R. Godement

Localités simples, I

Séminaire Henri Cartan, tome 8 (1955-1956), exp. n° 16, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A16_0>

LOCALITÉS SIMPLES, I.

(Exposé de R. GODEMENT, 9.4.1956)

1.- Idéaux premiers associés à un module noethérien.

Soit A un anneau commutatif (à élément unité $1 \neq 0$), et soit E un A-module. Pour tout idéal $\underline{q}$ de A, on note $\mathfrak{A}(\underline{q})$ l'annulateur de $\underline{q}$: sous-module des $x \in E$ tels que $ax = 0$ pour tout $a \in \underline{q}$. Pour tout sous-module F de E, on note $\mathfrak{A}(F)$ l'annulateur de F : idéal des $a \in A$ tels que $aF = 0$. Pour que $\mathfrak{A}(F) = A$, il faut et il suffit que $F = 0$. On notera que

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{A}(\underline{q})) \supset \underline{q} \quad , \quad \mathfrak{A}(\mathfrak{A}(F)) \supset F \, .$$

Définition : si A est noethérien et si E est un A-module de type fini, les idéaux premiers de la forme $\mathfrak{A}(F)$ (où F est un sous-module de E, nécessairement $\neq 0$) s'appellent les idéaux premiers associés à E.

Théorème 1.- Soient A un anneau noethérien, E un A-module de type fini. Les idéaux premiers associés à E sont en nombre fini. De plus, si G est un sous-module quelconque de E, $\neq 0$, tout élément minimal de l'ensemble des idéaux premiers contenant $\mathfrak{A}(G)$ (cf. Exposé 2, théorème 4) est l'un des idéaux premiers associés à E.

La démonstration utilise deux lemmes.

Lemme 1 : Soit $\underline{q}$ un idéal tel que $\underline{q}E \neq 0$. Considérons l'ensemble des idéaux de la forme $\mathfrak{A}(\underline{q}F)$, où F est un sous-module de E tel que $\underline{q}F \neq 0$; tout élément maximal de cet ensemble est un idéal premier.

En effet, si $xy\underline{q}F = 0$ et $y\underline{q}F \neq 0$, $\mathfrak{A}(y\underline{q}F)$ est $\neq A$ et contient $\mathfrak{A}(\underline{q}F)$, donc si $\mathfrak{A}(\underline{q}F)$ est maximal, on a $\mathfrak{A}(y\underline{q}F) = \mathfrak{A}(\underline{q}F)$, et par suite $x \in \mathfrak{A}(\underline{q}F)$; ceci prouve que $A(\underline{q}F)$ est premier.

Cela posé, E étant évidemment supposé $\neq 0$, définissons par récurrence une suite strictement croissante de sous-modules F_i et une suite d'idéaux premiers $\underline{p}_i$, comme suit : $\underline{p}_1$ est un élément maximal de l'ensemble des $\mathfrak{A}(F)$ tels que $F \neq 0$, et $F_1 = \mathfrak{A}(\underline{p}_1)$. Supposons déjà définis $F_1, \ldots, F_i$ et $\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_i$ de manière que $F_i = \mathfrak{A}(\underline{p}_1 \ldots \underline{p}_i)$; si $F_i = E$, on s'arrête ; si $F_i \neq E$, il existe des F tels que $\underline{p}_1 \ldots \underline{p}_i F \neq 0$, et on prend pour

$\underline{p}_{i+1}$ un élément maximal de l'ensemble des $\mathfrak{A}(\underline{p}_1 \dots \underline{p}_i F)$ correspondants. Puis on pose

(1) $\quad F_{i+1} = \mathfrak{A}(\underline{p}_1 \dots \underline{p}_i \underline{p}_{i+1})$. Ceci implique $F_{i+1} \supset F_i$ et $F_{i+1} \neq F_i$.

