $B' = X'/G$.

Fibré induit. - Soit X' un fibré principal de groupe G , de base B' ; notons p' la projection $X' \rightarrow B'$. Soit donnée une application simpliciale $g : B \rightarrow B'$. Une telle g définit un fibré induit (ou image réciproque) X de base B , de groupe G : les n -simplexes de X sont les couples (b, x') , où $b \in B_n$ et $x' \in X'_n$ sont tels que $g(b) = p'(x')$; les opérateurs de face et de dégénérescence dans X sont définis par $d_i(b, x') = (d_i b, d_i x')$, $s_i(b, x') = (s_i b, s_i x')$. Les opérations de G dans X sont définies par

$$g.(b, x') = (b, gx') \text{ pour } g \in G_n, b \in B_n, x' \in X'_n.$$

Il est clair que B s'identifie à X/G . L'application $(b, x') \rightarrow x'$ définit un morphisme $f : X \rightarrow X'$, qui par passage aux quotients redonne l'application $g : B \rightarrow B'$.

PROPOSITION 2. - Soit $f : X \rightarrow X'$ un morphisme de fibrés principaux de groupe G , de bases B et B' ; soit $g : B \rightarrow B'$ l'application induite par f . Soit Y le fibré induit par l'application g (Y est donc un fibré principal de base B). Alors l'application f se factorise d'une seule manière en $X \xrightarrow{\varphi} Y \rightarrow X'$, où φ est un morphisme ; de plus, φ est un isomorphisme.

La première assertion est évidente : φ applique nécessairement x dans le couple $(p(x), f(x))$. Pour prouver que φ ainsi définie est un isomorphisme, on définit un morphisme, $\psi : Y \rightarrow X$ comme suit : pour chaque couple $(b, x') \in Y$, il existe un unique élément $x \in X$ tel que $p(x) = b$, $g(x) = x'$ (car il existe un x_1 tel que $p(x_1) = b$; alors $p'g(x_1) = p'(x')$, donc il existe un unique $s \in G$ tel que $sg(x_1) = x'$, c'est-à-dire $g(sx_1) = x'$; on a donc nécessairement $x = sx_1$). Par définition, ψ transforme (b, x') dans cet élément x . Il est immédiat que ψ est un morphisme, et que les composés $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$ sont les applications identiques. Ceci achève la démonstration.

Soient maintenant X et X' deux fibrés principaux de groupe G , de bases B et B' . Notons $X \times_G X'$ le quotient de $X \times X'$ par le groupe G opérant comme suit : $s(x, x') = (sx, sx')$, $s \in G$. Définissons une application simpliciale de $X \times_G X'$ sur $B \times B'$, en envoyant la classe d'équivalence de (x, x') dans $(p(x), p'(x'))$.

PROPOSITION 3. - L'application $X \times_G X' \rightarrow B \times B'$ est fibrée au sens de Kan.

DÉMONSTRATION. - Soient donnés $b \in B_n$ et $b' \in B'_n$, et soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. Soient donnés, pour chaque entier i tel que $0 \leq i \leq n$ et $i \neq k$, des éléments $x_i \in X_{n-1}$ et $x'_i \in X'_{n-1}$ tels que

$$(5) \quad p x_i = d_i b, \quad p x'_i = d_i b',$$

et

$$(6) \quad d_i(x_j, x'_j) = d_{j-1}(x_i, x'_i) \text{ pour } i < j \text{ (} i \neq k, j \neq k \text{)} ;$$

où (x_j, x'_j) et (x_i, x'_i) désignent des classes d'équivalence dans $X \times_G X'$; autrement dit, (6) équivaut à l'existence d'un élément $t_{ij} \in G_{n-2}$ tel que

$$(6') \quad d_i x_j = t_{ij}(d_{j-1} x_i), \quad d_i x'_j = t_{ij}(d_{j-1} x'_i).$$

Pour prouver la condition de Kan, on doit trouver $x \in X_n$ et $x' \in X'_n$ tels que

$$(7) \quad px = b, \quad p'x' = b', \quad d_i(x, x') = (x_i, x'_i) \text{ pour } i \neq k.$$

Choisissons $y \in X_n$ et $y' \in X'_n$ tels que $py = b$, $py' = b'$. Puisque $p d_i y = p x_i$, il existe un $u_i \in G_{n-1}$ tel que $d_i y = u_i x_i$; et de même un $u'_i \in G_{n-1}$ tel que $d_i y' = u'_i x'_i$.

