C. CHEVALLEY
H. CARTAN

Erratum à l'exposé 7

Séminaire Henri Cartan, tome 8 (1955-1956), p. 1
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A9_0>

Séminaire E.N.S., 1955/1956
(H. CARTAN et C. CHEVALLEY)

CORRESPONDANCES, I.

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 23.1.1956).

ERRATUM à l'Exposé 7 :

Page 7-06, premier alinéa du paragraphe 3, remplacer les 4 dernières lignes (à partir de "en effet") par le texte suivant : en effet A' est contenu dans toute spécialisation de P' ; comme, pour toute $M \in S$, φ applique $f(M)$ dans M, φ applique A' dans l'intersection des $M \in S$, donc dans A (Exposé 5, proposition 4).

1.- Généralités.

On appelle correspondance (irréductible) entre deux schémas S et S' sur un corps K un objet constitué par un schéma S'' et des morphismes f et f' de S'' dans S et dans S', étant entendu qu'on considère comme identiques des correspondances (S'', f, f') et (S''_1, f_1, f'_1) quand il existe un isomorphisme j de S'' sur S''_1 tel que $f = j \circ f_1$, $f' = j \circ f'_1$. On dit qu'une localité $M \in S$ et une localité $M' \in S'$ se correspondent par la correspondance (S'', f, f') quand il existe une localité $M'' \in S''$ telle que $f(M'') = M$, $f'(M'') = M'$.

Proposition 1.- Soit $\Gamma = (S'', f, f')$ une correspondance entre S et S'. Si C est une partie constructible de S, l'ensemble C' des localités de S' qui correspondent par Γ à des localités de C est constructible ; si C est dense dans S et si $f'(S'')$ est dense dans S', C' est dense dans S'.

On a $C' = f'(\overline{f}^1(C))$; comme f est continue, $\overline{f}^1(C)$ est constructible, et il en est de même de C' (exposé 7, théorème 3). Si C est dense dans S, $\overline{f}^1(C)$ est dense dans S'', donc contient une partie ouverte non vide de S'' ; si en outre $f'(S'')$ est dense dans S', il en résulte que C' est dense dans S', (exposé 7, théorème 3).

Corollaire : L'ensemble des localités M' de S' telles que toutes les localités de S auxquelles M' correspond soient dans C est constructible.

Cela résulte immédiatement de la proposition 1 et du fait que le complémentaire d'une partie constructible d'un schéma est constructible.

Soit $\Gamma = (S'' , f , f')$ une correspondance entre S et S' . Les adhérences dans S et S' des ensembles $f(S'')$ et $f'(S'')$ sont des ensembles fermés irréductibles ; soient T et T' les schémas induits sur ces ensembles par S et par S' . Si i et i' sont les applications canoniques de T dans S et de T' dans S' , on a $f = g \circ i$, $f' = g' \circ i'$, où g et g' sont des morphismes de S'' dans T et T' ; (S'' , g , g') est alors une correspondance entre T et T' . Pour que des localités M , M' de S , S' se correspondent par Γ , il est nécessaire et suffisant qu'il existe des localités $N \in T$, $N' \in T'$ qui se correspondent par (S'' , g , g') telles que $i(N) = M$, $i'(N') = M'$; on dit que Γ est <u>non dégénérée</u> si $T = S$, $T' = S'$. Les corps des fractions F de T et F' de T' s'identifient à des sous-corps du corps des fractions F'' de S'' ; S'' , T et T' peuvent donc être considérés comme des schémas du corps F'' . S'' domine T et T' et g et g' sont les applications de domination. Soit T''_o le joint de T et T' ; T'' domine donc T''_o . Soient g_o et g'_o les applications de domination de T''_o dans T et dans T' ; (T''_o , g_o , g'_o) est donc une correspondance entre T et T' . Si h est l'application de domination de S'' dans T_o'' , on a $g = g_o \circ h$, $g' = g'_o \circ h$; pour qu'une localité $N \in T$ corresponde à une localité $N' \in T'$ par (S'' , g , g') , il faut et suffit qu'il existe une localité N'' de T''_o qui appartienne à $h(S'')$ et satisfasse à $g_o(N'') = N$, $g'_o(N'') = N'$. On dit que Γ est une <u>correspondance maximale</u> si $S'' = T''_o$.