La suite des F_i étant strictement croissante, on a $F_n = E$ pour un n convenable. On notera que

(2) $\quad \underline{p}_i = \mathfrak{A}(\underline{p}_1 \dots \underline{p}_{i-1} F_i)$, $\quad (\underline{p}_1 = \mathfrak{A}(F_1)$ pour $i = 1)$,

car $\underline{p}_i \subset \mathfrak{A}(\underline{p}_1 \dots \underline{p}_{i-1} F_i)$, et $\underline{p}_1 \dots \underline{p}_{i-1} F_i \neq 0$, donc, d'après le caractère maximal de $\underline{p}_i$, on a l'égalité (2) .

Puisque $F_n = E$, on a $\underline{p}_1 \dots \underline{p}_n E = 0$, autrement dit $\underline{p}_1 \dots \underline{p}_n \subset \mathfrak{A}(E)$.

Lemme 2 : Soit G un sous-module quelconque de E ; définissons $\underline{p}'_i = A$ si $\underline{p}_i \not\supset \mathfrak{A}(G)$, $\underline{p}'_i = \underline{p}_i$ si $\underline{p}_i \supset \mathfrak{A}(G)$. Alors

$$\underline{p}'_1 \dots \underline{p}'_n G = 0 \quad ,$$

autrement dit : $\mathfrak{A}(G)$ contient le produit de ceux des $\underline{p}_i$ qui contiennent $\mathfrak{A}(G)$.

On va montrer, par récurrence descendante sur $i \leq n$, que

(3) $\quad \underline{p}_1 \dots \underline{p}_i \underline{p}'_{i+1} \dots \underline{p}'_n G = 0$.

C'est trivial pour $i = n$. Supposons-le vrai pour i ; posons $F = \underline{p}'_{i+1} \dots \underline{p}'_n G$; d'après (3), on a $\underline{p}_i \subset \mathfrak{A}(\underline{p}_1 \dots \underline{p}_{i-1} F)$. De deux choses l'une : ou bien $\underline{p}_1 \dots \underline{p}_{i-1} F = 0$, et l'assertion à démontrer est alors vraie pour $i-1$; ou bien, en vertu du caractère maximal de $\underline{p}_i$, on a $\underline{p}_i = \underline{A}(\underline{p}_1 \dots \underline{p}_{i-1} \underline{p}'_{i+1} \dots \underline{p}'_n G)$ et par suite $\underline{p}_i \supset A(G)$, donc $\underline{p}'_i = \underline{p}_i$, et l'assertion relative à $i-1$ est encore vraie.

Le lemme 2 étant maintenant démontré, observons que si $\mathfrak{A}(G)$ est premier, le lemme implique que $\mathfrak{A}(G)$ contient l'un des $\underline{p}_i$ qui contiennent $\mathfrak{A}(G)$, donc $\mathfrak{A}(G)$ est identique à l'un des $\underline{p}_i$. Tout idéal premier associé à E fait donc partie de l'ensemble des $\underline{p}_i$; d'ailleurs la relation (2) montre que les $\underline{p}_i$ sont des idéaux premiers associés à E . Si maintenant G est un sous-module quelconque $\neq 0$, l'intersection de ceux des $\underline{p}_i$ qui contiennent $\mathfrak{A}(G)$ a une puissance contenue dans $\mathfrak{A}(G)$, d'après le lemme 2 ; donc tout idéal premier minimal de $\mathfrak{A}(G)$ est l'un de ces $\underline{p}_i$ (cf. Exposé 2, paragraphe 4). Ceci achève la démonstration du théorème 1.

2.- Idéaux essentiels d'un anneau gradué.

Soit S un anneau commutatif gradué ($S_k = 0$ pour $k < 0$, $S_k S_h \subset S_{k+h}$). Un idéal $\underline{q}$ de S est inessentiel si $\underline{q} \supset S_k$ pour k assez grand ; dans le cas contraire, $\underline{q}$ est essentiel. Il est évident que l'intersection d'un nombre fini d'idéaux inessentiels est inessentielle.

Lemme 3 : Si $\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_r$ sont des idéaux premiers essentiels, il y a des entiers k arbitrairement grands tels que $S_k \not\subset \underline{p}_1 \cup \ldots \cup \underline{p}_r$.