Ecrivons que, pour $i < j$ ($i \neq k, j \neq k$), on a

$$d_i(d_j y) = d_{j-1}(d_i y), \quad d_i(d_j y') = d_{j-1}(d_i y').$$

Il vient

$$(d_i u_j)(d_i x_j) = (d_{j-1} u_i)(d_{j-1} x_i), \quad (d_i u'_j)(d_i x'_j) = (d_{j-1} u'_i)(d_{j-1} x'_i)$$

d'où, compte tenu de (6'),

$$(d_i u_j)t_{ij} = d_{j-1} u_i, \quad (d_i u'_j)t_{ij} = d_{j-1} u'_i,$$

et par suite

$$d_i(u_j u'_j{}^{-1}) = d_{j-1}(u_i u'_i{}^{-1}).$$

Puisqu'un groupe simplicial G est un complexe de Kan, il s'ensuit l'existence d'un $w \in G_n$ tel que

$$(d_i w)u'_i = u_i \quad \text{pour tout } i \neq k.$$

Posons alors $x = y$, $x' = wy'$. On a

$$d_i x = u_i x_i, \quad d_i x' = u_i x'_i \quad \text{pour tout } i \neq k,$$

ce qui entraîne que $d_i(x, x') = (x_i, x'_i)$. Ainsi x et x' satisfont aux relations (7), et la proposition est démontrée.

Soient à nouveau deux fibrés principaux X et X' de même groupe G , de bases B et B' . Soit donnée une application simpliciale $g : B \rightarrow B'$, et cherchons s'il existe un morphisme $f : X \rightarrow X'$ compatible avec G . Désignons par $\gamma : B \rightarrow B \times B'$ l'application simpliciale définie par

$$\gamma(b) = (b, g(b)).$$

PROPOSITION 4. - Les morphismes $f : X \rightarrow X'$ compatibles avec g (s'il en existe) sont en correspondance biunivoque avec les applications simpliciales

$\varphi : B \rightarrow X \times_G X'$ qui "relèvent" γ , c'est-à-dire telles que le composé de φ et de la projection $\pi : X \times_G X' \rightarrow B \times B'$ soit égal à γ .

On va expliciter cette correspondance. Soit f une application simpliciale $X \rightarrow X'$ compatible avec G ; l'application $x \rightarrow (x, f(x))$ induit, par passage aux quotients par G , une application simpliciale $\varphi : B \rightarrow X \times_G X'$ qui, suivie de π , donne $b \rightarrow (b, g(b))$, c'est-à-dire que φ relève γ . Réciproquement, soit $\varphi : B \rightarrow X \times_G X'$ une application simpliciale qui relève γ ; si $x \in X$, l'élément $\varphi p x \in X \times_G X'$ est dans la classe d'un unique élément de $X \times X'$ de la forme (x, x') ; l'application $x \rightarrow x'$ est un morphisme $X \rightarrow X'$ compatible avec G . On vérifie aussitôt que les deux correspondances qu'on vient de définir sont réciproques l'une de l'autre, ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME 1. - Δ_1 désignant l'ensemble $\{0, 1\}$ pourvu de sa structure d'ensemble simplicial (cf. Exposés 1 et 3), tout fibré principal de groupe G , de base $\Delta_1 \times B$, est isomorphe à un fibré principal de la forme $\Delta_1 \times X$ (où X est fibré principal de groupe G et de base B , le groupe G opérant trivialement dans Δ_1).