<u>Proposition 1 bis</u>.- <u>Soit</u> Γ <u>une correspondance maximale entre</u> S <u>et</u> S' , <u>et soit</u> C <u>une partie fermée de</u> S . <u>Si</u> S <u>est complet, l'ensemble des localités de</u> S' <u>qui correspondent par</u> Γ <u>à des localités de</u> C <u>est fermé</u>.

Tenant compte de ce que tout schéma induit par un schéma complet est complet (exposé 6, théorème 3), on se ramène immédiatement au cas où Γ n'est pas dégénérée. Supposons qu'il en soit ainsi ; $\overset{-1}{f}(C)$ est fermé dans S'' , et l'assertion résultera du théorème 1 bis, exposé 8, si nous établissons le :

<u>Lemme 1</u> : <u>Soient</u> S <u>et</u> S' <u>des schémas d'un même corps</u>, S'' <u>leur joint</u> ; <u>si</u> S <u>est complet</u>, S'' <u>est complet au-dessus de</u> S' .

<u>Démonstration du lemme</u> : Soit V un anneau de valuation du corps des fractions de S'' qui domine une localité M' de S' ; puisque S est complet, V domine une localité M de S ; comme V domine M et M' , il domine au moins une localité de S'' .

Soit Γ une correspondance entre S et S' ; si $M \in S$, l'ensemble des
2 localités de S' qui correspondent à M n'est en général pas constructible (on notera que l'ensemble $\{M\}$ n'est pas constructible si $\dim M > 0$). On a cependant le résultat suivant :

Proposition 2.- *Soit Γ une correspondance entre S et S', et soit M une localité de S ; les localités de S' qui correspondent à M sont alors toutes des spécialisations d'un nombre fini d'entre elles.*

On peut manifestement supposer Γ non dégénérée. Soit $\Gamma = (S'', f, f')$; il suffira de montrer que $f^{-1}(M)$ se compose de spécialisations d'un nombre fini de ses éléments. Soit S un schéma affine contenu dans S et contenant M ; $f^{-1}(S)$ est alors un schéma contenu dans S'' et contenant $f^{-1}(M)$. Représentons S'' comme réunion d'un nombre fini de schémas affines S''_j ; il suffira de montrer que, pour tout j, $f^{-1}(M) \cap S''_j$ se compose de spécialisations d'un nombre fini de ses éléments. On peut donc supposer que S et S'' sont des schémas affines d'algèbres A et A'' tels que S'' domine S (d'où $A \subset A''$). On a $M = A_{\underline{m}}$, où $\underline{m}$ est un idéal premier de A ; les éléments de $f^{-1}(M)$ sont les $A''_{\underline{m}''}$, où $\underline{m}''$ parcourt les idéaux premiers de A'' tels que $A \cap \underline{m}'' = \underline{m}$. On a alors $A'' \subset M[A''] \subset A''_{\underline{m}''}$, et $A''_{\underline{m}''}$ est l'anneau local de l'idéal premier $\underline{r}(A''_{\underline{m}''}) \cap M[A''] = \underline{n}$ de $M[A'']$ qui contient $\underline{r}(M)$. Réciproquement, si un idéal premier $\underline{n}$ de $M[A'']$ contient $\underline{r}(M)$, $\underline{m}'' = \underline{n} \cap A''$ est un idéal premier de A'' dont l'intersection avec A est $\underline{m}$, et $\underline{n}$ est l'idéal engendré par $\underline{m}''$ dans $M[A'']$ (car $M[A'']$ est anneau des fractions d'une partie multiplicativement stable non vide ne contenant pas 0 de A''), d'où $(M[A''])_{\underline{n}} = A''_{\underline{m}''}$. Or, l'anneau $M[A'']$ est noethérien ; les idéaux premiers de cet anneau qui contiennent $\underline{r}(M)$ sont ceux qui contiennent l'un au moins des idéaux premiers minimaux, qui sont en nombre fini, de l'idéal engendré par $\underline{r}(M)$ dans $M[A'']$, ce qui démontre la proposition 2.