C'est trivial si $r = 1$. Supposons l'assertion vraie pour $r-1$ $(r > 1)$. S'il existe un i tel que $S_k \cap \underline{p}_i \subset \bigcup_{j \neq i} \underline{p}_j$ pour k assez grand, on a $S_k \not\subset \underline{p}_1 \cup \ldots \cup \underline{p}_r$ pour des k arbitrairement grands. Supposons donc que, d étant un entier arbitrairement donné, il existe pour chaque i un entier $k_i \geq d$ et un $u_i \in S_{k_i} \cap \underline{p}_i$ tel que $u_i \notin \bigcup_{j \neq i} \underline{p}_j$. Posons $v_i = \prod_{j \neq i} u_j$; v_i est homogène de degré $k'_i = \sum_{j \neq i} k_j$, v_i appartient à $\underline{p}_j$ pour $j \neq i$, et $v_i \notin \underline{p}_i$. Soit w_i la puissance de v_i d'exposant $\prod_{j \neq i} k'_j$; w_i est de degré $k = \prod_{1 \leq i \leq r} k'_i \geq d$, et la somme $\sum_i w_i$ est un élément de S_k qui n'appartient à aucun des $\underline{p}_i$.

Lemme 4 : Supposons que l'anneau S soit engendré par ses éléments de degré $\leq e$. Alors si $\underline{q}$ est un idéal inessentiel, il en est de même de $\underline{q}^2$ (donc tout produit fini d'idéaux inessentiels est inessentiel).

En effet, soit d un entier tel que $S_k \subset \underline{q}$ pour $k \geq d$. Montrons que $S_k \subset \underline{q}^2$ pour $k \geq 2d+e-1$. Soit en effet un produit $x_1 \ldots x_n$, de degré $k \geq 2d+e-1$, dont les facteurs x_i sont homogènes de degrés $\leq e$; considérons le plus petit i tel que $x_1 \ldots x_i$ soit de degré $\geq d$; son degré est $< d+e$, donc le degré de $x_{i+1} \ldots x_n$ est $> k-d-e$, donc $\geq d$. Ainsi $x_1 \ldots x_n$ est égal au produit de deux éléments homogènes de degrés $\geq d$, et par suite appartient à $\underline{q}^2$.

Définition : soit E un S-module gradué (i.e. : E est gradué par des E_n tels que $S_k E_n \subset E_{n+k}$). Un élément $u \in S_k$ est superficiel pour E si, N désignant le noyau de l'homothétie $x \longrightarrow ux$ de E, la composante homogène N_n de N est nulle pour tout n assez grand.

Proposition 1.- Soit S un anneau gradué noethérien, engendré (comme anneau) par ses éléments homogènes de degré $\leq e$. Soit E un S-module gradué, de type fini. Alors il existe des éléments superficiels pour E, de degré k arbitrairement grand.

Démonstration : considérons les idéaux premiers $\mathfrak{p}_i$ associés à E (théorème 1). Etant donné un entier d, il existe un $k \geq d$ et un élément $u \in S_k$ qui n'appartient à aucun de ceux des $\mathfrak{p}_i$ qui sont essentiels (lemme 3). On va montrer que u est superficiel pour E. Soit F l'annulateur de l'idéal Su ; puisque $\mathfrak{A}(F)$ contient u, aucun des $\mathfrak{p}_i$ essentiels ne contient $\mathfrak{A}(F)$, et par suite (lemme 2) $\mathfrak{A}(F)$ contient un produit d'idéaux premiers inessentiels. D'après le lemme 4, $\mathfrak{A}(F)$ est inessentiel. Or le sous-module F est homogène, donc engendré par un nombre fini d'éléments homogènes ; soit q un entier plus grand que les degrés des générateurs homogènes de F, et soit a tel que $S_k \subset \mathfrak{A}(F)$ pour tout $k \geq a$. Pour tout entier $n \geq a+q$, tout élément de F_n est somme de produits de la forme vy, avec $v \in S_k$ $(k \geq a)$ et $y \in F_r$ $(r \leq q)$, et par suite est nul. Ceci signifie que la composante N_n du noyau N de l'homothétie $x \longrightarrow ux$ est nulle. C.Q.F.D.

3.- Fonction caractéristique d'un module gradué.

