Séminaire Henri Cartan

R. Godement

Localités simples. II

Séminaire Henri Cartan, tome 8 (1955-1956), exp. nº 17, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A17_0>

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1955-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire E.N.S. 1955/56
(H. CARTAN et C. CHEVALLEY)

LOCALITÉS SIMPLES. II

(Exposés de R. GODEMENT, les 16.4 et 23.4.1956)

1.- Anneaux locaux réguliers.

Soit M un anneau local noethérien de hauteur r ; on dit que M est régulier si l'idéal maximal $\underline{r}(M)$ peut être engendré par r éléments (qui forment nécessairement un système de paramètres de M). Lorsque M est une localité sur un corps, on dit que M est une localité simple. Dans ce qui suit on pose

$$G(M) = \sum \underline{r}(M)^n/\underline{r}(M)^{n+1} \qquad , \qquad L = M/\underline{r}(M) \quad .$$

Théorème 1.- Soit M un anneau local noethérien de hauteur r . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) : M est régulier ;

(b) : $\underline{r}(M)/\underline{r}(M)^2$ est un espace vectoriel de dimension r sur L ;

(c) : l'algèbre graduée $G(M)$ est isomorphe à une algèbre de polynomes.

L'équivalence de (a) et (b) résultera évidemment du lemme suivant :

Lemme 1 : Soit $\underline{q}$ un idéal d'un anneau local noethérien M , tel que $\underline{q} \neq M$; pour que des éléments $x_i \in \underline{q}$ engendrent $\underline{q}$ il faut et il suffit que leurs classes modulo $\underline{q}^2$ engendrent le $(M/\underline{q})$-module $\underline{q}/\underline{q}^2$.

Supposons en effet que les classes $\overline{x_i} \in \underline{q}/\underline{q}^2$ engendrent $\underline{q}/\underline{q}^2$; si $\underline{q}'$ est l'idéal engendré par les x_i on aura évidemment $\underline{q} \subset \underline{q}' + \underline{q}^2$, d'où par récurrence $\underline{q} \subset \underline{q}' + \underline{q}^n$ pour tout $n \geq 2$; par suite (Exposé 2, théorème 3)

$$\underline{q} \subset \bigcap_{n \geq 2} (\underline{q}' + \underline{q}^n) = \underline{q}' \qquad ,$$

d'où le lemme.

Montrons maintenant que (c) implique (b) ; en effet si $G(M)$ est isomorphe à une algèbre de polynomes à s variables (nécessairement à coefficients dans L) , la dimension du vectoriel $G_n(M)$ est un polynome en n , de degré $s-1$; on sait par ailleurs que la fonction caractéristique de M filtré par les puissances de $\underline{r}(M)$ est de degré r ; donc $s = r$; par suite

$G_1(M) = \underline{r}(M)/\underline{r}(M)^2$ est de dimension r .

Reste à prouver que (a) implique (c). Supposons $\underline{r}(M)$ engendré par $x_1 , \dots , x_r$ et posons $S = L[X_1 , \dots , X_r]$; on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{a} \longrightarrow S \longrightarrow G(M) \longrightarrow 0$$

de S-modules gradués, et $\underline{a}$ est un idéal homogène de S . On en déduit

$$\binom{n+r-1}{r-1} = \ell g(S_n) = \ell g(G_n(M)) + \ell g(\underline{a}_n) \quad ;$$

le premier membre a pour terme de plus haut degré $\frac{n^{r-1}}{(r-1)!}$; d'autre part $\ell g(G_n(M)) = \ell g(M/\underline{r}(M)^{n+1}) - \ell g(M/\underline{r}(M)^n)$ commence par $a.\frac{n^{r-1}}{(r-1)!}$, où a est un entier $\geqslant 1$; comme $\ell g(\underline{a}_n) \geqslant 0$ on a nécessairement $a = 1$, et on voit que la fonction polynomiale $\ell g(\underline{a}_n)$ est de degré $\leqslant r-2$; on va en déduire $\underline{a} = 0$. En effet si $\underline{a}$ contenait un élément u non nul, homogène de degré k , $\underline{a}_n$ contiendrait $u.S_{n-k} \simeq S_{n-k}$, donc serait de longueur $\geqslant \binom{n-k+r-1}{r-1}$, ce qui est impossible.