Proposition 3.- *Soit Γ une correspondance non dégénérée entre des schémas S et S'. Il y a une partie ouverte non vide U de S qui possède la propriété suivante : si une localité $M \in U$ correspond à une localité $M' \in S'$ et si M est une spécialisation d'une localité N de S, il y a une localité $N' \in S'$ qui correspond à N et dont M' est une spécialisation.*

Soit $\Gamma = (S'', f, f')$; il résulte de la remarque terminale de l'exposé 8 qu'il y a une partie ouverte non vide U de S telle que si $M = f(M'') \in U$ (avec $M'' \in S''$) est spécialisation d'une localité $N \in S$, il y ait une localité

$N'' \in S''$ telle que $f(N'') = N$ et que M'' soit spécialisation de N'' . Si $M \in U$ correspond à $M' \in S'$, il y a un $M'' \in S''$ tel que $f(M'') = M$, $f'(M'') = M'$; N'' étant comme ci-dessus, $N' = f'(N'')$ correspond à N et M' est une spécialisation de N' .

2.- <u>Correspondances induites</u>.

Soit $\Gamma = (S'' , f , f')$ une correspondance entre S et S' ; soient M et M' des localités qui se correspondent par Γ , et soit M'' une localité de S'' telle que $f(M'') = M$, $f'(M'') = M'$. Soit $\mathcal{T}(M'')$ (resp. $\mathcal{T}(M)$, $\mathcal{T}(M')$) l'ensemble des spécialisations de M'' (resp. M , M') dans S'' (resp. S , S') ; soient T , T' , T'' les schémas induits par S , S' , S'' sur $\mathcal{T}(M)$, $\mathcal{T}(M')$, $\mathcal{T}(M'')$. Si i , i' , i'' sont les applications canoniques de T , T' , T'' dans S , S' , S'' , il y a des morphismes g et g' de T'' dans T et T' tels que $i \circ g = f \circ i''$, $i' \circ g' = f' \circ i''$; g et g' sont des applications de domination. On dit que la correspondance non dégénérée (T'' , g , g') entre T et T' est une <u>correspondance induite par</u> Γ . Cette correspondance dépend non seulement de M et M' , mais du choix de M'' . Si M''_1 est une autre localité de S'' telle que $f(M''_1) = M$, $f'(M''_1) = M'$, et si M''_1 est spécialisation de M'' , on dit que la correspondance induite par M''_1 est une spécialisation de la correspondance induite par M'' .

Si Δ est la correspondance induite définie par M'' , une condition nécessaire et suffisante pour qu'une localité $N \in T$ et une localité $N' \in T'$ se correspondent par Δ est qu'il y ait une spécialisation N'' de M'' dans S'' telle que $f(N'') = i(N)$, $f'(N'') = i'(N')$; s'il en est ainsi, N et N' se correspondent également dans toute correspondance induite dont Δ est une spécialisation. Par contre, si $P \in \mathcal{T}(M)$ et $P' \in \mathcal{T}(M')$ se correspondent par Γ , il n'est pas vrai qu'il existe une correspondance entre $\mathcal{T}(M)$ et $\mathcal{T}(M')$, induite par Γ , pour laquelle M et M' se correspondent (voir cependant le lemme 2 ci-dessous).

Dans ce qui suit, nous identifierons plusieurs fois (par abus de langage) les ensembles $\mathcal{T}(M)$, $\mathcal{T}(M')$, $\mathcal{T}(M'')$ aux schémas T , T' , T'' .

<u>Proposition 4</u>.- <u>Soit</u> Γ <u>une correspondance entre</u> S <u>et</u> S' , <u>et soient</u> M <u>et</u> M' <u>des localités qui se correspondent par</u> Γ . <u>Toutes les correspondances entre</u> $\mathcal{T}(M)$ <u>et</u> $\mathcal{T}(M')$ <u>induites par</u> Γ <u>sont des spécialisations d'un nombre fini d'entre elles</u>.

Soit $\Gamma = (S'' , f , f')$; les localités de $f^{-1}(M)$ sont des spécialisations d'un nombre fini d'entre elles, soient M''_1 , ... , M''_h . Il suffira de montrer que, pour tout i , les localités N'' de $\Upsilon(M''_i)$ qui sont telles que $f'(N'') = M'$ sont spécialisations d'un nombre fini d'entre elles. Or, si $M'_i = f'(M''_i)$, la restriction de f' à $\Upsilon(M''_i)$ est un morphisme de domination g'_i du schéma $\Upsilon(M''_i)$ dans $\Upsilon(M'_i)$; si $M' \notin \Upsilon(M'_i)$, M' n'est image par f' d'aucune spécialisation de M''_i ; dans le cas contraire, les localités de $g'^{-1}_i(M')$ sont des spécialisations d'un nombre fini d'entre elles, d'où le résultat.