Enonçons tout d'abord quelques propriétés des fonctions polynomiales. Soit $f(n)$ une fonction définie pour tout entier n assez grand et à valeurs entières ; on dit (par abus de langage) qu'elle est polynomiale s'il existe un polynome $P(n)$ tel que l'on ait $f(n) = P(n)$ pour tout n assez grand ; le degré de P s'appelle le degré de f.

Pour tout entier $k \geq 0$ considérons le polynome

$$\binom{X}{k} = X(X-1) \ldots (X-k+1)/k! = \frac{X^k}{k!} + \ldots \quad ;$$

il est clair que les $\binom{X}{k}$ $(o \leq k \leq n)$ forment une base (sur les rationnels) de l'ensemble des polynomes à coefficients rationnels de degré $\leq n$; donc toute fonction polynomiale $f(n)$ s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme

$$f(n) = \sum_{k \geq o} \alpha_k . \binom{n}{k} \tag{4}$$

pour n grand ; les coefficients α_k (en nombre fini) sont a priori des nombres rationnels ; en fait ce sont des entiers : on le voit par récurrence sur le degré de f, en observant que de (4) résulte

$$\Delta f(n) = f(n+1)-f(n) = \sum_{k \geq 1} \alpha_k . \binom{n}{k-1} \quad . \tag{5}$$

Le même procédé montre d'ailleurs que f est polynomiale si et seulement si

Δf l'est, et on a alors

$$\deg(f) = \deg(\Delta f) + 1 \quad .$$

Précisons qu'une fonction polynomiale f sera de degré 0 si c'est (pour n grand) une constante non nulle, et de degré -1 si elle est identiquement nulle (pour n grand).

Cela fait, rappelons qu'un anneau commutatif A est dit artinien si ses idéaux satisfont à la condition minimale. Nous admettrons sans démonstration que tout A-module E de type fini est alors de longueur finie, i.e. possède une suite de Jordan-Hölder $0 = E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_r = E$ telle que les quotients E_i/E_{i-1} $(1 \leq i \leq r)$ soient des modules simples ; la "longueur" r d'une telle suite ne dépend alors que de E, et on la notera $\ell g(E)$. En particulier, A est de longueur finie, donc est un anneau noethérien.
[N.B. dans le seul cas où nous appliquerons ces résultats (i.e. au paragraphe 4, où A est quotient d'un anneau local noethérien M par un idéal primaire $\underline{q}$), ces résultats sont immédiats].

Tout sur-anneau S de A, engendré sur A par un nombre fini d'éléments $X_1, \ldots, X_r$, est noethérien (Exposé 2, corollaire du théorème 1). Désormais, on supposera que S est un anneau gradué, engendré sur un A artinien (de degré 0) par des éléments X_i $(0 \leq i \leq r)$ de degré 1. Soit alors E un S-module gradué : $E = \sum_n E_n$; chaque E_n est un A-module, et si E est un S-module de type fini, chaque E_n est un A-module de type fini, donc de longueur finie.

Proposition 2.- Sous les hypothèses précédentes, la fonction

$$\chi_E(n) = \ell g(E_n)$$

est polynomiale (pour n grand), et son degré $d(E)$ est $< r$.

Démonstration : si $r = 0$, c'est-à-dire $S = A$, alors E est de longueur finie, donc $E_n = 0$ pour n grand, et la proposition est démontrée dans ce cas. Raisonnons alors par récurrence sur le nombre r des générateurs X_i, la proposition étant supposée vraie pour $r-1$ $(r \geq 1)$. Soit u l'endomorphisme de E défini par la multiplication par X_r ; on a une suite exacte de S-modules gradués de type fini

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \xrightarrow{u} E \longrightarrow Q \longrightarrow 0 ,$$

et en fait N et Q sont des modules gradués sur l'anneau $A[X_1, \ldots, X_{r-1}]$; donc $\chi_N(n)$ et $\chi_Q(n)$ sont des fonctions polynomiales en n, de degrés

$< r-1$. Or il est clair que, pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow L_o \longrightarrow L_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_m \longrightarrow 0$$

de A-modules de longueur finie, on a la relation d'Euler-Poincaré $\sum_i (-1)^i \ell g(L_i) = 0$.