<u>Théorème 2.- Un anneau local régulier est intègre et intégralement clos</u> (en particulier, une localité simple est normale).

Le fait que M soit intègre résulte de ce que $G(M)$ l'est, comme anneau de polynomes sur un corps ; on laisse au lecteur le soin de faire la démonstration.

Montrons maintenant que M est intégralement fermé dans son corps des fractions F . Pour qu'un $x \in F$ soit entier sur M , il faut et il suffit que l'anneau $M[x]$ soit un M-module de type fini, ou (puisque M est noethérien) qu'il soit contenu dans un module de type fini, ce qui signifie qu'il doit exister un $a \in M$ tel que les ax^n soient dans M ; on a alors $x = b/a$ avec $b \in M$. Pour prouver que $x \in M$ il suffit de faire voir que $b \in aM$, donc, d'après le théorème de Krull-Artin, que $b \in aM + \underline{r}(M)^n$ pour tout n , et, en raisonnant par récurrence, tout revient à établir que $b \in aM + \underline{r}(M)^m$ implique $b \in aM + \underline{r}(M)^{n+1}$. Or posons $b = au + v$ avec $u \in M$, $v \in \underline{r}(M)^n$; comme $ax^q \in M$ pour tout q et comme $u \in M$ on a aussi $a(x-u)^q \in M$ pour tout q ; de $b = ax = au + v$ résulte $a(x-u)^q = v^q/a^{q-1}$ donc on a la relation $a.v^q/a^q \in M$ pour tout q ; soit h le plus grand entier tel que $a \in \underline{r}(M)^h$; soient $\bar{v}$ et $\bar{a}$ les images de v et a dans $G_m(M)$ et $G_h(M)$:

on a $\bar{a} \neq 0$, et de $a.v^q/a^q \in M$ pour tout q résulte, puisque $G(M)$ est intègre et noethérien, que $\bar{v}/\bar{a}$ est entier sur $G(M)$, donc appartient à $G(M)$ puisqu'un anneau de polynomes sur un corps est intégralement clos. Il existe donc un $u' \in \underline{r}(M)^{n-h}$ tel que l'on ait $\bar{v} = \bar{a}.\overline{u'}$, où $\overline{u'}$ est l'image de u' dans $G_{n-h}(M)$; cela signifie que $v \equiv au'$ (mod. $\underline{r}(M)^{n+1}$) d'où résulte que $b \equiv a(u + u')$ (mod. $\underline{r}(M)^{n+1}$) ; le théorème est donc démontré.

<u>Corollaire</u> : <u>Soit</u> M <u>un anneau local régulier de hauteur</u> r ; <u>si</u> $x_1 , \dots , x_r$ <u>engendrent</u> $\underline{r}(M)$, <u>alors pour tout</u> i <u>l'idéal</u> $(x_1 , \dots , x_i)$ <u>est premier, et l'anneau local</u> $M/(x_1 , \dots , x_i)$ <u>est régulier et de hauteur</u> $r - i$.

En effet comme les x_k forment un système de paramètres de M , on sait (fin de l'Exposé précédent) que $M/(x_1 , \dots , x_i)$ est de hauteur $r - i$; or l'idéal maximal de cet anneau est engendré par $r - i$ éléments : cet anneau quotient est donc régulier, donc intègre, ce qui démontre la proposition.

On peut facilement démontrer une réciproque du corollaire précédent : si un idéal premier $\underline{p}$ de M régulier est tel que $M/\underline{p}$ soit régulier, alors $\underline{p}$ est engendré par une partie d'un système de r générateurs de $\underline{r}(M)$.