<u>Proposition 5.- Soit</u> Γ <u>une correspondance maximale entre</u> S <u>et</u> S' . <u>Toute correspondance induite par</u> Γ <u>est alors maximale</u>.

On peut évidemment supposer que $\Gamma = (S'' , f , f')$ est non dégénérée, donc aussi que S'' domine S et S' , f et f' étant les applications de domination ; S'' est le joint de S et S' . Soient M et M' des localités qui se correspondent par Γ , et M'' une localité de S'' qui domine M et M' . Les corps de fractions $M/\underline{r}(M)$, $M'/\underline{r}(M')$ des schémas induits $\Upsilon(M)$, $\Upsilon(M')$ s'identifient à des sous-corps du corps des fractions $M''/\underline{r}(M'')$ de $\Upsilon(M'')$, et $\Upsilon(M'')$ domine $\Upsilon(M)$ et $\Upsilon(M')$: nous avons à montrer que c'est leur joint. Représentons S (resp. S') comme réunion finie de schémas affines ; soient $S_1 , \dots , S_p$ (resp. $S'_1 , \dots , S'_q$) ceux de ces schémas qui contiennent M (resp. M') ; soit S''_{ij} le joint de S_i et de S'_j . On a alors $M'' \in S''_{ij}$; en effet, puisque M'' domine $M \in S_i$ et $M' \in S'_j$, il domine une localité de S''_{ij} ; comme $M'' \in S''$ et $S''_{ij} \subset S''$, il en résulte que $M'' \in S''_{ij}$. De plus, il y a une représentation de S'' comme réunion finie de schémas affines dans laquelle les S''_{ij} sont les seuls schémas à contenir M'' . Soit T_i (resp. T'_j , T''_{ij}) le schéma induit par S_i (resp. S'_j , S''_{ij}) sur l'ensemble des spécialisations de M (resp. M' , M'') dans S_i (resp. S'_j , S''_{ij}) ; $\Upsilon(M)$ (resp. $\Upsilon(M')$, $\Upsilon(M''))$ est la réunion des T_i (resp. T'_j , T''_{ij}) ; il suffira donc de montrer que T''_{ij} est le joint de T_i et T'_j . Or, soient A_i , A'_j les algèbres de S_i , S'_j ; celle de S''_{ij} est $K[A_i , A'_j]$. Si θ est l'application canonique de M'' dans $M''/\underline{r}(M'')$, T_i (resp. T'_j , T''_{ij}) est le schéma affine d'algèbre $\theta(A_i)$ (resp. $\theta(A'_j)$, $\theta(K[A_i , A'_j])$; comme $\theta(K[A_i , A'_j]) = K[\theta(A_i) , \theta(A'_j)]$, notre assertion est établie.

3.- <u>Questions de dimension</u>.

Nous nous proposons maintenant d'étudier les dimensions des localités de S' qui correspondent à une localité donnée M de S . Nous allons pour cela d'abord introduire la notion de dimension d'une correspondance. Soit $\Gamma = (S'' , f , f')$ une correspondance entre S et S' . Si Γ est non dégénérée, nous pouvons supposer que S'' domine S et S' , f et f' étant les applications de domination ; nous appellerons alors dimension de la correspondance la dimension du joint de S et S' ; cette dimension est au plus égale à celle de S'' ; elle lui est égale si Γ est maximale, mais peut dans d'autres cas lui être strictement inférieure. Dans le cas général, soient T et T' les adhérences de $f(S'')$ dans S et de $f'(S'')$ dans S' ; il y a une correspondance Γ_1 non dégénérée entre T et T' de la forme (S'' , g , g') , et c'est la dimension de cette correspondance que nous appellerons dimension de Γ .

Si Γ est une correspondance entre S et S' , et si une localité $M \in S$ correspond par Γ à une localité $M' \in S'$, nous désignerons par $\delta''(M , M')$ la plus grande des dimensions des correspondances entre $\gamma(M)$ et $\gamma(M')$ induites par Γ .

Théorème 1.- Soit Γ une correspondance entre S et S' ; soient M et M' des localités qui se correspondent par Γ . Soit $\delta = \dim M$, $\delta' = \dim M'$, $\delta'' = \delta''(M , M')$. Si h est un entier, soit Z'_h l'ensemble des spécialisations de dimension h de M' qui correspondent à M . L'ensemble Z'_h est dense dans l'ensemble de toutes les spécialisations de M' dans S' si $\delta + \delta' - \delta'' \leqslant h \leqslant \delta'$, mais ne l'est pas si $h < \delta + \delta' - \delta''$.