Puisque u est de degré $+1$, il vient ici

$$(6) \qquad \chi_E(n+1) - \chi_E(n) = \chi_Q(n+1) - \chi_N(n) \quad ,$$

et le second membre est une fonction polynomiale de n , de degré $< r-1$. Donc $\chi_E(n)$ est une fonction polynomiale de degré $< r$.

Si d désigne le degré de $\chi_E(n)$, on a donc

$$(7) \qquad \chi_E(n) = a.\frac{n^d}{d!} + \cdots ,$$

où a est un <u>entier</u> > 0 . Pour que $d = d(E)$ soit nul, il faut et il suffit que E soit $\neq 0$ et de longueur finie.

La proposition 2 affirme que $d(E) < r$. Ce résultat ne peut pas être amélioré : prenons en effet pour E l'anneau S des polynomes à r lettres X_i . Les monômes de degré n en r variables sont au nombre de $\binom{n+r-1}{r-1}$, et par suite

$$(8) \qquad \chi_S(n) = \ell g(A).\binom{n+r-1}{r-1}$$

est un polynome en n de degré $r-1$ exactement.

Revenons au cas général. Soit toujours E un S-module gradué de type fini, et soit $u \in S_k$. La suite exacte

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \xrightarrow{u} E \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

montre que

$$\chi_E(n+k) - \chi_E(n) = \chi_Q(n+k) - \chi_N(n) \quad .$$

On en déduit :

<u>Proposition 3</u>.- <u>Si</u> u <u>est superficiel pour</u> E (cf. paragraphe 2), <u>on a</u>

$$(9) \qquad d(E/uE) = d(E) - 1 \ .$$

4.- <u>Modules de type fini sur un anneau local noethérien</u>.

Soit M un anneau local noethérien (non nécessairement intègre). Conformément à la définition donnée dans l'Exposé 5 (paragraphe 1), on appellera idéal <u>primaire</u> de M tout idéal $\neq M$ qui contient une puissance de l'idéal maximal $\underline{r}(M)$. Si $\underline{q}$ est un idéal primaire, l'anneau $A = M/\underline{q}$ est <u>artinien</u> ; en effet, il suffit de montrer que $M/\underline{r}(M)^n$ est artinien ; or chaque module $\underline{r}(M)^k/\underline{r}(M)^{k+1}$ est de longueur finie, car c'est un espace vectoriel sur le corps $M/\underline{r}(M)$.

Soit $\underline{q}$ un idéal primaire de M ; posons

$$G(\underline{q} ; M) = \sum_{n \geq 0} \underline{q}^n/\underline{q}^{n+1} \quad .$$

$G(\underline{q} ; M)$ est évidemment une algèbre graduée S sur l'anneau $A = M/\underline{q}$, les éléments de $\underline{q}^n/\underline{q}^{n+1}$ étant, par définition, de degré n . Supposons que $\underline{q}$ soit engendré, comme idéal, par des éléments $x_1 , \ldots , x_r$; alors les images de $x_1 , \ldots , x_r$ dans $\underline{q}/\underline{q}^2$ sont des éléments de S qui engendrent S comme algèbre sur A , et l'on se trouve dans la situation étudiée au paragraphe 3 .

Soit E un M-module de type fini ; posons

$$G(\underline{q} ; E) = \sum_{n \geq 0} \underline{q}^n E/\underline{q}^{n+1}E \ ;$$

on peut évidemment considérer $G(\underline{q} ; E)$ comme un module gradué, de type fini, sur l'algèbre graduée $G(\underline{q} ; M)$. On notera que la longueur de $\underline{q}^n E/\underline{q}^{n+1}E$ est la même, qu'on considère ce module comme A-module ou comme M-module (car il a les mêmes sous-modules).

