C. CHEVALLEY

H. CARTAN

# Erratum à l'exposé 7

*Séminaire Henri Cartan*, tome 8 (1955-1956), p. 1

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A11_0>

# LE THÉORÈME PRINCIPAL DE ZARISKI, I.

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 6.2.1956)

---

ERRATUM à l'Exposé 7.

Page 7-06, lignes 5 à 8, remplacer par le texte suivant :

phisme $(f', \varphi')$ de $S''$ dans $S'$, pour lequel $\varphi'$ est surjectif et $f'$ une bijection de $S''$ sur l'ensemble des spécialisations de $P' = f(F)$ dans $S'$. Cette décomposition est unique (à un isomorphisme près). (On notera que l'application $f''$ n'est pas surjective, en général).

Page 7-06, supprimer les lignes 11-12.

Page 7-06, dernière ligne, supprimer "surjectif".

Page 7-07, première ligne, remplacer par le texte suivant :

injectif, il faut et il suffit que $\psi$ soit injectif.

---

## 1.- Domination régulière.

Soient $M$ et $M'$ des localités sur un même corps de constantes $K$, contenues dans un même corps $L$. Supposons que $M'$ domine $M$ ; on dit que $M'$ domine $M$ régulièrement, ou est régulière au-dessus de $M$, si les conditions suivantes sont satisfaites :

a) $M'$ a même niveau que $M$ ;

b) $M'$ a même dimension que $M$ ;

c) il n'y a aucune localité $\neq M'$ qui domine $M$ et dont $M'$ soit une spécialisation.

La condition a) signifie que le corps des fractions de $M'$ est algébrique sur celui de $M$. La condition b) exprime que le corps des résidus $M'/\underline{r}(M')$ est algébrique sur $M/\underline{r}(M)$. La condition c) signifie que $\underline{r}(M)$ n'est contenu dans aucun idéal premier $\neq \underline{r}(M')$ de $M'$, donc que l'idéal engendré par $\underline{r}(M)$ dans $M'$ est primaire.

On a en vue le théorème suivant ("main theorem" de Zariski), dont la démonstration fait l'objet de cet exposé et du suivant :

Théorème 1.- Si $M'$ domine $M$ régulièrement, $M'$ est de la forme $M^*_{\underline{m}^*}$, où $M^*$ désigne la fermeture intégrale de $M$ dans $M'$, et $\underline{m}^*$ un idéal *maximal de* $M^*$ .

*Proposition 1.- Soient* $M$ *et* $M'$ *des localités telles que* $M'$ *domine* $M$ *et ait même niveau et même dimension que* $M$ . *Pour que* $M'$ *domine* $M$ *régulièrement, il faut et suffit que la condition suivante soit satisfaite : si* $\underline{p}'$ , $\underline{q}'$ *sont des idéaux premiers de* $M'$ *tels que* $\underline{p}' \subset \underline{q}'$ , $\underline{p}' \cap M = \underline{q}' \cap M$ , *on a* $\underline{p}' = \underline{q}'$ . *S'il en est ainsi, et si* $\underline{p}'$ *est un idéal premier de* $M'$ *et* $\underline{p} = \underline{p}' \cap M$ , *alors* $M'/\underline{p}'$ *est régulière sur* $M/\underline{p}$ , *et* $M'_{\underline{p}'}$ *régulière sur* $M_{\underline{p}}$ .

