C. Chevalley

Les schémas (II)

Séminaire Henri Cartan, tome 8 (1955-1956), exp. n° 6, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A6_0>

(H. CARTAN et C. CHEVALLEY)

LES SCHÉMAS (II)

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 19.12.1955)

Nous supposons toujours fixés un corps K et un surcorps L de K , de type fini sur K .

1.- Quelques lemmes.

Lemme 1 : *Soient A une algèbre affine et S son schéma. Pour qu'un anneau local contenu dans L domine au moins une localité de l'ensemble S , il faut et suffit qu'il contienne A .*

La condition est manifestement nécessaire. Réciproquement, si l'anneau local V contient A , il domine l'anneau local de l'idéal premier $A \cap \underline{r}(V)$ de A .

Lemme 2 : *Si M et N sont des localités d'un schéma S , une condition nécessaire et suffisante pour que M soit une spécialisation de N est que $M \subset N$.*

La condition est manifestement nécessaire. Si elle est satisfaite, N domine l'anneau local N' de l'idéal premier $M \cap \underline{r}(N)$ de M ; comme M est spécialisation de N' , on a $N' \in S$ (cf. exp. 5, proposition 2) ; comme N domine N' et appartient à S , on a $N = N'$.

Lemme 3 : *Soit S un schéma affine ; si U est une partie non vide de S , ouverte dans la topologie de Zariski, U est un schéma.*

Il suffit de montrer que U est une réunion finie de schémas affines. Soit x un élément $\neq 0$ de l'algèbre A de S . Si $\underline{p}$ est un idéal premier de A ne contenant pas x , on a $A \subset A[x^{-1}] \subset A_{\underline{p}}$, et $A_{\underline{p}}$ est l'anneau local de l'idéal premier $\underline{p}A_{\underline{p}} \cap A[x^{-1}]$ de $A[x^{-1}]$ (exposé 1, proposition 2). Réciproquement, on a $A[x^{-1}] = A_X$, où X se compose des puissances x^k de x ; tout anneau local d'un idéal premier de $A[x^{-1}]$ est donc anneau local d'un idéal premier de A ne contenant pas x (exposé 1, proposition 2) ; l'ensemble U_x des anneaux locaux des idéaux premiers ne contenant pas x est donc le schéma affine d'algèbre $A[x^{-1}]$. Soit $\underline{a}$ un idéal quelconque $\neq 0$; si $(x_1, \dots, x_n)$ est un système de générateurs $\neq 0$ de $\underline{a}$, l'ensemble des anneaux locaux des idéaux premiers ne contenant pas $\underline{a}$ est la réunion des U_{x_i} : c'est donc un schéma.

2.- Topologie de Zariski dans l'ensemble des localités du corps L.

Soit $\mathfrak{L}$ l'ensemble de toutes les localités du corps L. Désignons par $\mathfrak{U}$ l'ensemble des parties U de $\mathfrak{L}$ telles que, pour tout schéma affine S de L, $U \cap S$ soit ouvert dans la topologie de Zariski de S. Il est clair que $\mathfrak{U}$ est l'ensemble des ouverts d'une topologie $\mathfrak{T}$ sur $\mathfrak{L}$. On l'appelle la topologie de Zariski de $\mathfrak{L}$. Les fermés de la topologie $\mathfrak{T}$ sont les parties F de $\mathfrak{L}$ telles que, pour tout schéma affine S, $F \cap S$ soit fermé pour la topologie de Zariski de S.

Proposition 1.- *Soit P une localité du corps L. L'adhérence de P, dans la topologie $\mathfrak{T}$, est l'ensemble $\mathfrak{S}(P)$ de toutes les spécialisations de P* (Exposé 5, page 2).

Démonstration : $\mathfrak{S}(P)$ est fermé, car si S est un schéma affine qui rencontre $\mathfrak{S}(P)$, on a $P \in S$ (en vertu de la proposition 2 de l'Exposé 5), donc $\mathfrak{S}(P) \cap S$ est l'ensemble des localités de S qui sont spécialisations de P, ensemble qui est fermé pour la topologie de Zariski de S (Exposé 5, proposition 5). Reste à montrer que si un fermé $F \subset \mathfrak{L}$ est tel que $P \in F$, alors toute spécialisation M de P appartient à F ; or, si A est une algèbre de définition de M, A est aussi une algèbre de définition de P (exposé 5, proposition 2), et si S désigne le schéma affine de A, on a $P \in F \cap S$, ensemble qui est fermé pour la topologie de Zariski de S ; donc $M \in F \cap S$.