D'après la proposition 2, la longueur de $\underline{q}^n E/\underline{q}^{n+1}E$ est, pour n grand, une fonction polynomiale de degré $< r$, où r désigne le nombre minimum de générateurs de l'idéal $\underline{q}$. Introduisons la fonction de n

$$\chi_E(\underline{q} ; n) = \ell g(E/\underline{q}^n E) \quad .$$

On a évidemment

$$\chi_E(\underline{q} ; n+1) - \chi_E(\underline{q} ; n) = \ell g(\underline{q}^n E/\underline{q}^{n+1}E) \quad , \tag{10}$$

d'où

<u>Théorème 2.- Soient</u> M <u>un anneau local noethérien,</u> $\underline{q}$ <u>un idéal primaire de</u> M , <u>et</u> E <u>un</u> M<u>-module de type fini. Soit</u> r <u>le nombre minimum de générateurs de l'idéal</u> $\underline{q}$. <u>Alors la fonction</u> $\chi_E(\underline{q} ; n) = \ell g(E/\underline{q}^n E)$ <u>est</u> (pour n grand) <u>polynomiale de degré</u> $\leq r$.

Montrons maintenant que le <u>degré</u> de la fonction polynomiale $\chi_E(\underline{q} ; n)$ <u>est indépendant du choix de l'idéal primaire</u> $\underline{q}$. En effet, si $\underline{q}'$ est un autre idéal primaire, il existe un entier s tel que $\underline{q}^s \subset \underline{q}'$, d'où

$\underline{q}^{sn}E \subset \underline{q}'^{n}E$, et par suite $\chi_E(\underline{q}' ; n) \leq \chi_E(\underline{q} ; sn)$; donc le degré (en n) du premier membre est au plus égal au degré du second. En échangeant les rôles de $\underline{q}$ et de $\underline{q}'$, on voit que ces degrés sont égaux.

Ainsi on a

$$\chi_E(\underline{q} ; n) = e_E(\underline{q}).\frac{n^h}{h!} + \dots \quad \text{pour } n \text{ grand,}$$

où $e_E(\underline{q})$ est un entier ≥ 1 , et h un entier indépendant de $\underline{q}$. Cet entier h s'appellera la hauteur du M-module E ; on le notera $h(E)$.

Il résulte de (10) que

$$(11) \qquad h(E) = d(G(\underline{q} ; E)) + 1 \quad .$$

5.- Systèmes de paramètres.

Prenons en particulier $E = M$. On peut considérer la hauteur $h(M)$. On va voir que, dans le cas où M est une localité sur un corps, $h(M)$ est bien ce qu'on a appelé la hauteur (Exposé 5, paragraphe 1). Compte tenu de la proposition 3 de l'Exposé 5, cela va résulter du

Théorème 3.- Soit M un anneau local noethérien. La hauteur $h(M)$ est le plus petit des entiers r tels qu'il existe un idéal primaire engendré par r éléments.

Démonstration : on sait déjà (théorème 2) que si un idéal primaire $\underline{q}$ est engendré par r éléments, on a $h(M) \leq r$. Il reste à trouver un idéal primaire engendré par $h(M)$ éléments.

On va prouver que c'est possible, par récurrence sur l'entier $h(M)$. Supposons d'abord $h(M) = 0$; alors la suite des puissances $\underline{r}(M)^n$ est stationnaire. Comme l'intersection des $\underline{r}(M)^n$ est nulle (Exposé 2, théorème 3), on a $\underline{r}(M)^n = 0$ pour n assez grand, donc l'idéal $\{0\}$ est primaire ; comme il est engendré par zéro élément, l'assertion est démontrée dans ce cas.

Supposons maintenant $h(M) \geq 1$. Supposons qu'on ait trouvé un élément $a \in \underline{r}(M)$ tel que l'anneau local $M' = M/aM$ soit de hauteur $h(M') = h(M) - 1$; par l'hypothèse de récurrence, il existe $h(M) - 1$ éléments $x_i \in \underline{r}(M)$ dont les images dans M' engendrent un idéal primaire de M' ; cela veut dire que l'idéal de M engendré par les x_i et a contient une puissance de $\underline{r}(M)$, autrement dit que c'est un idéal primaire de M .