DÉMONSTRATION. - L'application $\mathcal{S}_0 : \Delta_0 \rightarrow \Delta_1$ (cf. Exposé 3, p. 3-01) identifie B à un sous-ensemble simplicial de $\Delta_1 \times B$. Soit Y un fibré principal de groupe G , de base $\Delta_1 \times B$; soit X le fibré induit au-dessus de B . On va définir un isomorphisme de $\Delta_1 \times X$ sur Y , ce qui établira le théorème. D'après la proposition 2, il suffit de définir un morphisme $\Delta_1 \times X \rightarrow Y$ qui induise sur la base commune $\Delta_1 \times B$ l'application identique.

Soit $Z = (\Delta_1 \times X) \times_G Y = \Delta_1 \times (X \times_G Y)$, de base $\Delta_1 \times B \times \Delta_1 \times B$; soit $\gamma : \Delta_1 \times B \rightarrow \Delta_1 \times B \times \Delta_1 \times B$ l'application diagonale. D'après la proposition 4, il suffit de chercher une application simpliciale

$$\varphi : \Delta_1 \times B \rightarrow Z$$

qui relève l'application diagonale γ , et induise sur B un relèvement donné de l'application diagonale $B \rightarrow B \times B$ (à savoir le relèvement qui correspond à l'injection du fibré X dans le fibré Y). Le relèvement cherché est ainsi assujéti à deux conditions; or le théorème 1 de l'exposé 3 (page 5) affirme l'existence d'un tel relèvement: voir notamment les explications données au début de la démonstration du théorème 1 de l'exposé 3, et les appliquer ici dans le cas où $n = 1$.

Ainsi le théorème 1 est établi.

COROLLAIRE. - Soit X' un fibré principal de groupe G , de base B' ; si deux applications simpliciales $B \rightarrow B'$ sont homotopes (au sens simplicial, bien entendu), les fibrés induits au-dessus de B sont isomorphes (comme fibrés principaux de groupe G).

3. Fonctions tordantes.

Soit X un fibré principal de groupe G , de base B . Tout relèvement $\rho : B \rightarrow X$ (et on sait qu'il en existe; cf. proposition 1) définit un isomorphisme de X sur un "produit tordu" $G \times_{\mathcal{C}} B$ (cf. Exposé 1, p. 1-11). La "fonction tordante" $\mathcal{C}$, qui envoie B_{n+1} dans G_n , est définie en fonction de ρ par la formule

$$(8) \quad d_0 \rho b = (\tau b)(\rho d_0 b) \quad \text{pour tout } b \in B.$$

Elle satisfait aux relations (cf. Exposé 1, p. 1-11)

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau s_0 b = 1_n \text{ pour } b \in B_n \text{ (} 1_n \text{ désigne l'élément neutre de } G_n \text{),} \\ s_i \tau = \tau s_{i+1} \text{ pour } i \geq 0, \\ d_i \tau = \tau d_{i+1} \text{ pour } i \geq 1, \\ d_0 \tau b = (\tau d_1 b)(\tau d_0 b)^{-1}. \end{array} \right.$$

Réciproquement, toute "fonction tordante" τ (satisfaisant aux relations (9)) définit un produit tordu $G \times_{\tau} B$, dans lequel l'opérateur de face d_0 est donné par la formule

$$(10) \quad d_0(s, b) = ((d_0 s)(\tau b), d_0 b) \quad \text{pour } s \in G, b \in B.$$

Et puisque le produit tordu $G \times_{\tau} B$ est, au point de vue ensembliste, un produit $G \times B$, tout produit tordu possède un relèvement canonique, à savoir celui qui envoie $b \in B_n$ dans $(1_n, b)$.