Supposons que $M'$ domine $M$ régulièrement. Soit $\underline{p}'$ un idéal premier de $M'$ , et soit $\underline{p} = \underline{p}' \cap M$ . Alors $M'/\underline{p}'$ domine $M/\underline{p}$ ; de plus, l'idéal engendré par $\underline{r}(M)$ dans $M'$ contient une puissance de $\underline{r}(M')$ , d'où il résulte que l'idéal engendré par $\underline{r}(M/\underline{p}) = \underline{r}(M)/\underline{p}$ dans $M'/\underline{p}'$ est primaire, et par suite que $M'/\underline{p}'$ n'est spécialisation d'aucune localité différente d'elle-même qui domine $M/\underline{p}$ . Or on peut considérer $M/\underline{p}$ et $M'/\underline{p}'$ comme des localités de schémas affines $S$ et $S'$ tels que $S'$ domine $S$ ; si $e$ est la différence entre la dimension de $S'$ et celle de $S$ , $M'/\underline{p}'$ est spécialisation d'une localité de dimension $\geq e + \dim M/\underline{p}$ qui domine $M/\underline{p}$ (exposé 8, théorème 2). On a donc $\dim M'/\underline{p}' \geq e + \dim M/\underline{p}$ ; mais on a $\dim M'/\underline{p}' = \dim M' = \dim M =$ $= \dim M/\underline{p}$ , d'où $e = 0$ , ce qui signifie que le corps des fractions de $M'/\underline{p}'$ est algébrique sur celui de $M/\underline{p}$ . Soit $\underline{q}'$ un idéal premier de $M'$ contenant $\underline{p}'$ et tel que $\underline{q}' \cap M = \underline{p}$ . Si $A'$ est l'algèbre de $S'$ , $\underline{q}'/\underline{p}'$ est l'idéal engendré dans $M'$ par un idéal premier $\underline{q}'_o$ de $A'$ . La dimension de l'algèbre affine $A'$ est égale à celle de $S'$ , donc à celle de $S$ ; de même, la dimension de $A'/\underline{q}'_o$ est égale au degré de transcendance sur $K$ du corps des fractions de $(M'/\underline{p}')/(\underline{q}'/\underline{p}') = M'/\underline{q}'$ , donc aussi au degré de transcendance sur $K$ du corps des fractions de $M/\underline{p}$ , i.e. à la dimension de $S$ . Comme $A'$ et $A'/\underline{q}'_o$ ont même dimension, on a $\underline{q}'_o = \{0\}$ (exposé 4, proposition 2), d'où $\underline{q}' = \underline{p}'$ .

Supposons réciproquement les conditions satisfaites. Soit $\underline{p}'$ un idéal premier de $M'$ qui contient $\underline{r}(M)$ ; on a alors $\underline{p}' \cap M = \underline{r}(M') \cap M$ , d'où $\underline{p}' = \underline{r}(M')$ ; $M'$ domine donc $M$ régulièrement.

Supposons désormais $M'$ régulière au-dessus de $M$ . Soient $\underline{p}'$ un idéal premier de $M'$ et $\underline{p} = M \cap \underline{p}'$ ; nous avons vu dans la première partie de la démonstration que $M/\underline{p}$ et $M'/\underline{p}'$ ont même niveau. Ces deux localités ont donc même dimension, et l'idéal engendré par $\underline{r}(M)/\underline{p}$ dans $M'/\underline{p}'$ est primaire ; $M'/\underline{p}'$ est donc régulière sur $M/\underline{p}$ . Les localités $M'_{\underline{p}'}$ et $M_{\underline{p}}$ ont évidemment même niveau ; elles ont même dimension puisque $M'/\underline{p}'$ et $M/\underline{p}$ ont même niveau. Soit $\underline{q}''$ un idéal premier de $M'_{\underline{p}'}$ qui contient $\underline{r}(M_{\underline{p}})$ ; alors $\underline{q}'' = M'_{\underline{q}'}$, où $\underline{q}'$ est un idéal premier contenu dans $\underline{p}'$, et $\underline{q}' = \underline{q}'' \cap M'$ contient $\underline{r}(M_{\underline{p}}) \cap M = \underline{p}$, ce qui montre que $\underline{q}' = \underline{p}'$, $\underline{q}'' = \underline{r}(M'_{\underline{p}'})$ ; $M'_{\underline{p}'}$ est donc régulière sur $M_{\underline{p}}$. Ceci achève la démonstration de la proposition 1.

Corollaire : Soit $M'$ une localité qui domine régulièrement une localité $M$, et soit $N$ une localité qui domine $M$ et qui est dominée par $M'$. Alors $M'$ est régulière au-dessus de $N$.

On a $M/\underline{r}(M) \subset N/\underline{r}(N) \subset M'/\underline{r}(M')$ ; comme $M'/\underline{r}(M')$ est algébrique sur $M/\underline{r}(M)$, on a $\dim M = \dim N = \dim M'$ ; par ailleurs, il est clair que $M$, $N$ et $M'$ ont même niveau. Il résulte alors immédiatement de la proposition 1 que $M'$ est régulière au-dessus de $N$.

2.- Un théorème préliminaire.

Soit $B$ un anneau d'intégrité, et soit $A$ un sous-anneau de $B$. L'ensemble $\underline{f}$ des $x \in B$ tels que $xB \subset A$ est manifestement un idéal dans $B$ (et également dans $A$) ; on l'appelle le conducteur de $B$ par rapport à $A$.

