

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

C. CHEVALLEY

Correspondances, I

Séminaire Henri Cartan, tome 8 (1955-1956), exp. n° 9, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A9_1

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1955-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Séminaire E.N.S., 1955/1956
(H. CARTAN et C. CHEVALLEY)

CORRESPONDANCES, I.

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 23.1.1956).

1.- Généralités.

On appelle correspondance (irréductible) entre deux schémas S et S' sur un corps K un objet constitué par un schéma S'' et des morphismes f et f' de S'' dans S et dans S' , étant entendu qu'on considère comme identiques des correspondances (S'', f, f') et (S''_1, f_1, f'_1) quand il existe un isomorphisme j de S'' sur S''_1 tel que $f = j \circ f_1$, $f' = j \circ f'_1$. On dit qu'une localité $M \in S$ et une localité $M' \in S'$ se correspondent par la correspondance (S'', f, f') quand il existe une localité $M'' \in S''$ telle que $f(M'') = M$, $f'(M'') = M'$.

Proposition 1. - Soit $\Gamma = (S'', f, f')$ une correspondance entre S et S' . Si C est une partie constructible de S , l'ensemble C' des localités de S' qui correspondent par Γ à des localités de C est constructible; si C est dense dans S et si $f'(S'')$ est dense dans S' , C' est dense dans S' .

On a $C' = f'(\bar{f}^{-1}(C))$; comme f est continue, $\bar{f}^{-1}(C)$ est constructible, et il en est de même de C' (exposé 7, théorème 3). Si C est dense dans S , $\bar{f}^{-1}(C)$ est dense dans S'' , donc contient une partie ouverte non vide de S'' ; si en outre $f'(S'')$ est dense dans S' , il en résulte que C' est dense dans S' , (exposé 7, théorème 3).

Corollaire : L'ensemble des localités M' de S' telles que toutes les localités de S auxquelles M' correspond soient dans C est constructible.

Cela résulte immédiatement de la proposition 1 et du fait que le complémentaire d'une partie constructible d'un schéma est constructible.

Soit $\Gamma = (S'', f, f')$ une correspondance entre S et S' . Les adhérences dans S et S' des ensembles $f(S'')$ et $f'(S'')$ sont des ensembles fermés irréductibles ; soient T et T' les schémas induits sur ces ensembles par S et par S' . Si i et i' sont les applications canoniques de T dans S et de T' dans S' , on a $f = g \circ i$, $f' = g' \circ i'$, où g et g' sont des morphismes de S'' dans T et T' ; (S'', g, g') est alors une correspondance entre T et T' . Pour que des localités M, M' de S, S' se correspondent par Γ , il est nécessaire et suffisant qu'il existe des localités $N \in T$, $N' \in T'$ qui se correspondent par (S'', g, g') telles que $i(N) = M$, $i'(N') = M'$; on dit que Γ est non dégénérée si $T = S$, $T' = S'$. Les corps des fractions F de T et F' de T' s'identifient à des sous-corps du corps des fractions F'' de S'' ; S'', T et T' peuvent donc être considérés comme des schémas du corps F'' . S'' domine T et T' et g et g' sont les applications de domination. Soit T''_0 le joint de T et T' ; T''_0 domine donc T et T' . Soient g_0 et g'_0 les applications de domination de T''_0 dans T et dans T' ; (T''_0, g_0, g'_0) est donc une correspondance entre T et T' . Si h est l'application de domination de S'' dans T''_0 , on a $g = g_0 \circ h$, $g' = g'_0 \circ h$; pour qu'une localité $N \in T$ corresponde à une localité $N' \in T'$ par (S'', g, g') , il faut et suffit qu'il existe une localité N'' de T''_0 qui appartienne à $h(S'')$ et satisfasse à $g_0(N'') = N$, $g'_0(N'') = N'$. On dit que Γ est une correspondance maximale si $S'' = T''_0$.

Proposition 1 bis. - Soit Γ une correspondance maximale entre S et S' , et soit C une partie fermée de S . Si S est complet, l'ensemble des localités de S' qui correspondent par Γ à des localités de C est fermé.