Nous poserons $\Gamma = (S'' , f , f')$. Etablissons d'abord le :

Lemme 2 : Il y a une partie relativement ouverte non vide de $\gamma(M')$, soit V' , telle que, si une localité $N' \in V'$ correspond à M , il y ait au moins une correspondance entre $\gamma(M)$ et $\gamma(M')$, induite par Γ , dans laquelle M et N' se correspondent.

Les localités de $\overset{-1}{f}(M)$ sont des spécialisations d'un nombre fini d'entre elles, soient $M''_1 , \ldots , M''_r$. Soit $M'_i = f'(M''_i)$; alors f' induit un morphisme de domination f'_i de $\gamma(M''_i)$ dans $\gamma(M'_i)$.L'ensemble $\overset{-1}{f'_i}(\gamma(M'_i) \cap \gamma(M'))$ est fermé dans $\gamma(M''_i)$; il se compose des spécialisations dans $\gamma(M''_i)$ d'un certain nombre de localités P''_{ik} $(1 \leqslant k \leqslant s_i)$; supposons que $f'_i(P''_{ik}) = M'$ si $1 \leqslant k \leqslant s'_i$, mais que $f'_i(P''_{ik}) \neq M'$ si $k > s'_i$. Soit V' le complémentaire de la réunion des $\gamma(f'_i(P''_{ik}))$ pour tous les couples (i , k) tels que $k > s'_i$; c'est une partie ouverte non vide de $\gamma(M')$. Soit N' un élément de V' qui correspond à M ; il y a une localité $N'' \in \overset{-1}{f}(M)$ telle que $f'(N'') = N'$. Il y a au moins un i tel que $N'' \in \gamma(M''_i)$; comme $N' \in V'$, il y a un $k \leqslant s'_i$ tel que N' soit spécialisation de P''_{ik} . La localité P''_{ik} est spécialisation de M''_i et admet N'' comme spécialisation ; comme $f(M''_i) = f(N'') = M$, il en résulte immédiatement que $f(P''_{ik}) = M$; P''_{ik} définit donc une correspondance entre $\gamma(M)$ et $\gamma(M')$ induite par Γ , et M et N' se correspondent dans cette correspondance.

Venons-en maintenant à la démonstration du théorème 1. D'après la proposition 4, les correspondances entre $\gamma(M)$ et $\gamma(M')$ induites par Γ sont des spécialisations d'un nombre fini d'entre elles, et $\delta''(M , M')$ est la plus grande des dimensions de ces dernières. Il suffira donc de démontrer que, si Δ est une correspondance de dimension δ'' , non dégénérée, entre $\gamma(M)$ et $\gamma(M')$, l'ensemble des éléments de $\gamma(M')$ de dimension h qui correspondent à M est dense dans $\gamma(M')$ si $\delta + \delta' - \delta'' \leq h \leq \delta'$, mais n'est pas dense si $h < \delta + \delta' - \delta''$.

Autrement dit, nous sommes ramenés à démontrer le théorème 1 dans le cas où M et M' sont respectivement les corps des fractions F de S et F' de S' ; nous désignerons alors par d et d' les dimensions de S et S' , par d'' la dimension de Γ . Il existe une partie ouverte non vide V' de S' telle qu'aucune localité $N' \in V'$ ne soit image par f' d'une localité de dimension $> \dim N' + d'' - d'$ de S'' (Exposé 8, théorème 3). Par ailleurs, toute localité de S'' qui domine F est de dimension $\geq d$. Il en résulte que Z'_h n'est pas dense dans S' si $h < d + d' - d''$. Représentons S' (resp. S'') comme réunion finie de schémas affines S'_j (resp. S''_j) tels que, pour tout j , $f'(S''_j) \subset S'_j$ (Exposé 7, lemme 1) ; pour prouver que Z'_h est dense dans S' , on voit qu'il suffit de considérer le cas où S' et S'' sont des <u>schémas affines</u>. On peut aussi supposer que S'' domine S et S' , f et f' étant les applications de domination.

C'est sous ces hypothèses que l'on achèvera la démonstration du théorème 1, dans l'exposé suivant.