Proposition 2.- Les notations étant comme ci-dessus, soit $S$ une partie multiplicativement stable $\neq \emptyset$ de $A$ ne contenant pas $0$ ; si $B$ est un $A$-module de type fini, le conducteur de $B_S$ par rapport à $A_S$ est alors l'idéal engendré par $\underline{f}$ dans $B_S$.

Il est clair que $\underline{f}B_S \subset A_S$. Soit $y \in B_S$ tel que $yB_S \in A_S$ ; soient $s_1$ un élément de $S$ tel que $s_1 y \in B$, et $x_1, \ldots, x_r$ des éléments de $B$ tels que $B = Ax_1 + \ldots + Ax_r$ ; les $s_1 y x_i$ étant dans $A_S$, il y a un $s_2 \in S$ tels que les $s_2 s_1 y x_i$ soient dans $A$, d'où $s_2 s_1 y \in \underline{f}$, et $y$ appartient à l'idéal engendré par $\underline{f}$.

Théorème préliminaire.- Soient $M$ une localité, $x$ un élément du corps des fractions $F$ de $M$, $M^*$ un sous-anneau de $F$, contenant $M[x]$ et entier sur $M[x]$, $M'$ l'anneau local d'un idéal premier $\underline{m}^*$ de $M^*$. Faisons en outre les hypothèses :

(i) $M'$ domine $M$ régulièrement ;

(ii) $M$ est intégralement fermé dans $M^*$.

Alors $M' = M$.

Avant de commencer la démonstration, traduisons la condition (i) en explicitant les conditions (a), (b) et (c) de la domination régulière : la condition (a) est automatiquement satisfaite, puisque $M$ et $M'$ ont même corps des fractions $F$ ; la condition (b) exprime que $M'/\underline{r}(M')$ est algébrique sur $M/\underline{r}(M)$ , ou encore que l'anneau $M^*/\underline{m}^*$ est algébrique sur $M/\underline{r}(M)$ ; comme $M^*/\underline{m}^*$ est algébrique sur $M[x]/\underline{m}$ (en posant $\underline{m} = M[x] \cap \underline{m}^*$ ), on voit que la condition (b) s'exprime comme suit :

(b') l'anneau $M[x]/\underline{m}$ est algébrique sur $M/\underline{r}(M)$ .

Or ceci exprime qu'il existe un polynome $P$ à coefficients dans $M$ , non tous dans $\underline{r}(M)$ , tel que $P(x) \in \underline{m}$ ; on peut supposer que l'un des coefficients de $P$ est égal à 1, d'où finalement :

(b") <u>il existe un polynome unitaire</u> $P$ , <u>à coefficients dans</u> $M$ , <u>tel que</u> $P(x) \in \underline{m}$ .

Quant à la condition (c) de domination régulière, elle se traduit comme suit :

(c') $\underline{m}^*$ <u>est minimal dans l'ensemble des idéaux premiers de</u> $M^*$ <u>tels que</u> $M \cap \underline{m}^* = \underline{r}(M)$ .

Cela posé, montrons d'abord que $M^*$ <u>est un</u> $M[x]$<u>-module de type fini</u>. Il existe une algèbre affine $A$ et un idéal premier $\underline{u}$ de $A$ tels que $M = A_{\underline{u}}$ ; soit $S = A - \underline{u}$ ; on a $M[x] = (A[x])_S$ . Comme $A[x]$ est affine, sa fermeture intégrale $B$ dans $F$ est un $A[x]$-module de type fini (Exposé 4, théorème 1). Or $B_S$ est la fermeture intégrale de $M[x]$ dans $F$ (Exposé 1, proposition 5), et contient par suite $M^*$ ; donc $M^*$ est un $M[x]$-module de type fini.

<u>Lemme</u>.- <u>Sous les hypothèses du théorème préliminaire, soit</u> $u \in M^*$ <u>tel que</u> $u\underline{m} \subset M[x]$ . <u>Alors</u> $u \in M[x]$ .