Proposition 2.- *La topologie $\mathfrak{T}$ induit, sur chaque schéma affine $S \subset \mathfrak{L}$, la topologie de Zariski de S.*

En effet, si E est un fermé de S (pour la topologie de S), il existe des localités $P_i \in S$ en nombre fini, telles que E se compose des localités de S qui sont spécialisation de l'une au moins des P_i (Exposé 5, lignes suivant la proposition 5). Donc E est induit sur S par la réunion des $\mathfrak{S}(P_i)$, qui est un ensemble fermé dans la topologie $\mathfrak{T}$.

Nous nous proposons de montrer que tout schéma de L est ouvert (pour la topologie $\mathfrak{T}$ de $\mathfrak{L}$). Pour cela, nous aurons besoin du résultat que voici :

Proposition 3.- *Si S et S' sont deux schémas affines, $S \cap S'$ est ouvert dans S et dans S'.*

Pour le démontrer, on utilise le

Lemme 4 : *Soit S un schéma ; l'ensemble U des localités de L qui dominent au moins une localité appartenant à S est ouvert.*

Démonstration du lemme 4 : il suffit de le prouver quand S est le schéma d'une algèbre affine A. On doit montrer que, pour toute algèbre affine $B \subset L$ de schéma T, $U \cap T$ est ouvert dans T. Or soit $\underline{b}$ l'ensemble des $y \in B$ tels que $yA \subset B$; $\underline{b}$ est un idéal de B. Si $\underline{p}$ est un idéal premier de l'algèbre B, la condition $B_{\underline{p}} \in U$ équivaut à $B_{\underline{p}} \supset A$ (lemme 1), ce qui équivaut à $\underline{p} \not\supset \underline{b}$; or l'ensemble des idéaux premiers $\underline{p}$ de B tels que $\underline{p} \not\supset \underline{b}$ est ouvert dans le schéma T de B.

Le lemme 4 étant démontré, démontrons maintenant la proposition 3 : il suffit de prouver que $S \cap S'$ est ouvert dans S'. Supposons $S \cap S'$ non vide et notons U l'ensemble des localités de S qui dominent au moins une localité de S' ; d'après le lemme 4, U est ouvert dans S ; comme U n'est pas vide (car $U \supset S \cap S'$), U est un schéma (lemme 3). Soit U' l'ensemble des localités de S' qui dominent au moins une localité de U ; d'après le lemme 4, U' est ouvert dans S' ; on va voir que $U' = S \cap S'$, ce qui achèvera la démonstration. Il est clair que $U' \supset S \cap S'$; réciproquement, soit $M' \in U'$; alors $M' \in S'$ et M' domine une localité $M \in U$; M domine une localité $M'_1 \in S'$; donc M' domine M'_1, et par suite $M' = M'_1$, d'où $M' = M \in S$, et $M' \in S \cap S'$.

Théorème 1.- <u>Tout schéma S de L est ouvert dans la topologie $\mathcal{T}$. Les parties ouvertes non vides d'un schéma S ne sont autres que les schémas contenus dans S. L'intersection de deux schémas, si elle n'est pas vide, est un schéma.</u>

Démonstration : soit S un schéma ; pour montrer que S est ouvert, il suffit de le faire quand S est un schéma affine ; pour cela, on doit prouver que, pour tout schéma affine S', $S \cap S'$ est ouvert dans S' ; or c'est ce qu'affirme la proposition 4.- Si U est un ouvert non vide d'un schéma S, U est un schéma : cela résulte du lemme 3. Réciproquement, tout schéma S' contenu dans S est ouvert pour la topologie $\mathcal{T}$. Enfin, l'intersection de deux schémas S et S' est ouverte (d'après la proposition 3), et si elle n'est pas vide, c'est un schéma, puisque c'est un ouvert de S.

3.- Topologie de Zariski d'un schéma.