Soit M un anneau local régulier de hauteur <u>un</u> ; alors $\underline{r}(M)$ est principal, en sorte que M est l'anneau d'une <u>valuation discrète</u> de son corps des fractions (Exposé 2, Proposition 7). De plus, un anneau local M de hauteur un est régulier si et seulement s'il est <u>intègre et intégralement clos</u> ; en effet prenons un $x \in M$ tel que l'idéal xM soit primaire ; alors $\underline{r}(M)$ est un idéal premier minimal de xM (c'est même le seul) ; donc (Exposé 2, théorème 5) l'idéal maximal de $M_{\underline{r}(M)} = M$ est principal, ce qui prouve que M est régulier. D'ailleurs le Théorème 5 de l'Exposé 2 montre en fait qu'on a le résultat plus général que voici :

<u>Théorème 3</u>.- <u>Soit</u> A <u>un anneau d'intégrité noethérien et intégralement clos ; pour tout idéal premier-non-nul minimal</u> $\underline{p}$ <u>de</u> A , <u>l'anneau local</u> $A_{\underline{p}}$ <u>est régulier et de hauteur un</u>.

En effet, l'idéal $\underline{p}.A_{\underline{p}}$ est principal.

Interprétation géométrique du Théorème 3 : toute sous-variété de dimension $n-1$ d'une variété V <u>normale</u> de dimension n est <u>simple</u> sur V (on dit que $W \subset V$ est simple sur V si l'anneau local de W dans V est régulier).

2.- Simplicité des localités pures.

Soit M une localité sur un corps K ; on dira que M est pure si elle est isomorphe à $A_{\underline{p}}$, où A est une algèbre de polynomes sur K (géométriquement, M est l'anneau local d'une variété par rapport à l'espace affine ambiant).

Théorème 4.- Toute localité pure est simple.

(Autrement dit, un espace affine n'a pas de points multiples).

Posons en effet $M = A_{\underline{p}}$, où $A = K[X_1 , \dots , X_n]$, et $L = M/\underline{r}(M)$; soit x_i l'image de X_i dans L . Si M est de hauteur r , le degré de transcendance de L sur K est $n - r$; on peut donc supposer $x_1 , \dots , x_{n-r}$ algébriquement indépendants sur K , et comme $\underline{p}$ est l'idéal des relations entre les x_i on voit que $\underline{p} \cap K[X_1 , \dots , X_{n-r}] = 0$; donc M contient le corps $K(X_1 , \dots , X_{n-r})$; en remplaçant K par ce corps, et A par $B = K(X_1 , \dots , X_{n-r})[X_{n-r+1} , \dots , X_n]$, on est évidemment ramené au cas où L est une extension algébrique de K , i.e. au cas où $\underline{p}$ est maximal ; le théorème 4 est alors une conséquence du

Théorème 4bis.- Soit $\underline{p}$ un idéal maximal d'un anneau de polynomes $A = K[X_1 , \dots , X_n]$; alors $\underline{p}$ est engendré par n éléments.

Considérons toujours le corps

$$L = A/\underline{p} = K[x_1 , \dots , x_n] = K(x_1 , \dots , x_n) \quad ;$$

puisque les x_i sont algébriques sur K , les sous-anneaux

$$K_i = K[x_1 , \dots , x_i]$$

sont des sous-corps de L . Soit

$$\sum_k a_{ik}(x_1 , \dots , x_{i-1})X^k$$

le polynome minimal de x_i sur le corps K_{i-1} ; les coefficients a_{ik} sont des polynomes en $x_1 , \dots , x_{i-1}$, à coefficients dans K ; on peut donc former les éléments

$$P_i(X_1 , \dots , X_i) = \sum_k a_{ik}(X_1 , \dots , X_{i-1})X_i^k$$

de A ; ils sont évidemment dans $\underline{p}$ et de plus P_i est un polynome unitaire en X_i ; on va prouver qu'ils engendrent $\underline{p}$. Soit en effet un polynome $P \in \underline{p}$, et supposons que P contienne X_i mais non les variables suivantes.