Tout revient donc à trouver un $a \in \underline{r}(M)$ tel que $h(M/aM) = h(M)-1$. Posant $M' = M/aM$, ceci signifie (compte tenu de (11)) :

(12) $$d(G(\underline{q}\ ;\ M)) = d(G(\underline{q}';\ M')) + 1\ ,$$

en notant $\underline{q}$ un idéal primaire de M, et $\underline{q}'$ son image dans M'. Plus généralement, on va prouver :

Théorème 4.- Soit $a \in \underline{q}^k$ tel que l'image u de a dans $S_k = G_k(\underline{q}\ ;\ M)$ soit un élément superficiel (un tel a existe, d'après la proposition 1). Si E est un M-module de type fini, et $E' = E/aE$ (module sur $M' = M/aM$), on a

(13) $$d(G(\underline{q}\ ;\ E)) = d(G(\underline{q}'\ ;\ E')) + 1\ ,$$

en notant $\underline{q}'$ l'image de $\underline{q}$ dans M'.

D'après ce qu'on a vu, le théorème 3 résultera du théorème 4. Démontrons maintenant ce dernier. On va utiliser la proposition 3, en y remplaçant le module E par $G(\underline{q}\ ;\ E)$. Malheureusement on n'a pas ici identité des deux modules gradués $G(\underline{q}';\ E')$ et $G(\underline{q}\ ;\ E)/uG(\underline{q}\ ;\ E)$; cependant le résultat va être applicable, parce que ces deux modules gradués coïncident pour les degrés assez grands, comme on va le voir.

Cela revient à montrer que, pour n assez grand,

$$\underline{q}^nE/(\underline{q}^{n+1}E+(\underline{q}^nE) \cap (aE)) = \underline{q}^nE/(\underline{q}^{n+1}E + a\,\underline{q}^{n-k}E).$$

Il suffit de prouver

(14) $$(\underline{q}^nE) \cap (aE) = a\underline{q}^{n-k}E \quad \text{pour } n \text{ grand}.$$

Le second membre étant évidemment contenu dans le premier, il suffit de prouver

(15) $$(\underline{q}^nE) \cap (aE) \subset a\underline{q}^{n-k}E \quad \text{pour } n \text{ grand.}$$

Or, d'après le théorème de Krull-Artin (Exposé 2, théorème 2), il existe un entier t tel que, pour $n \geq t$,

(16) $$(\underline{q}^nE) \cap (aE) \subset a\underline{q}^{n-t}E\ ;$$

ceci prouve (15) si $t \leq k$. Si $t > k$, puisque u est superficiel, la multiplication par u définit une application $G_{m-k}(\underline{q}\ ;\ E) \longrightarrow G_m(\underline{q}\ ;\ E)$ dont le noyau est nul si $m \geq m_o$ (m_o entier convenable). Ceci implique que

$$(a\underline{q}^{m-k}E) \cap (\underline{q}^{m+1}E) \subset a\underline{q}^{m-k+1}E \quad \text{pour } m \geq m_o\ .$$

Appliquons ceci successivement pour $m = n-t+k, \dots, n-1$, en supposant $n > m_o$; on voit que

$$(a\underline{q}^{n-t}E) \cap (\underline{q}^nE) \subset a\underline{q}^{n-k}E \quad \text{pour } n > m_o \text{ et } n \geq t\ .$$

Ceci, joint à (16), donne (15), ce qui achève la démonstration du théorème 4, et en même temps celle du théorème 3.

Soit alors M un anneau local noethérien, et soit h sa hauteur. On appelle <u>système de paramètres</u> de M toute suite de h éléments $x_1, \ldots, x_h$ de $\underline{r}(M)$ qui engendrent un idéal primaire de M. Etant donnée une telle suite, <u>pour tout entier</u> i <u>tel que</u> $1 \leq i \leq h$, <u>l'anneau quotient</u> $M/(x_1, \ldots, x_i)$ <u>est de hauteur</u> $h-i$; en effet, les classes de $x_{i+1}, \ldots, x_h$ dans cet anneau quotient forment un système de paramètres.

Lorsque M est une localité sur un corps, la hauteur h est aussi le <u>maximum de la longueur des chaînes d'idéaux premiers de</u> M. On peut démontrer que ce résultat subsiste pour tout anneau local noethérien.