Si S est un schéma de L, la topologie de Zariski de S est, par définition, la topologie induite sur S par la topologie $\mathcal{T}$. Lorsque S est un schéma affine, on retrouve bien la topologie de Zariski de ce schéma affine, en vertu de la proposition 2.

<u>Proposition 4</u>.- <u>Dans un schéma</u> S , <u>toute suite décroissante de fermés est stationnaire</u> (ou, ce qui revient au même : tout ensemble non vide de parties fermées contient un élément minimal).

En effet, on a vu qu'il en est ainsi quand S est un schéma affine (Exposé 5, page 4). Dans le cas général, soit (F_n) une suite décroissante de fermés de S , et soient S_j des schémas affines, en nombre fini, dont la réunion soit S . Pour chaque j , la suite des $S_j \cap F_n$ est stationnaire pour $n \geqslant n(j)$; donc la suite (F_n) est stationnaire pour $n \geqslant \sup_j n(j)$.

<u>Proposition 5</u>.- <u>Dans un schéma</u> S , <u>soit</u> F <u>un ensemble fermé. Il existe des localités</u> $P_i \in F$, <u>en nombre fini, telles que</u> F <u>se compose des localités de</u> S <u>qui sont spécialisation de l'une au moins des</u> P_i (c'est-à-dire qui sont contenus dans l'une des P_i : cf. lemme 2).

<u>Démonstration</u> : c'est vrai si S est un schéma affine (Exposé 5, fin du paragraphe 2). Si S est réunion d'une famille finie des schémas affines S_j , il y a des localités P_{ij} $(1 \leq i \leq h_i)$ telles que $F \cap S_j$ soit la réunion (pour i variable) des $\mathscr{C}(P_{ij}) \cap S_j$; puisque $P_{ij} \in F$ fermé, l'adhérence $\mathscr{C}(P_{ij}) \cap S$ est contenue dans F , et par suite F est la réunion (pour i et j variables) des $\mathscr{C}(P_{ij}) \cap S$.

<u>Corollaire</u> : la topologie de S est déterminée par la relation d'inclusion entre localités de S .

D'après la proposition 4, on peut appliquer le lemme de l'Exposé 2 (page 2-07) à l'ensemble des ouverts d'un schéma S . Par passage aux complémentaires, on obtient ceci : disons qu'un fermé F de S est <u>irréductible</u> si F ne peut pas s'écrire sous la forme $F_1 \cup F_2$, avec F_1 et F_2 fermés et $\neq F$. Alors

<u>Théorème 2</u>.- (a) <u>Si</u> F <u>est un fermé d'un schéma</u> S , <u>l'ensemble des fermés irréductibles contenus dans</u> F <u>possède des éléments maximaux</u> F_i , <u>en nombre fini, et</u> F <u>est la réunion des</u> F_i ;

(b) <u>Pour que</u> F <u>soit irréductible, il faut et il suffit que</u> F <u>soit l'adhérence d'une localité</u> P (i.e: <u>que</u> F <u>se compose de toutes les spécialisations de</u> P) .

<u>Démonstration</u> : l'assertion (a) résulte aussitôt du lemme cité de l'Exposé 2. Les F_i s'appellent les <u>composantes irréductibles</u> de F . Quant à (b), il est trivial que l'adhérence d'un point P est irréductible ; réciproquement, si F est un fermé irréductible, F est l'adhérence d'un point P , en vertu de la proposition 5 .

Soit maintenant E une partie quelconque de S ; soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des parties de E qui sont relativement fermées dans E . On peut encore appliquer le lemme de l'Exposé 2 (page 2-07) à l'ensemble des complémentaires (dans E) des éléments de $\mathcal{E}$. Ainsi E sera dit irréductible si E ne peut pas se mettre sous la forme $E_1 \cup E_2$, avec E_1 et E_2 relativement fermés (dans E) et $\neq E$. Le lemme cité donne alors une décomposition de E comme réunion finie de E_i irréductibles ; les E_i s'appellent encore les composantes irréductibles de E . En fait :

Proposition 6.- Pour que E soit irréductible (dans l'ensemble $\mathcal{E}$ des parties relativement fermées de E), il faut et il suffit que l'adhérence $\bar{E}$ soit irréductible (dans l'ensemble des parties fermées du schéma S).