Comme P_i est unitaire par rapport à X_i on peut écrire

$$P = P_i Q_i + R_i$$

où le degré de R_i par rapport à X_i est strictement inférieur à celui de P_i ; on a évidemment $R_i(x_1 , \dots , x_i) = 0$; comme $P_i(x_1 ,\dots, x_{i-1} , X)$ est le polynome minimal de x_i sur K_{i-1} , il s'ensuit que $R_i(x_1 , \dots , x_{i-1} , X)$ est identiquement nul ; on peut donc écrire

$$R_i(X_1 , \dots , X_i) = \sum_k R_{ik}(X_1 , \dots , X_{i-1})X_i^k$$

où les R_{ik} sont dans $\underline{p}$, d'où le théorème en raisonnant par récurrence sur i .

3.- Formes linéaires sur $G_1(M)$ et dérivations.

Rappelons (Exposé 13, n° 1) que si M est un anneau on désigne par $D(M)$ le module des différentielles de M ; on a une dérivation $x \longrightarrow dx$ de M à valeurs dans $D(M)$. Si M est une algèbre sur un corps K on note $D_K(M)$ le module des K-différentielles de M ; ici encore on a une dérivation canonique $x \longrightarrow d_K x$ de M à valeurs dans $D_K(M)$. On a évidemment un homomorphisme $D(M) \longrightarrow D_K(M)$, à savoir $dx \longrightarrow d_K x$; il est surjectif, et son noyau est le sous-module de $D(M)$ sur lequel s'annulent toutes les K-dérivations de M (à valeurs dans un M-module quelconque).

Supposons que M soit un anneau local et posons

$$L = M/\underline{r}(M) \quad .$$

Si E est un module sur M , la suite exacte $0 \longrightarrow \underline{r}(M) \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ conduit à la suite exacte $\underline{r}(M) \otimes E \longrightarrow E \longrightarrow L \otimes E \longrightarrow 0$, d'où l'on déduit que

$$L \underset{M}{\otimes} E = E/\underline{r}(M)E \quad .$$

Nous allons maintenant définir un homomorphisme canonique d'espaces vectoriels sur L :

$$G_1(M) = \underline{r}(M)/\underline{r}(M)^2 \longrightarrow L \underset{M}{\otimes} D(M) \quad .$$

Pour cela considérons l'application $d : M \longrightarrow D(M)$; la formule $d(xy) = \dots$ montre que d applique $\underline{r}(M)^2$ dans $\underline{r}(M)D(M)$, d'où par passage au quotient une application additive $G_1(M) \longrightarrow L \underset{M}{\otimes} D(M)$; celle-ci est compatible avec les structures d'espaces vectoriels sur L , i.e. de M-modules, en vertu du

fait que pour $y \in \underline{r}(M)$ on a $d(xy) \equiv xdy$ (modulo $\underline{r}(M)D(M)$) .

Par transposition on voit que toute dérivation $D : M \longrightarrow L$ induit une forme linéaire $\bar{D}$ sur l'espace vectoriel $G_1(M)$, obtenue en prenant la restriction de D à $\underline{r}(M)$ et en observant que celle-ci est nulle sur $\underline{r}(M)^2$. On remarquera que $\bar{D}$ est nulle si et seulement si D est nulle sur $\underline{r}(M)$, i.e. si et seulement si D provient (par l'homomorphisme canonique $M \longrightarrow L$) d'une dérivation $L \longrightarrow L$. On déduit de là qu'on a une suite exacte

$$G_1(M) \longrightarrow L \underset{M}{\otimes} D(M) \longrightarrow D(L) \longrightarrow 0$$

(l'homomorphisme $L \underset{M}{\otimes} D(M) \longrightarrow D(L)$ n'est autre évidemment que $dx \longrightarrow d\bar{x}$, où $\bar{x}$ est la classe de x modulo $\underline{r}(M)$) .