Tenant compte de ce que tout schéma induit par un schéma complet est complet (exposé 6, théorème 3), on se ramène immédiatement au cas où Γ n'est pas dégénérée. Supposons qu'il en soit ainsi ; $\bar{f}^{-1}(C)$ est fermé dans S'' , et l'assertion résultera du théorème 1 bis, exposé 8, si nous établissons le :

Lemme 1 : Soient S et S' des schémas d'un même corps, S'' leur joint ; si S est complet, S'' est complet au-dessus de S' .

Démonstration du lemme : Soit V un anneau de valuation du corps des fractions de S'' qui domine une localité M' de S' ; puisque S est complet, V domine une localité M de S ; comme V domine M et M' , il domine au moins une localité de S'' .

Soit Γ une correspondance entre S et S' ; si $M \in S$, l'ensemble des localités de S' qui correspondent à M n'est en général pas constructible (on notera que l'ensemble $\{M\}$ n'est pas constructible si $\dim M > 0$). On a cependant le résultat suivant :

Proposition 2.- Soit Γ une correspondance entre S et S' , et soit M une localité de S ; les localités de S' qui correspondent à M sont alors toutes des spécialisations d'un nombre fini d'entre elles.

On peut manifestement supposer Γ non dégénérée. Soit $\Gamma = (S'', f, f')$; il suffira de montrer que $\bar{f}^{-1}(M)$ se compose de spécialisations d'un nombre fini de ses éléments. Soit S un schéma affine contenu dans S et contenant M ; $\bar{f}^{-1}(S)$ est alors un schéma contenu dans S'' et contenant $\bar{f}^{-1}(M)$. Représentons S'' comme réunion d'un nombre fini de schémas affines S''_j ; il suffira de montrer que, pour tout j , $\bar{f}^{-1}(M) \cap S''_j$ se compose de spécialisations d'un nombre fini de ses éléments. On peut donc supposer que S et S'' sont des schémas affines d'algèbres A et A'' tels que S'' domine S (d'où $A \subset A''$). On a $M = A_{\underline{m}}$, où \underline{m} est un idéal premier de A ; les éléments de $\bar{f}^{-1}(M)$ sont les $A''_{\underline{m}''}$, où \underline{m}'' parcourt les idéaux premiers de A'' tels que $A \cap \underline{m}'' = \underline{m}$. On a alors $A'' \subset M[A''] \subset A''_{\underline{m}''}$, et $A''_{\underline{m}''}$ est l'anneau local de l'idéal premier $\underline{r}(A''_{\underline{m}''}) \cap M[A''] = \underline{n}$ de $M[A'']$ qui contient $\underline{r}(M)$. Réciproquement, si un idéal premier \underline{n} de $M[A'']$ contient $\underline{r}(M)$, $\underline{m}'' = \underline{n} \cap A''$ est un idéal premier de A'' dont l'intersection avec A est \underline{m} , et \underline{n} est l'idéal engendré par \underline{m}'' dans $M[A'']$ (car $M[A'']$ est anneau des fractions d'une partie multiplicativement stable non vide ne contenant pas 0 de A''), d'où $(M[A''])_{\underline{n}} = A''_{\underline{m}''}$. Or, l'anneau $M[A'']$ est noethérien ; les idéaux premiers de cet anneau qui contiennent $\underline{r}(M)$ sont ceux qui contiennent l'un au moins des idéaux premiers minimaux, qui sont en nombre fini, de l'idéal engendré par $\underline{r}(M)$ dans $M[A'']$, ce qui démontre la proposition 2.

Proposition 3.- Soit Γ une correspondance non dégénérée entre des schémas S et S' . Il y a une partie ouverte non vide U de S qui possède la propriété suivante : si une localité $M \in U$ correspond à une localité $M' \in S'$ et si M est une spécialisation d'une localité N de S , il y a une localité $N' \in S'$ qui correspond à N et dont M' est une spécialisation.

Soit $\Gamma = (S'', f, f')$; il résulte de la remarque terminale de l'exposé 8 qu'il y a une partie ouverte non vide U de S telle que si $M = f(M'') \in U$ (avec $M'' \in S''$) est spécialisation d'une localité $N \in S$, il y ait une localité

$N'' \in S''$ telle que $f(N'') = N$ et que M'' soit spécialisation de N'' . Si $M \in U$ correspond à $M' \in S'$, il y a un $M'' \in S''$ tel que $f(M'') = M$, $f'(M'') = M'$; N'' étant comme ci-dessus, $N' = f'(N'')$ correspond à N et M' est une spécialisation de N' .