En effet, si $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \neq E$, $E_2 \neq E$, $E_1 = E \cap \bar{E}_1$, $E_2 = E \cap \bar{E}_2$, on a $\bar{E} = \bar{E}_1 \cup \bar{E}_2$, $\bar{E}_1 \neq \bar{E}$, $\bar{E}_2 \neq \bar{E}$; réciproquement, si $\bar{E} = F_1 \cup F_2$, F_1 et F_2 fermés, $F_1 \neq \bar{E}$, $F_2 \neq \bar{E}$, et si on pose $E_1 = E \cap F_1$, $E_2 = E \cap F_2$, on a $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \neq E$, $E_2 \neq E$.

De là résulte que les composantes irréductibles de E ne sont autres que les intersections de E avec les composantes irréductibles de $\bar{E}$.

D'après le théorème 2, (b) : pour que E soit irréductible, il faut et il suffit qu'il existe une localité P de S , adhérente à E , telle que toute localité de E soit spécialisation de P .

Remarque : dire que E est irréductible, c'est dire que toute partie non vide de E , relativement ouverte dans E , est dense dans E .

4.- Corps des fractions et dimension d'un schéma.

Proposition 7.- Soit S un schéma. Il y a une localité Q et une seule de S qui est un corps ; toute localité de S est une spécialisation de Q et admet Q comme corps des fractions.

Deux localités de L qui sont des corps sont toujours apparentées, car dominées par L lui-même ; il en résulte que S ne peut contenir plus d'une localité qui soit un corps. Si $M \in S$, l'anneau local de l'idéal $\{0\}$ de M est le corps des fractions de M et admet M comme spécialisation, donc appartient à S ; d'où le résultat.

Corollaire : Tout schéma est irréductible.

Les notations étant celles de la proposition 7 , on dit que Q est le corps

<u>des fractions du schéma</u> S . Son degré de transcendance sur K est le niveau de toute localité de S ; on appelle ce nombre la <u>dimension</u> de S . Cette dimension est égale à la dimension de la localité Q ; si ν est sa valeur , les dimensions des localités de S sont tous les entiers de l'intervalle $[0, \nu]$.

<u>Proposition 8</u>.- <u>Si</u> Q <u>est le corps des fractions de</u> S , Q <u>est une extension de type fini de</u> K .

Cela résulte du :

<u>Lemme 5</u> : <u>Si</u> L <u>est une extension de type fini d'un corps</u> K , <u>et</u> Q <u>un corps intermédiaire entre</u> K <u>et</u> L , Q <u>est une extension de type fini de</u> K .

Soit $(x_1, \ldots, x_r)$ une base de transcendance de Q sur K , contenue dans une base de transcendance $(x_1, \ldots, x_s)$ de L sur K . Soit $K' = K(x_1, \ldots, x_r)$; on voit tout de suite que des éléments de L algébriques et linéairement indépendants par rapport à K' sont aussi linéairement indépendants par rapport au corps $K'(x_{r+1}, \ldots, x_s) = K(x_1, \ldots, x_s)$. Or, L est une extension algébrique de type fini de $K(x_1, \ldots, x_s)$, donc est de degré fini ; il en résulte que Q est de degré fini sur K' .

5.- <u>Les localités de dimension</u> 0 <u>d'un schéma</u>.

<u>Proposition 9</u>.- <u>Soient</u> S <u>un schéma et</u> S_o <u>l'ensemble des localités de dimension</u> 0 <u>de</u> S ; <u>si</u> F <u>est une partie fermée de</u> S , $S_o \cap F$ <u>est dense dans</u> F .