Tout morphisme $f: X \rightarrow X'$ (où X et X' sont fibrés principaux de même groupe G , de bases B et B') et tout relèvement $\rho': B' \rightarrow X'$ définissent un unique relèvement $\rho: B \rightarrow X$ tel que f soit compatible avec ρ et ρ' (i.e : $\rho'g = f\rho$, g désignant l'application $B \rightarrow B'$ induite par f); les fonctions tordantes τ et τ' correspondantes sont liées par la relation

$$(11) \quad \tau = \tau'g.$$

4. Le fibré universel et le classifiant d'un groupe G .

Rappelons que la construction W d'Eilenberg-MacLane associe fonctoriellement à un groupe simplicial G un fibré principal $W(G)$, de base $\bar{W}(G)$, qui s'écrit canoniquement comme un produit tordu $G \times_{\tau} \bar{W}(G)$, avec une fonction tordante $\tau = \tau_W(G)$ (Voir Séminaire CARTAN, t. 7, 1954/55, Exposés 12 et 13). Rappelons les faits suivants : $W(G)$ est un fibré principal X , de base $B = \bar{W}(G)$, muni d'un relèvement $\rho: B \rightarrow X$, et satisfaisant aux deux conditions suivantes :

- (i) B_0 possède un seul élément b_0 ;
- (ii) pour tout entier $n \geq 0$, l'application $d_0 \rho: B_{n+1} \rightarrow X_n$ est une bijection.

Ces deux conditions déterminent entièrement $W(G)$ (comme fibré principal muni d'un relèvement), au moins à un isomorphisme près. (Voir ci-dessous la remarque qui

suit le théorème 2 bis). En fait, on explicite $W(G)$ comme suit : au point de vue ensembliste,

$$W_n(G) = G_n \times G_{n-1} \times \dots \times G_0 = G_n \times \bar{W}_n(G),$$

avec

$$\bar{W}_n(G) = G_{n-1} \times \dots \times G_0 \text{ pour } n \geq 1, \quad \bar{W}_0(G) = \{b_0\}.$$

$p : \bar{W}_n(G) \rightarrow W_n(G)$ est l'application $b \rightarrow (1_n, b)$. On notera p la projection de $W_n(G) = G_n \times \bar{W}_n(G)$ sur son second facteur $\bar{W}_n(G)$. Pour éviter des confusions, notons λ la bijection $\bar{W}_{n+1}(G) \rightarrow W_n(G)$. Alors $\mathcal{U}$ est l'application composée de $\lambda : \bar{W}_{n+1}(G) \rightarrow W_n(G)$ et de la projection de $W_n(G) = G_n \times \bar{W}_n(G)$ sur son premier facteur G_n . Si on connaît déjà les opérateurs d_i et s_i sur $\bar{W}_n(G)$, on en déduit d_i et s_i sur $W_n(G)$ en posant, pour $x \in G_n$, $y \in \bar{W}_n(G)$:

$$\begin{cases} d_0(x, y) = ((d_0 x)(\mathcal{U} y), d_0 y) \\ d_{i+1}(x, y) = (d_{i+1} x, d_{i+1} y) \\ s_i(x, y) = (s_i x, s_i y). \end{cases}$$

Une fois connus les d_i et les s_i sur $W_n(G)$, on les définit sur $\bar{W}_{n+1}(G)$ par les formules

$$(12) \quad \begin{cases} d_0 = p \lambda & (n \geq 2) \\ \lambda d_{i+1} = d_i \lambda & (n \geq 2) \\ \lambda s_0 = p & (n \geq 0) \\ \lambda s_{i+1} = s_i \lambda & (n \geq 1). \end{cases}$$

Ainsi les d_i et les s_i (sur $W_n(G)$ et sur $\bar{W}_n(G)$) sont déterminés par récurrence sur n , à partir de ceux de $W_0(G) = G_0$. Il est utile de remarquer si G est le produit $G_1 \times G_2$ de deux groupes simpliciaux, on a un isomorphisme canonique $W(G_1 \times G_2) \cong W(G_1) \times W(G_2)$.

Nous allons prouver le résultat fondamental que voici :

THÉOREME 2. - Soit X un fibré principal de groupe G , de base B , muni d'un relèvement $\rho : B \rightarrow X$. Il existe un morphisme et un seul $X \rightarrow W(G)$, compatible avec le relèvement ρ et avec le relèvement canonique de $W(G)$.