Théorème 5.- Si M est un anneau local qui contient un corps K tel que l'extension L/K soit séparable, la suite

$$0 \longrightarrow G_1(M) \longrightarrow L \otimes_M D_K(M) \longrightarrow D_K(L) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Il suffit évidemment de montrer que toute forme L-linéaire sur $G_1(M)$ est induite par une K-dérivation de M dans L . Montrons d'abord qu'il en est bien ainsi dans le cas où M est somme directe de $\underline{r}(M)$ et d'un sous-anneau N contenant K (ce qui implique que N est un corps). Soit alors, pour $x \in M$, $x = f(x) + g(x)$, $f(x) \in N$, $g(x) \in \underline{r}(M)$; on vérifie aussitôt que g est une K-dérivation de M dans $\underline{r}(M)$; si h est une forme L-linéaire sur $G_1(M)$, h définit une application M-linéaire h^* de $\underline{r}(M)$ dans L et $h^* \circ g$ est une K-dérivation de M qui induit h sur $G_1(M)$. Soit maintenant $M' = M/(\underline{r}(M))^2$, d'où $K \subset M'$ et $G_1(M') = G_1(M)$; il suffit évidemment de démontrer le théorème pour M' , donc de démontrer le théorème sous l'hypothèse que $(\underline{r}(M))^2 = 0$. Il suffira donc d'établir que si un anneau local M contient un corps K et est tel que $L = M/\underline{r}(M)$ soit séparable sur K et que $(\underline{r}(M))^2 = \{0\}$, alors M est somme directe de $\underline{r}(M)$ et d'un sous-anneau contenant K . Puisque M contient un corps K , M a même caractéristique que L . Supposons d'abord cette caractéristique $p > 0$. L'assertion résulte alors du lemme un peu plus général suivant :

Lemme 1 : Soit M un anneau local de caractéristique p , et soit $L = M/\underline{r}(M)$: supposons que $(\underline{r}(M))^n = \{0\}$ pour un certain $n > 0$. Soit K un sous-corps de M sur lequel L est séparable. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille

d'éléments de M qui possède les propriétés suivantes : les images canoniques $\bar{a}_i$ des a_i dans L forment une p-base de L, et il y a une partie I' de I telle que les a_i pour $i \in I'$ forment une p-base de K. Soit q une puissance de p telle que $q \geq n$; M est alors somme directe de l'anneau $N = M^q[(a_i)_{i \in I}]$ et de $\underline{r}(M)$, et N contient K.

On notera que l'existence d'une famille $(a_i)_{i \in I}$ ayant les propriétés indiquées résulte immédiatement du fait que L est séparable sur K. Observons d'abord que l'on a $L = L^p[(\bar{a}_i)_{i \in I}]$, d'où par récurrence, $L = L^{p^h}[(\bar{a}_i)_{i \in I}]$ pour tout $h > 0$, et en particulier pour $p^h = q$; l'image de N dans L est donc L tout entier. Soit E l'ensemble des familles $(e_i)_{i \in I}$ d'entiers ≥ 0 presque tous nuls ; si $e = (e_i)_{i \in I}$, soit $\bar{a}^e = \prod_{i \in I} \bar{a}_i^{e_i}$, $a^e = \prod_{i \in I} a_i^{e_i}$. Si $h > 0$, soit E_h l'ensemble des $e = (e_i)_{i \in I}$ tels que $e_i < p^h$ pour tout i. Les $\bar{a}^e$, $e \in E_1$, forment une base de L/L^p ; les $\bar{a}^{p^k e}$ $(e \in E_1)$ forment donc une base de $L^{p^k}/L^{p^{k+1}}$. Or, tout $e \in E_h$ se met d'une manière et d'une seule sous la forme $e = \sum_{k=0}^{h-1} p^k e_k$, où les e_k sont dans E_1 ; il en résulte aussitôt que les aussitôt que les $\bar{a}^e$, $e \in E_h$, forment une base de L/L^{p^h}. Nous désignerons par F l'ensemble E_h pour la valeur de h telle que $p^h = q$. Il est clair que tout élément u de N se met sous la forme $\sum_{e \in F} c_e^q a^e$, les c_e étant dans M. Supposons que $u \in \underline{r}(M)$; soit alors $\bar{c}_e$ l'image de c_e dans L. On a $\sum_{e \in F} \bar{c}_e^q \bar{a}^e = 0$, d'où $\bar{c}_e^q = 0$, $\bar{c}_e = 0$, $c_e \in \underline{r}(M)$ et $c_e^q = 0$ puisque $q \geq n$. On a donc $N \cap \underline{r}(M) = \{0\}$. Puisque $(a_i)_{i \in I'}$ est une p-base de K, on a $K = K^q[(a_i)_{i \in I'}] \subset N$, et le lemme est démontré.