D'après la proposition 5, il suffit de faire la démonstration quand F est l'ensemble des spécialisations dans S d'une localité P de S . Il suffira donc de montrer que si $P_1, \ldots, P_r$ sont des spécialisations $\neq P$ de P dans S , il y a une spécialisation de dimension 0 de P dans S qui n'est spécialisation d'aucune des localités P_i . Soit A une algèbre affine dont le schéma affine S' est contenu dans S et contient P ; si M est une spécialisation de P dans S' , M ne peut être spécialisation d'un P_i n'appartenant pas à S' (Exposé 5 , proposition 2) ; supposons que $P_1, \ldots, P_{r'}$ soient ceux des P_i qui sont dans S' . On a $P = A_{\underline{p}}$, $P_i = A_{\underline{p}_i}$ $(1 \leq i \leq r')$, $\underline{p}$ et les $\underline{p}_i$ étant des idéaux premiers de A tels que $\underline{p} \subset \underline{p}_i$, $\underline{p} \neq \underline{p}_i$. Il y a un élément $x \neq 0$ de $A/\underline{p} = B$ appartenant à tous les $\underline{p}_i/\underline{p}$. Soit $\underline{m}'$ un idéal premier maximal de $B[x^{-1}]$, et soit $\underline{m} = \underline{m}' \cap B$. Alors $B/\underline{m}$ est un corps, extension algébrique de K (Exposé 3, Appendice, théorème 3). Soit $\underline{q}$ l'image réciproque de $\underline{m}$ dans A ; $\underline{q}$ est premier maximal, et $A_{\underline{q}}$ est un élément de S_o qui n'est spécialisation d'aucune des localités P_i .

6.- Schémas induits.

Soient S un schéma de L et P un élément de S. Nous désignerons par θ l'application canonique de P sur le corps $P/\underline{r}(P)$, que nous pouvons considérer comme un surcorps de K. Si A est un sous-anneau de P, $\theta(A)$ est un sous-anneau de $P/\underline{r}(P)$; si $\underline{m}$ est un idéal premier de A contenant $A \cap \underline{r}(P)$, on a $A_{\underline{m}} \subset P$ et (cf. exposé 1, proposition 1)

$$(1) \qquad \theta(A_{\underline{m}}) = (\theta(A))_{\theta(\underline{m})} .$$

Théorème 3.- Soient P un élément d'un schéma S et $\mathfrak{S}(P)$ l'ensemble des spécialisations de P dans S (cf. lemme 2) ; soit θ l'application canonique de P sur $P/\underline{r}(P)$. Soit S' l'ensemble des anneaux $\theta(M)$, pour $M \in \mathfrak{S}(P)$. Alors : 1) S' est un schéma du corps $P/\underline{r}(P)$, et $M \longrightarrow \theta(M)$ est un homéomorphisme de $\mathfrak{S}(P)$ (muni de la topologie induite par la topologie de Zariski de S) sur S' ; 2) si S est un schéma affine d'algèbre A, S' est le schéma affine d'algèbre $A/(A \cap \underline{r}(P))$; 3) si S est un schéma projectif, S' est un schéma projectif ; 4) si S est un schéma complet, S' est un schéma complet.

Si S est un schéma affine d'algèbre A, on a $A \subset P$, et il est clair que $\theta(A) = A/(A \cap \underline{r}(P))$ est une algèbre affine ; il résulte alors de (1) et du fait que tout idéal premier de $\theta(A)$ se met sous la forme $\theta(\underline{m})$, $\underline{m}$ étant un idéal premier de A contenant $A \cap \underline{r}(P)$, que S' est le schéma affine d'algèbre $\theta(A)$. Passant maintenant au cas général, il résulte de ce qu'on vient de dire que S' est réunion d'un nombre fini de schémas affines. Soient M, M' des localités de S telles que $\theta(M)$, $\theta(M')$ soient apparentées ; l'image par θ de $K[M, M']$ est $K[\theta(M), \theta(M')]$, et celle de l'idéal $\underline{a}$ de $K[M, M']$ engendré par $\underline{r}(M)$ et $\underline{r}(M')$ est l'idéal engendré par $\theta(\underline{r}(M))$ et $\theta(\underline{r}(M'))$ dans $K[\theta(M), \theta(M')]$; ce dernier ne contenant pas 1, $\underline{a}$ ne contient pas 1, et, si $\underline{p}$ est un idéal premier de $K[M, M']$ contenant $\underline{a}$, M et M' sont dominés par l'anneau local de $\underline{p}$, d'où $M = M'$. Ceci montre d'une part que S' est un schéma et d'autre part que $M \longrightarrow \theta(M)$ est une bijection de $\mathfrak{S}(P)$ sur S'. Puisque cette application respecte la relation d'inclusion, c'est un homéomorphisme de $\mathfrak{S}(P)$ sur S' (cf. corollaire à la proposition 5). Supposons que S soit le schéma projectif défini par un espace vectoriel H de dimension finie. Il y a un $u \neq 0$ dans H tel que P soit anneau local d'un idéal premier $\underline{p}$ de $K[u^{-1}H]$; soit $\bar{H} = \theta(u^{-1}H)$. Soit v un élément $\neq 0$ de H tel que P appartienne au schéma affine d'algèbre $K[v^{-1}H]$; alors $u^{-1}v$ n'est pas dans $\underline{p}$, et, si $\bar{v} = \theta(u^{-1}v)$, on a