On va même montrer un résultat plus général. Introduisons la catégorie $\mathcal{C}$ suivante : un objet (X, B, p, ρ, G) est défini par la donnée de deux ensembles

simpliciaux X et B , d'un groupe simplicial G qui opère à gauche dans X (i.e : on a une application simpliciale $G \times X \rightarrow X$ qui satisfait aux axiomes habituels pour les opérations d'un groupe); p est une application simpliciale $X \rightarrow B$ qui satisfait à

$$p(s.x) = p(x) \quad \text{pour } s \in G, x \in X;$$

ρ est une application $B \rightarrow X$ (qui conserve les dimensions) telle que $p \rho$ soit l'identité, et ρ commute avec les d_i ($i \geq 1$) et les s_i ($i \geq 0$). Dans la catégorie $\mathcal{C}$, un morphisme $(X, B, p, \rho, G) \rightarrow (X', B', p', \rho', G')$ est un système (f, g, h) de trois applications simpliciales $f: X \rightarrow X'$, $h: B \rightarrow B'$, $g: G \rightarrow G'$, telles que g soit un homomorphisme de groupes simpliciaux, et que

$$f(s.x) = (gs).(fx), \quad p'f = hp, \quad f\rho = \rho'h.$$

La composition des morphismes est définie par la composition des applications f, g, h .

Observons que la catégorie des fibrés principaux avec relèvement s'identifie à une sous-catégorie de $\mathcal{C}$: celle formée des objets tels que la relation $p(x) = p(y)$ entraîne l'existence d'un unique $s \in G$ tel que $y = s.x$. On va considérer une autre sous-catégorie : celle des objets spéciaux; on dira qu'un objet (X, B, p, ρ, G) est spécial s'il satisfait aux conditions (i) et (ii) énoncées ci-dessus pour $W(G)$.

Soit (X, B, p, ρ, G) un objet spécial; notons S la bijection $X_n \rightarrow B_{n+1}$, réciproque de $d_0 \rho$. Des relations

$$S d_i = d_{i+1} S, \quad S s_i = s_{i+1} S, \quad d_0 S = p, \quad S \rho = s_0 \quad (\text{cf. (12)}),$$

on déduit que S est un opérateur d'homotopie dans X , dont l'homologie est donc triviale (dans ceci le groupe G ne joue d'ailleurs aucun rôle).

Cela dit, le théorème 2 ci-dessus est évidemment un cas particulier du suivant :

THÉORÈME 2 bis. - Soient donnés un fibré principal avec relèvement (X, B, p, ρ, G) , et un objet spécial (X', B', p', ρ', G') . Soit de plus donné un homomorphisme $g: G \rightarrow G'$ de groupes simpliciaux. Alors il existe un morphisme (f, g, h) de (X, B, p, ρ, G) dans (X', B', p', ρ', G') compatible avec g , et un tel morphisme est unique.

DÉMONSTRATION. - On notera d_i et s_i les opérateurs de face et de dégénérescence de X' , comme ceux de X ; on notera S' la bijection réciproque de $d_0 \rho'$.

Pour déterminer $f : X \rightarrow X'$, il suffit de connaître $h : B \rightarrow B'$, car alors

$$(13) \quad f_n(s.(p' b)) = (g_n s).(p' h_n b) \quad \text{pour } s \in G_n, b \in B_n.$$

(On note f_n, g_n, h_n la restriction des applications f, g, h aux éléments de dimension n). Pour que les f_n définies par (13) soient compatibles avec les d_i et les s_i , il faut et il suffit que les h_n le soient, et que

$$d_0 p' h_n b = (g_{n-1} \circ b).(p' d_0 h_n b) \quad \text{pour } b \in B_n, n \geq 1.$$