2.- Correspondances induites.

Soit $\Gamma = (S'', f, f')$ une correspondance entre S et S' ; soient M et M' des localités qui se correspondent par Γ , et soit M'' une localité de S'' telle que $f(M'') = M$, $f'(M'') = M'$. Soit $\mathcal{Y}^{\sim}(M'')$ (resp. $\mathcal{Y}^{\sim}(M)$, $\mathcal{Y}^{\sim}(M')$) l'ensemble des spécialisations de M'' (resp. M , M') dans S'' (resp. S , S'); soient T, T', T'' les schémas induits par S, S', S'' sur $\mathcal{Y}^{\sim}(M), \mathcal{Y}^{\sim}(M'), \mathcal{Y}^{\sim}(M'')$. Si i, i', i'' sont les applications canoniques de T, T', T'' dans S, S', S'' , il y a des morphismes g et g' de T'' dans T et T' tels que $i \circ g = f \circ i''$, $i' \circ g' = f' \circ i''$; g et g' sont des applications de domination. On dit que la correspondance non dégénérée (T'', g, g') entre T et T' est une correspondance induite par Γ . Cette correspondance dépend non seulement de M et M' , mais du choix de M'' . Si M''_1 est une autre localité de S'' telle que $f(M''_1) = M$, $f'(M''_1) = M'$, et si M''_1 est spécialisation de M'' , on dit que la correspondance induite par M''_1 est une spécialisation de la correspondance induite par M'' .

Si Δ est la correspondance induite définie par M'' , une condition nécessaire et suffisante pour qu'une localité $N \in T$ et une localité $N' \in T'$ se correspondent par Δ est qu'il y ait une spécialisation N'' de M'' dans S'' telle que $f(N'') = i(N)$, $f'(N'') = i'(N')$; s'il en est ainsi, N et N' se correspondent également dans toute correspondance induite dont Δ est une spécialisation. Par contre, si $P \in \mathcal{Y}^{\sim}(M)$ et $P' \in \mathcal{Y}^{\sim}(M')$ se correspondent par $\sum \Gamma$, il n'est pas vrai qu'il existe une correspondance entre $\mathcal{Y}^{\sim}(M)$ et $\mathcal{Y}^{\sim}(M')$, induite par Γ , pour laquelle M et M' se correspondent (voir cependant le lemme 2 ci-dessous).

Dans ce qui suit, nous identifierons plusieurs fois (par abus de langage) les ensembles $\mathcal{Y}^{\sim}(M)$, $\mathcal{Y}^{\sim}(M')$, $\mathcal{Y}^{\sim}(M'')$ aux schémas T, T', T'' .

Proposition 4.- Soit Γ une correspondance entre S et S' , et soient M et M' des localités qui se correspondent par Γ . Toutes les correspondances entre $\mathcal{Y}^{\sim}(M)$ et $\mathcal{Y}^{\sim}(M')$ induites par Γ sont des spécialisations d'un nombre fini d'entre elles.

Soit $\Gamma = (S'', f, f')$; les localités de $\bar{f}^{-1}(M)$ sont des spécialisations

d'un nombre fini d'entre elles, soient M_1'', \dots, M_h'' . Il suffira de montrer que, pour tout i , les localités N'' de $\mathcal{Y}^*(M_i'')$ qui sont telles que $f'(N'') = M'$ sont spécialisations d'un nombre fini d'entre elles. Or, si $M_i'' = f'(M_i''')$, la restriction de f' à $\mathcal{Y}^*(M_i''')$ est un morphisme de domination g_i' du schéma $\mathcal{Y}^*(M_i''')$ dans $\mathcal{Y}^*(M_i'')$; si $M' \notin \mathcal{Y}^*(M_i'')$, M' n'est image par f'^{-1} d'aucune spécialisation de M_i'' ; dans le cas contraire, les localités de $g_i'^{-1}(M')$ sont des spécialisations d'un nombre fini d'entre elles, d'où le résultat.

Proposition 5.- Soit Γ une correspondance maximale entre S et S' . Toute correspondance induite par Γ est alors maximale.