$\bar{v}^{-1}\bar{H} = \theta(v^{-1}H)$; réciproquement, tout élément $\bar{v} \neq 0$ de $\bar{H}$ peut se mettre sous la forme $\theta(u^{-1}v)$, avec $u^{-1}v \notin \underline{p}$; il en résulte immédiatement que S' est le schéma projectif défini par $\bar{H}$.

Supposons maintenant que S soit complet. Soit $\bar{V}$ un anneau de valuation contenant K du corps $P/\underline{r}(P)$. Introduisons un anneau de valuation V_o du corps des fractions F de S qui domine P ; $V_o/\underline{r}(V_o)$ est alors un surcorps de $P/\underline{r}(P)$, et il y a un anneau de valuation $\bar{V}_1$ de ce corps qui domine $\bar{V}$. Or, on a le lemme suivant :

<u>Lemme 6</u> : <u>Soient</u> V_o <u>un anneau de valuation et</u> $\bar{V}_1$ <u>un anneau de valuation du corps</u> $V_o/\underline{r}(V_o)$; <u>l'ensemble</u> V_1 <u>des éléments de</u> V_o <u>dont les classes modulo</u> $\underline{r}(V_o)$ <u>appartiennent à</u> $\bar{V}_1$ <u>est un anneau de valuation du corps des fractions de</u> V_o .

Soit z un élément du corps des fractions de V_o n'appartenant pas à V_1 . Si $z \notin V_o$, z^{-1} est dans $\underline{r}(V_o)$, donc dans V_1 . Si $z \in V_o$, soit $\bar{z}$ sa classe modulo $\underline{r}(V_o)$; on a $\bar{z} \notin \bar{V}_1$, d'où $\bar{z} \neq 0$, $z \notin \underline{r}(V_o)$, donc $z^{-1} \in V_o$, et la classe $\bar{z}^{-1}$ de z^{-1} modulo $\underline{r}(V_o)$ est dans $\bar{V}_1$, d'où encore $z^{-1} \in V_1$.

Appliquant le lemme 6 au cas qui nous occupe, V_1 est un anneau de valuation de F qui contient K , et, puisque S est complet, V_1 domine une localité M de S . On a $\underline{r}(V_o) \subset V_1$; $M \cap \underline{r}(V_o)$ est donc un idéal premier $\underline{p}$ de M , et V_o domine $M_{\underline{p}}$, ce qui montre que P et $M_{\underline{p}}$ sont apparentées, d'où $M_{\underline{p}} = P$ puisque $M_{\underline{p}} \in \bar{S}$. Donc M appartient à $\mathfrak{S}(\bar{P})$; comme V_1 domine M , il est clair que $\bar{V}_1$ domine $\theta(M)$. Or $\bar{V}_1 \cap (P/\underline{r}(P))$ est un anneau local de $P/\underline{r}(P)$ qui domine $\bar{V}$ et lui est par suite identique ; il en résulte que $\bar{V}$ domine $\theta(M)$; S' est donc complet.

7.- <u>Domination de schémas</u>.

Soient S et S' des schémas du corps L . On dit que S' <u>domine</u> S si toute localité de S' domine au moins une localité de S . Puisque deux localités distinctes de S ne peuvent être apparentées, une localité M' de S' ne domine qu'une seule localité $M = f(M')$ de S ; on dit que f est l'<u>application de domination</u> de S' dans S . Il est clair que si S' domine S et S domine S' , alors $S = S'$: en effet, le composé des applications de domination est l'identité.