Supposons maintenant M et L de caractéristique 0 (avec $(\underline{r}(M))^2 = \{0\}$). Parmi les sous-corps de M contenant K, il en existe au moins un maximal, soit N ; soit $\bar{N}$ son image dans L. Soit $\bar{u} \in L$, et soit u un représentant de $\bar{u}$ dans M. Si $\bar{u}$ était transcendant sur $\bar{N}$, on aurait $F(u) \notin \underline{r}(M)$ pour tout polynome $F \neq 0$ à coefficients dans N ; M étant un anneau local, tout élément $\neq 0$ de $N[u]$ y serait inversible, et M contiendrait un corps des fractions de $N[u]$, ce qui est impossible. Donc $\bar{u}$ est algébrique sur $\bar{N}$; soient $\bar{F}$ son polynome minimal, et F le polynome à

coefficients dans N qui donne $\bar{F}$ par réduction des coefficients modulo $\underline{r}(M)$. Comme $\bar{N}$ est de caractéristique 0 , $\bar{F}'(\bar{u}) \neq 0$, d'où $F'(u) \notin \underline{r}(M)$, et $F'(u)$ est inversible dans M . Soit $u' = u-(F'(u))^{-1}F(u)$; comme $F(u) \in \underline{r}(M)$ et $(\underline{r}(M))^2 = \{0\}$, on a $F(u') = 0$. Comme F est irréductible, $N[u']$ est un corps, d'où $u' \in N$, $\bar{u} \in \bar{N}$. On a donc $\bar{N} = L$. Comme N est un corps, la somme $M = N + \underline{r}(M)$ est directe. Le théorème 5 est donc établi.

Prenant pour K le sous-corps primitif de M , on en déduit que la suite

$$0 \longrightarrow G_1(M) \longrightarrow L \otimes_M D(M) \longrightarrow D(L) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Corollaire au théorème 5 : Soit M un anneau local régulier qui a même caractéristique que son corps des restes $L = M/\underline{r}(M)$; soit $\underline{p}$ un idéal premier de M ; soient r et $r-s$ les hauteurs de M et de $M/\underline{p}$. Pour que $M/\underline{p}$ soit régulier, il faut et suffit qu'il existe s éléments $x_i \in M/\underline{p}$ et s dérivations D_i de M dans L tels que $\det(D_i x_j) \neq 0$. Si de plus L est séparable sur un sous-corps K de M , on peut astreindre les D_i à être des K-dérivations.

En effet, posant $M' = M/\underline{p}$, on doit exprimer que

$$G_1(M') = G_1(M)/\tilde{\underline{p}}$$

(où $\tilde{\underline{p}}$ est l'image de $\underline{p}$ dans $G_1(M)$) est de dimension $r-s$ sur L ; or $G_1(M)$ est de dimension r puisque M est régulier ; tout revient donc à exprimer que l'image de $\underline{p}$ est de dimension s (et l'on sait déjà, puisque $\dim G_1(M') \geq r-s$, qu'elle est de dimension $\leq s$), i.e. contient s vecteurs linéairement indépendants ; comme toute forme linéaire sur $G_1(M)$ provient d'une dérivation (resp. K-dérivation si L est séparable) de M dans L , on trouve immédiatement le résultat cherché.

Bien entendu le corollaire (appliqué à $\underline{p} = 0$) donne une condition nécessaire et suffisante pour que r éléments de $\underline{r}(M)$ engendrent $\underline{r}(M)$.

4.- Le critère de Zariski.