En introduisant S' , ceci s'écrit

$$(14) \quad h_n b = S'((g_{n-1} \circ b).(p' h_{n-1} d_0 b)).$$

Or la relation (14) détermine h_n , par récurrence sur n , à partir de $n = 0$; pour $n = 0$, h_0 est unique, puisque B'_0 a un seul élément b'_0 par hypothèse. Il reste à vérifier que les h_n définis par récurrence par la formule (14) sont bien compatibles avec les d_i et les s_i . Ceci revient à vérifier

$$(15) \quad h_n s_i = s_i h_{n-1}, \quad d_i h_n = h_{n-1} d_i \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Pour cela, on tiendra compte des relations

$$(16) \quad S' d_i = d_{i+1} S', \quad S' s_i = s_{i+1} S', \quad d_0 S' = p', \quad S' p' = s_0$$

ainsi que des relations (9).

Commençons par la première des relations (15);

$$\begin{aligned} h_n s_0 b &= S'((g_{n-1} \circ s_0 b).(p' h_{n-1} d_0 s_0 b)) \\ &= S' p' h_{n-1} b = s_0 h_{n-1} b; \end{aligned}$$

et, pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} h_n s_{i+1} b &= S'((g_{n-1} \circ s_{i+1} b).(p' h_{n-1} d_0 s_{i+1} b)) \\ &= S'((s_i g_{n-2} \circ b).(s_i p' h_{n-2} d_0 b)) \\ &= S' s_i ((g_{n-2} \circ b).(p' h_{n-2} d_0 b)) = s_{i+1} h_{n-1} b. \end{aligned}$$

Quant aux relations (15) qui concernent d_i , elles sont triviales pour $n = 1$ (puisque B'_0 a un seul élément); supposons donc $n \geq 2$:

$$d_0 h_n b = p'((g_{n-1} \circ b).(p' h_{n-1} d_0 b)) = h_{n-1} d_0 b,$$

$$d_{i+1} h_n = d_{i+1} S' f_{n-1} d_0 p' = S' d_i f_{n-1} d_0 p';$$

par récurrence, on a déjà $d_i f_{n-1} = f_{n-2} d_i$, d'où

$$d_{i+1} h_n = S' f_{n-2} d_1 d_0 \rho = S' f_{n-2} d_0 d_{i+1} \rho = S' f_{n-2} d_0 \rho d_{i+1} = h_{n-1} d_{i+1}$$

Ceci achève la démonstration du théorème 2 bis, et par conséquent celle du théorème 2.

REMARQUE. - Deux fibrés principaux avec relèvement qui satisfont à (i) et (ii) et ont le même groupe G sont canoniquement isomorphes, comme le montre une double application du théorème 2 bis. Ceci exprime précisément l'unicité (à un isomorphisme près) de $W(G)$ pour un G donné.

5. Classification des fibrés principaux de base donnée B et de groupe donné G .

PROPOSITION 5. - Soient donnés B et G . A chaque application simpliciale $h : B \rightarrow \bar{W}(G)$ associons la fonction tordante $B \rightarrow G$, composée de h et de $\tau_{\bar{W}(G)} : \bar{W}(G) \rightarrow G$. Ceci définit une bijection $\bar{\Phi}$ de l'ensemble $\text{Hom}_0(B, \bar{W}(G))$ sur l'ensemble des fonctions tordantes $B \rightarrow G$.

En effet, on va définir une application $\bar{\Psi}$ de l'ensemble des fonctions tordantes $B \rightarrow G$ dans $\text{Hom}_0(B, \bar{W}(G))$, comme suit ; à chaque produit tordu $G \times_{\rho} B$ on associe l'unique morphisme $G \times_{\rho} B \rightarrow W(G)$ défini au théorème 2, ce qui induit une application simpliciale $B \rightarrow \bar{W}(G)$. Il est immédiat que $\bar{\Phi} \bar{\Psi}$ est l'application identique de l'ensemble des fonctions tordantes, et que $\bar{\Psi} \bar{\Phi}$ est l'application identique de $\text{Hom}_0(B, \bar{W}(G))$. Donc $\bar{\Phi}$ est une bijection.