<u>Proposition 10</u>.- <u>Si un schéma</u> S' <u>domine un schéma</u> S , <u>l'application de domination</u> f <u>de</u> S' <u>dans</u> S <u>est continue</u>.

En effet, si U est une partie ouverte non vide de S , U est un schéma et $\bar{f}^1(U)$, qui est l'ensemble des localités de S' qui dominent des localités de U , est ouvert dans S' en vertu du lemme 4 .

<u>Remarque</u> : si M' est spécialisation de N' , alors $f(M')$ est spécialisation de $f(N')$: en effet, M' est adhérent à $\{N'\}$, donc $f(M')$ est adhérent à $\{f(N')\}$.

<u>Proposition 11.- Soient</u> S <u>et</u> S' <u>des schémas affines de</u> L , <u>d'algèbres</u> A <u>et</u> A' . <u>Pour que</u> S' <u>domine</u> S , <u>il faut et suffit que</u> $A \subset A'$.

Si S' domine S , toute localité de S' contient une localité de S , et l'intersection A' des localités de S' contient celle, A , des localités de S . Réciproquement, si $A \subset A'$, et si $\underline{m}'$ est un idéal premier de A' , $A'_{\underline{m}'}$ domine $A_{\underline{m}}$, en notant $\underline{m}$ l'intersection $\underline{m}' \cap A$.

Soient S et S' des schémas tels que S' domine S , P' une localité de S' et P la localité de S dominée par P' . Soit $\mathfrak{S}(P')$ (resp. $\mathfrak{S}(P)$) l'ensemble des spécialisations de P' (resp. P) dans S' (resp. S) ; soit T' (resp. T) le schéma induit par S' (resp. S) sur $\mathfrak{S}(P')$ (resp. $\mathfrak{S}(P)$) . Nous désignerons par f l'application de domination de S' dans S , par θ et θ' les applications canoniques de $\mathfrak{S}(P)$ et $\mathfrak{S}(P')$ sur T et T' . Le corps des fractions de T est $P/\underline{r}(P)$, qui s'identifie à un sous-corps des fractions $P'/\underline{r}(P')$ de T' .

<u>Proposition 12.- Les notations étant comme ci-dessus,</u> T' <u>domine</u> T , <u>et, si</u> g <u>est l'application de domination de</u> T' <u>dans</u> T , <u>le diagramme</u>

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}(P') & \xrightarrow{f} & \mathfrak{S}(P) \\ {\scriptstyle \theta'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta} \\ T' & \xrightarrow{g} & T \end{array}$$

<u>est commutatif.</u>

Soient M' une spécialisation de P' dans S' , et M la localité de S dominée par M' . On a $M \subset P'$, et $M_{M \cap \underline{r}(P')}$ est une localité de S dominée par P' , donc identique à P , d'où $M \in \mathfrak{S}(P)$. Soit φ l'application canonique de P' sur $P'/\underline{r}(P')$; elle induit l'application canonique de P sur $P/\underline{r}(P)$; la localité $\theta(M') = \varphi(M')$ domine $\varphi(M) = \theta(M)$, ce qui démontre la proposition 12.

<u>Proposition 13.- Si un schéma</u> S <u>est dominé par un schéma complet</u> S' , S <u>est complet.</u>

Cela résulte immédiatement des définitions.

Soit S' un schéma qui domine un schéma S, et soit M une localité de S. On dit que S' est <u>complet au-dessus de</u> M si tout anneau de valuation du corps des fractions de S' qui domine M domine une localité M' de S' ; on voit facilement qu'on a alors $f(M') = M$, f désignant l'application de domination. Il en est certainement ainsi si S' est complet. Si S' est complet au-dessus de toute localité de S, on dit que S' est complet au-dessus de S. Si S est complet et si S' est complet au-dessus de S, S' est complet, comme il résulte immédiatement des définitions.

<u>Proposition 14.- Soit</u> S' <u>un schéma qui domine un schéma</u> S, <u>et soit</u> P <u>une localité de</u> S. <u>Si</u> S' <u>est complet au-dessus d'une localité</u> M <u>de</u> S <u>qui est une spécialisation de</u> P, S' <u>est complet au-dessus de</u> P.