C'est le suivant :

Théorème 6.- Soient A une algèbre de polynomes sur un corps K , $\underline{p}$ un idéal premier de A , s la hauteur de $A_{\underline{p}}$, et $\underline{m}$ un idéal premier de A contenant $\underline{p}$. Pour que la localité $A_{\underline{m}}/\underline{p}A_{\underline{m}}$ (anneau local de $\underline{m}/\underline{p}$ dans $A/\underline{p}$) soit simple, il faut et il suffit qu'il existe s éléments $f_i \in \underline{p}$ et s

dérivations $D_i : A \longrightarrow A$, tels que $\det(D_i f_j)$ ne soit pas dans $\underline{m}$. Si de plus le corps $A_{\underline{m}}/\underline{m}A_{\underline{m}}$ est séparable sur K , on peut astreindre les D_i à être des K-dérivations de A .

Soit D une dérivation $A \longrightarrow A$; D se prolonge en une dérivation $A_{\underline{m}} \longrightarrow A_{\underline{m}}$, donc définit une dérivation $A_{\underline{m}} \longrightarrow L$ et par suite une forme linéaire $\bar{D}$ sur $G_1(A_{\underline{m}})$; compte tenu du Corollaire du Théorème 5 (appliqué à la localité simple $A_{\underline{m}}$ et à l'idéal premier $\underline{p}.A_{\underline{m}}$ de la dite), tout revient à prouver que toute forme linéaire sur $G_1(A_{\underline{m}})$ est induite à un facteur constant près (non nul) par une dérivation $A \longrightarrow A$.

Posons $A = K[X_1, \ldots, X_n]$ et $M = A_{\underline{m}}$; il existe des $p_i \in \underline{m}$ qui engendrent l'idéal $\underline{r}(M)$. Toute forme linéaire sur $G_1(M)$ provient d'une dérivation $D : M \longrightarrow L = M/\underline{r}(M)$; montrons d'abord qu'une telle dérivation se remonte en une dérivation $M \longrightarrow M$.
Puisqu'une dérivation de M (à valeurs dans un M-module arbitraire) est déterminée par sa restriction à K et ses valeurs sur les X_i , et comme ces données peuvent être choisies arbitrairement, il suffit évidemment de montrer que toute dérivation $K \longrightarrow L$ provient d'une dérivation $K \longrightarrow M$; or les dérivations de K (à valeurs dans un vectoriel quelconque sur K) correspondent aux homomorphismes du vectoriel $D(K)$; comme K est un corps il est clair que notre assertion est démontrée (plus généralement : si l'on a un vectoriel E sur K , toute dérivation de K à valeurs dans un quotient de E provient d'une dérivation à valeurs dans E).

Cela étant, on voit que toute forme linéaire sur $G_1(M)$ provient d'une dérivation $D : M \longrightarrow M$. Pour établir le Théorème, il suffit de prouver qu'étant donné $D : M \longrightarrow M$, il existe un $u \in A-\underline{m}$ et une dérivation $D' : A \longrightarrow A$ telle que l'on ait

$$(*) \qquad Dp_i \equiv u.D'p_i \quad \mathrm{mod}.\underline{r}(M)$$

pour tout i (car la forme linéaire sur $G_1(M)$ induite par D est déterminée par les valeurs des Dp_i modulo $\underline{r}(M)$) . Or, soit (a_ρ) la famille finie des coefficients (dans K) des divers polynomes p_i ; pour résoudre (*) il suffit de construire une dérivation $D' : A \longrightarrow A$ et un $u \in A-\underline{m}$ tel que l'on ait

$$Da_\rho = u.D'a_\rho \quad ; \quad DX_i = u.D'X_i \quad ;$$

le seul point non trivial est évidemment de résoudre le système $Da_\rho = u.D'a_\rho$, ce qui ne fait d'ailleurs intervenir que les restrictions de D et D' au

corps K (lesquelles sont des dérivations $K \longrightarrow M$ et $K \longrightarrow A$) . Or considérons dans $D(K)$ les différentielles da_ρ ; toute relation linéaire (à coefficients dans K) entre celles-ci se transporte aux Da_ρ , et sera automatiquement vérifiée par les $D'a_\rho$; on peut donc se borner au cas où les différentielles da_ρ sont linéairement indépendantes sur K ; mais alors il existe une dérivation $K \longrightarrow A$ qui prend sur les a_ρ des valeurs arbitrairement données, et comme il existe un $u \in A-\underline{m}$ tel que les $u^{-1}.Da_\rho$ soient tous dans A , il est clair que le problème est résolu.