On peut évidemment supposer que $\Gamma = (S'', f, f')$ est non dégénérée, donc aussi que S'' domine S et S' , f et f' étant les applications de domination; S'' est le joint de S et S' . Soient M et M' des localités qui se correspondent par Γ , et M'' une localité de S'' qui domine M et M' . Les corps de fractions $M/\underline{r}(M)$, $M'/\underline{r}(M')$ des schémas induits $\mathcal{Y}^*(M)$, $\mathcal{Y}^*(M')$ s'identifient à des sous-corps du corps des fractions $M''/\underline{r}(M'')$ de $\mathcal{Y}^*(M'')$, et $\mathcal{Y}^*(M'')$ domine $\mathcal{Y}^*(M)$ et $\mathcal{Y}^*(M')$: nous avons à montrer que c'est leur joint. Représentons S (resp. S') comme réunion finie de schémas affines; soient S_1, \dots, S_p (resp. S'_1, \dots, S'_q) ceux de ces schémas qui contiennent M (resp. M'); soit S''_{ij} le joint de S_i et de S'_j . On a alors $M'' \in S''_{ij}$; en effet, puisque M'' domine $M \in S_i$ et $M' \in S'_j$, il domine une localité de S''_{ij} ; comme $M'' \in S''$ et $S''_{ij} \subset S''$, il en résulte que $M'' \in S''_{ij}$. De plus, il y a une représentation de S'' comme réunion finie de schémas affines dans laquelle les S''_{ij} sont les seuls schémas à contenir M'' . Soit T_i (resp. T'_j, T''_{ij}) le schéma induit par S_i (resp. S'_j, S''_{ij}) sur l'ensemble des spécialisations de M (resp. M', M'') dans S_i (resp. S'_j, S''_{ij}); $\mathcal{Y}^*(M)$ (resp. $\mathcal{Y}^*(M'), \mathcal{Y}^*(M'')$) est la réunion des T_i (resp. T'_j, T''_{ij}); il suffira donc de montrer que T''_{ij} est le joint de T_i et T'_j . Or, soient A_i, A'_j les algèbres de S_i, S'_j ; celle de S''_{ij} est $K[A_i, A'_j]$. Si θ est l'application canonique de M'' dans $M''/\underline{r}(M'')$, T_i (resp. T'_j, T''_{ij}) est le schéma affine d'algèbre $\theta(A_i)$ (resp. $\theta(A'_j), \theta(K[A_i, A'_j])$); comme $\theta(K[A_i, A'_j]) = K[\theta(A_i), \theta(A'_j)]$, notre assertion est établie.

3.- Questions de dimension.

Nous nous proposons maintenant d'étudier les dimensions des localités de S' qui correspondent à une localité donnée M de S . Nous allons pour cela d'abord

introduire la notion de dimension d'une correspondance. Soit $\Gamma = (S'', f, f')$ une correspondance entre S et S' . Si Γ est non dégénérée, nous pouvons supposer que S'' domine S et S' , f et f' étant les applications de domination ; nous appellerons alors dimension de la correspondance la dimension du joint de S et S' ; cette dimension est au plus égale à celle de S'' ; elle lui est égale si Γ est maximale, mais peut dans d'autres cas lui être strictement inférieure. Dans le cas général, soient T et T' les adhérences de $f(S'')$ dans S et de $f'(S'')$ dans S' ; il y a une correspondance Γ_1 non dégénérée entre T et T' de la forme (S'', g, g') , et c'est la dimension de cette correspondance que nous appellerons dimension de Γ .

Si Γ est une correspondance entre S et S' , et si une localité $M \in S$ correspond par Γ à une localité $M' \in S'$, nous désignerons par $\delta''(M, M')$ la plus grande des dimensions des correspondances entre $\mathcal{Y}^*(M)$ et $\mathcal{Y}^*(M')$ induites par Γ .

Théorème 1. - Soit Γ une correspondance entre S et S' ; soient M et M' des localités qui se correspondent par Γ . Soit $\delta = \dim M$, $\delta' = \dim M'$, $\delta'' = \delta''(M, M')$. Si h est un entier, soit Z'_h l'ensemble des spécialisations de dimension h de M' qui correspondent à M . L'ensemble Z'_h est dense dans l'ensemble de toutes les spécialisations de M' dans S' si $\delta + \delta' - \delta'' \leq h \leq \delta'$, mais ne l'est pas si $h < \delta + \delta' - \delta''$.