Soit V un anneau de valuation du corps des fractions de S' qui domine P. Soit φ l'application canonique de V sur $V/\underline{r}(V)$; $\varphi(M)$ est un anneau local de $V/\underline{r}(V)$, donc est dominé par un anneau de valuation $\overline{W}$ de $V/\underline{r}(V)$; l'ensemble $W = \overline{\varphi}^{1}(\overline{W})$ est un anneau de valuation du corps des fractions de S' (lemme 6) ; il est clair qu'il domine M. Il domine donc une localité M' de S'. On a $M' \subset W \subset V$; V domine donc la localité $M'_{M' \cap \underline{r}(V)}$, qui appartient à S'.

<u>Théorème 4.- Soient</u> S <u>et</u> S' <u>des schémas du corps</u> L. <u>Il existe alors un schéma</u> S'' <u>de</u> L <u>et un seul qui possède les propriétés suivantes</u> : S'' <u>domine</u> S <u>et</u> S', <u>et tout schéma de</u> L <u>qui domine</u> S <u>et</u> S' <u>domine</u> S''. <u>Tout anneau local de</u> L <u>qui domine une localité de</u> S <u>et une localité de</u> S' <u>domine une localité de</u> S''. <u>Si</u> S <u>et</u> S' <u>sont des schémas affines d'algèbres</u> A <u>et</u> A', S'' <u>est le schéma affine d'algèbre</u> $K[A,A']$. <u>Si</u> S <u>et</u> S' <u>sont projectifs</u>, S'' <u>est projectif. Si</u> S <u>et</u> S' <u>sont complets</u>, S'' <u>est complet.</u>

Représentons S (resp. S') comme réunion de schémas affines S_i, $1 \leq i \leq r$ (resp. S'_j, $1 \leq j \leq r'$), d'algèbres A_i (resp. A'_j). Soit S_{ij} le schéma affine d'algèbre $K[A_i, A'_j]$, et soit S'' la réunion de tous les S_{ij}. Toute localité de S_{ij} domine une localité de S_i et une localité de S'_j (lemme 1) ; toute localité de S'' domine donc une localité de S et une localité de S'. Soit Q une localité qui domine une localité $M \in S$ et une localité $N \in S'$; si $M \in S_i$, $N \in S'_j$, Q contient A_i et A'_j, donc aussi $K[A_i, A'_j]$ et domine la localité de S'', anneau local de l'idéal premier $K[A_i, A'_j] \cap \underline{r}(Q)$ de $K[A_i, A'_j]$. Soient P et P' des localités de S'' qui sont apparentées, donc dominées par une localité Q. Supposons que $P \in S_{ij}$;

alors P (resp. P') domine une localité M (resp. M') de S et une localité N (resp. N') de S', et on a $M \in S_i$, $N \in S'_j$. Comme M et M' (resp. N et N') sont dominées par Q, on a $M = M'$ (resp. $N = N'$), et il résulte de ce qu'on a dit plus haut que P' domine une localité P_1 de S_{ij}. Comme P et P_1 sont dominées par Q, on a $P = P_1$, et P' domine P. On voit de même que P domine P', d'où $P = P'$. L'ensemble S'' est donc un schéma, qui possède manifestement les propriétés indiquées. Si S''_1 est un schéma possédant ces propriétés, chacun des schémas S'', S''_1 domine l'autre ; d'où $S'' = S''_1$. Supposons que S et S' soient les schémas projectifs définis par des espaces vectoriels H et H' de dimensions finies ; l'espace vectoriel H'' engendré par les produits uu', $u \in H$, $u' \in H'$, est de dimension finie. Si u (resp. u') est un élément $\neq 0$ de H (resp. H'), on voit tout de suite que $K[u^{-1}H, u'^{-1}H'] = K[(uu')^{-1}H'']$; il en résulte que S'' est le schéma projectif défini par S''. Si S et S' sont complets, un anneau de valuation du corps des fractions de S'' (qui contient ceux de S et S') domine une localité de S et une localité de S', donc aussi une localité de S'', ce qui montre que S'' est complet.

Les notations étant celles du théorème 4, on dit que S'' est le joint des schémas S et S'.