Lorsque de plus L est séparable sur K , on peut prendre pour D une K-dérivation et a fortiori pour D' une K-dérivation, car dans ce cas la meilleure façon de résoudre $D'a_\rho = 0$ est de prendre $D' = 0$ sur K . Le Théorème est donc entièrement démontré.

Pour interpréter géométriquement le théorème 6, prenons un corps algébriquement clos Ω contenant K , et considérons dans l'espace affine Ω^n les K-variétés V et $W \subset V$ qui correspondent aux idéaux premiers $\underline{p}$ et $\underline{m}$ de $A = K[X_1 , \dots , X_n]$; M est l'anneau local (sur K) de W dans V , et dire que M est régulier revient (par définition) à dire que W est K-simple sur V . Le Théorème 6 s'interprète alors comme suit ; V étant de dimension $n-s$, pour que W soit K-simple sur V il faut et il suffit qu'il existe s polynomes f_i nuls sur V , et s dérivations D_i de l'anneau des fonctions polynomes (sur K) de l'espace affine ambiant, tels que les restrictions à W des fonctions $D_i f_j$ aient un déterminant non (identiquement) nul. <u>Si en particulier le corps des fonctions</u> K-<u>rationnelles de</u> W <u>est séparable sur</u> K , W <u>est</u> K-<u>simple sur</u> V <u>si et seulement si la matrice formée par les restrictions à</u> W <u>des fonctions</u> $\partial f_i/\partial X_j$ <u>est de rang</u> $s = n - \dim(V)$, i.e. si l'un des jacobiens

$$\frac{D(f_1 , \dots , f_s)}{D(X_{i_1} , \dots , X_{i_s})}$$

n'est pas identiquement nul sur W .

Il résulte immédiatement de là que <u>l'ensemble des localités simples d'un schéma sur</u> K <u>est un ouvert non vide</u> ("non vide" parce que, par exemple, V est toujours simple sur V) .

D'autre part, <u>soient</u> V <u>une</u> K-<u>variété et</u> W <u>une sous-</u>K-<u>variété de</u> V ; <u>si</u> W <u>contient une sous-</u>K-<u>variété</u> K-<u>simple sur</u> V , <u>alors</u> W <u>elle-même est</u> K-<u>simple sur</u> V ; cela résulte trivialement du critère de Zariski. On peut aussi exprimer ce résultat comme suit : <u>si</u> M <u>est une localité simple, alors</u> $M_{\underline{p}}$

est une localité simple pour tout idéal premier p de M. On démontre que ce résultat subsiste pour tous les anneaux locaux noethériens réguliers (la démonstration reposant sur le "théorème des syzygies").

Supposons enfin que K soit algébriquement clos, et soit V une variété irréductible dans K^n. Pour qu'une sous-variété W de V soit simple sur V, il est nécessaire et suffisant qu'elle contienne un point simple de V, comme il résulte du critère jacobien. L'ensemble des points singuliers de V est un sous-ensemble fermé de V (si V est de dimension s, ce fermé est de dimension $\leq s-1$, et même $\leq s-2$ si V est normale), et les sous-variétés non simples de V sont celles qui sont contenues dans cet ensemble.

Notons enfin que dans la géométrie algébrique à la Weil, le critère de K-simplicité est en même temps un critère de simplicité "absolue" ; Weil ne considère en effet (dans le cas affine, et aussi dans le cas abstrait) que des K-variétés dont les fonctions rationnelles sur K forment une extension régulière, et a fortiori séparable, de K ; le critère de K-simplicité s'exprime donc par un jacobien usuel, et subsiste donc par toute extension du corps de base.

Il est d'ailleurs facile de prouver le résultat suivant :

Théorème 7.- Soient M une localité simple sur un corps K, $L = M/\underline{r}(M)$ le corps des restes de M, et K' une extension de K. Si K' ou L est séparable sur K, toute localité déduite de M par extension à K' du corps de base est simple.