Nous poserons $\Gamma = (S'', f, f')$. Etablissons d'abord le :

Lemme 2 : Il y a une partie relativement ouverte non vide de $\mathcal{Y}^*(M')$, soit V' , telle que, si une localité $N' \in V'$ correspond à M , il y ait au moins une correspondance entre $\mathcal{Y}^*(M)$ et $\mathcal{Y}^*(M')$, induite par Γ , dans laquelle M et N' se correspondent.

Les localités de $\bar{f}^{-1}(M)$ sont des spécialisations d'un nombre fini d'entre elles, soient M''_1, \dots, M''_r . Soit $M'_i = f'(M''_i)$; alors f' induit un morphisme de domination f'_i de $\mathcal{Y}^*(M''_i)$ dans $\mathcal{Y}^*(M'_i)$. L'ensemble $f_i^{-1}(\mathcal{Y}^*(M'_i) \cap \mathcal{Y}^*(M'))$ est fermé dans $\mathcal{Y}^*(M''_i)$; il se compose des spécialisations dans $\mathcal{Y}^*(M''_i)$ d'un certain nombre de localités P''_{ik} ($1 \leq k \leq s_i$) ; supposons que $f'_i(P''_{ik}) = M'$ si $1 \leq k \leq s'_i$, mais que $f'_i(P''_{ik}) \neq M'$ si $k > s'_i$. Soit V' le complémentaire de la réunion des $\mathcal{Y}^*(f'_i(P''_{ik}))$ pour tous les couples (i, k) tels que $k > s'_i$; c'est une partie ouverte non vide de $\mathcal{Y}^*(M')$. Soit N' un élément de V' qui correspond à M ; il y a une localité $N'' \in \bar{f}^{-1}(M)$ telle que $f'(N'') = N'$. Il y a au moins un i tel que $N'' \in \mathcal{Y}^*(M''_i)$; comme $N' \in V'$, il y a un $k \leq s'_i$ tel

que N' soit spécialisation de P''_{ik} . La localité P''_{ik} est spécialisation de M''_i et admet N'' comme spécialisation ; comme $f(M''_i) = f(N'') = M$, il en résulte immédiatement que $f(P''_{ik}) = M$; P''_{ik} définit donc une correspondance entre $\mathcal{Y}(M)$ et $\mathcal{Y}(M')$ induite par Γ , et M et N' se correspondent dans cette correspondance.

Venons-en maintenant à la démonstration du théorème 1. D'après la proposition 4, les correspondances entre $\mathcal{Y}(M)$ et $\mathcal{Y}(M')$ induites par Γ sont des spécialisations d'un nombre fini d'entre elles, et $\delta''(M, M')$ est la plus grande des dimensions de ces dernières. Il suffira donc de démontrer que, si Δ est une correspondance de dimension δ'' , non dégénérée, entre $\mathcal{Y}(M)$ et $\mathcal{Y}(M')$, l'ensemble des éléments de $\mathcal{Y}(M')$ de dimension h qui correspondent à M est dense dans $\mathcal{Y}(M')$ si $\delta + \delta' - \delta'' \leq h \leq \delta'$, mais n'est pas dense si $h < \delta + \delta' - \delta''$.

Autrement dit, nous sommes ramenés à démontrer le théorème 1 dans le cas où M et M' sont respectivement les corps des fractions F de S et F' de S' ; nous désignerons alors par d et d' les dimensions de S et S' , par d'' la dimension de Γ . Il existe une partie ouverte non vide V' de S' telle qu'aucune localité $N' \in V'$ ne soit image par f' d'une localité de dimension $> \dim N' + d'' - d'$ de S'' (Exposé 8, théorème 3). Par ailleurs, toute localité de S'' qui domine F est de dimension $\geq d$. Il en résulte que Z'_h n'est pas dense dans S' si $h < d + d' - d''$. Représentons S' (resp. S'') comme réunion finie de schémas affines S'_j (resp. S''_j) tels que, pour tout j , $f'(S''_j) \subset S'_j$ (Exposé 7, lemme 1) ; pour prouver que Z'_h est dense dans S' , on voit qu'il suffit de considérer le cas où S' et S'' sont des schémas affines. On peut aussi supposer que S'' domine S et S' , f et f' étant les applications de domination.

C'est sous ces hypothèses que l'on achèvera la démonstration du théorème 1, dans l'exposé suivant.