PROPOSITION 6. - Soit X un fibré principal de groupe G , de base B , et soit B' un sous-ensemble simplicial de B . Soit X' le fibré induit par X au-dessus de B' ; alors tout morphisme $X' \rightarrow W(G)$ peut se prolonger en un morphisme $X \rightarrow W(G)$ (il s'agit de morphisme de fibrés principaux, sans autre structure).

En effet, la donnée d'un morphisme $f' : X' \rightarrow W(G)$ détermine un relèvement $\rho' : B' \rightarrow X'$ compatible avec le relèvement canonique de $W(G)$. Ce relèvement peut se prolonger en un relèvement $\rho : B \rightarrow X$, d'après la proposition 1. Or ρ définit (théorème 2) un morphisme $f : X \rightarrow W(G)$ compatible avec ρ ; en vertu de l'unicité, f prolonge f' .

THEOREME 3. - Tout fibré principal X de base B , de groupe G , est isomorphe à un fibré induit par une application simpliciale convenable $h : B \rightarrow \bar{W}(G)$. Pour que deux applications h et h' définissent des fibrés isomorphes, il faut et il suffit que h et h' soient homotopes.

DÉMONSTRATION. - Choisissons un relèvement $\rho: B \rightarrow X$, ce qui est possible (proposition 1). D'après le théorème 2, ρ définit un morphisme $X \rightarrow W(G)$, lequel induit une application simpliciale $h: B \rightarrow \bar{W}(G)$. Alors X est isomorphe au fibré induit par l'application h (proposition 2).

Si h et h' sont homotopes, les fibrés induits sont isomorphes (corollaire au théorème 1). Réciproquement, supposons que les fibrés induits par deux applications $h, h': B \rightarrow \bar{W}(G)$ soient isomorphes : cela signifie qu'il existe un fibré principal X , de groupe G , de base B , et deux morphismes $f, f': X \rightarrow W(G)$ qui, par passage aux quotients, donnent naissance à h et h' . Considérons le fibré principal $\Delta_1 \times X$ (comme dans le théorème 1) ; les applications ϱ_0 et $\delta_1: \Delta_0 \rightarrow \Delta_1$ (cf. Exposé 3, bas de la page 3-01) définissent deux injections λ_0 et λ_1 de X dans $\Delta_1 \times X$. La réunion des images de λ_0 et λ_1 est un sous-fibré Y de $\Delta_1 \times X$; f et f' définissent un morphisme du sous-fibré Y dans $W(G)$. D'après la proposition 6, ce morphisme peut se prolonger en un morphisme $\Delta_1 \times X \rightarrow W(G)$; ce dernier induit une application simpliciale des bases : $\Delta_1 \times B \rightarrow \bar{W}(G)$, qui prolonge h et h' . Donc h et h' sont homotopes.

COROLLAIRE. - Pour que deux fonctions tordantes $E \rightarrow G$ définissent des fibrés isomorphes, il faut et il suffit que les applications correspondantes $B \rightarrow \bar{W}(G)$ soient homotopes.

Le théorème 3 montre que $W(G)$ joue le rôle de fibré universel pour les fibrés principaux de groupe G , et $\bar{W}(G)$ le rôle de classifiant pour ces fibrés. La donnée d'un fibré principal X de base B et de groupe G définit donc sans ambiguïté un homomorphisme des groupes de cohomologie

$$H^*(\bar{W}(G)) \rightarrow H^*(B),$$

quel que soit le groupe de coefficients. Si on prend les coefficients dans un anneau, on obtient un homomorphisme des algèbres de cohomologie ; son image s'appelle la sous-algèbre caractéristique du fibré X ; c'est une sous-algèbre de l'algèbre de cohomologie $H^*(B)$.

EXEMPLE. - Si G est le complexe singulier du groupe $O(n)$, les coefficients étant les entiers modulo 2, on obtient les classes de Stiefel-Whitney ; si G est le complexe singulier du groupe $U(n)$, les coefficients étant entiers, on obtient les classes de Chern ; etc.