C'est évident si $x \in M$ , car alors $M^* = M$ en vertu de (ii). Supposons donc $x \notin M$ ; alors $x$ n'est pas entier sur $M$ , donc $P(x) \neq 0$ . Puisque $P(x) \in \underline{m}$ (condition (b")), on a $uP(x) \in M[x]$ ; $uP(x)$ est donc égal à un polynome en $x$ à coefficients dans $M$ , et par suite (identité de la division par un polynome unitaire $P$ ) est de la forme $P(x)Q(x) + R(x)$ , où $Q$ et $R$ ont leurs coefficients dans $M$ , le degré $t'$ de $R$ étant strictement inférieur au degré $t$ de $P$ . Ainsi

$$u = Q(x) + y , \quad \text{avec } y = (P(x))^{-1}R(x).$$

Le lemme sera démontré si on prouve que $y \in M$ ; comme $y \in M^*$ , il suffit de montrer que $y$ est entier sur $M$ , c'est-à-dire appartient à tout anneau de valuation $V$ du corps $F$ contenant $M$. Or si $x \in V$, on a $M[x] \subset V$, donc $M^* \subset V$, d'où $y \in V$. Si $x \notin V$, $x^{-1}$ est dans $\underline{r}(V)$ ; on a $y = (x^{-1})^{t-t'}(P'(x^{-1}))^{-1}R'(x^{-1})$, où $P'$ et $R'$ sont des polynomes à coefficients dans $M$, le terme constant de $P'$ étant 1 ; comme $x^{-1} \in \underline{r}(V)$, $P'(x^{-1})$ est inversible dans $V$, d'où $y \in V$, ce qui achève la démonstration.

Montrons maintenant qu'il suffit de démontrer le théorème lorsqu'on ajoute aux hypothèses de l'énoncé une hypothèse supplémentaire :

(H) pour tout idéal premier $\underline{p}'$ de $M'$, distinct de $\underline{r}(M')$, on a $M'_{\underline{p}'} = M_{\underline{p}}$ (en notant $\underline{p} = M \cap \underline{p}'$).

En effet, soit $\underline{p}'$ un idéal premier de $M'$ ; posons $\underline{p} = M \cap \underline{p}'$, $\underline{p}^* = M^* \cap \underline{p}'$. Alors $M'_{\underline{p}'} = M^*_{\underline{p}^*}$ domine $M_{\underline{p}}$ régulièrement (proposition 1) ; $M^*_{\underline{p}^*}$ est anneau local d'un idéal premier de l'anneau $N^* = M_{\underline{p}}[M^*]$, qui est entier sur $M_{\underline{p}}$. Enfin tout élément $u \in N^*$ qui est entier sur $M_{\underline{p}}$ est dans $M_{\underline{p}}$ ; car il existe $s \in M$, $s \notin \underline{p}$, tel que $su \in M^*$ soit entier sur $M$, d'où $su \in M$ et $u \in M_{\underline{p}}$. Ainsi $M_{\underline{p}}$, $N^*$ et $M'_{\underline{p}'}$ possèdent les mêmes propriétés que $M$, $M^*$ et $M'$ (cf. énoncé du théorème). Cela dit, si $M'$ était $\neq M$, choisissons parmi les idéaux premiers $\underline{p}'$ de $M'$ tels que $M'_{\underline{p}'} \neq M_{\underline{p}}$ un élément maximal, soit $\underline{p}'$ ; le théorème sera démontré si nous le prouvons en remplaçant $M$, $M^*$ et $M'$ par $M_{\underline{p}}$, $M_{\underline{p}}[M^*]$ et $M'_{\underline{p}'}$. Et alors l'hypothèse (H) est vérifiée par ces nouvelles données.

Nous ferons donc désormais l'hypothèse (H). Introduisons le conducteur $\underline{f}$ de $M^*$ par rapport à $M[x]$. On va montrer que $\underline{f}$ n'est pas contenu dans l'idéal $\underline{m}^*$. Tout d'abord, soit $\underline{p}^*$ un idéal premier de $M^*$, contenu dans $\underline{m}^*$ et $\neq \underline{m}^*$ ; on a $M^*_{\underline{p}^*} = M'_{\underline{p}'}$, où $\underline{p}'$ est un idéal premier de $m'$, distinct de $\underline{r}(M')$ ; d'après l'hypothèse (H), $M^*_{\underline{p}^*} = M_{\underline{p}}$, d'où $M_{\underline{p}}[M^*] \subset M_{\underline{p}}[x]$. Il résulte alors de la proposition 2 que l'idéal engendré par $\underline{f}$ dans $M_{\underline{p}}[M^*]$, et a fortiori dans $M^*_{\underline{p}^*}$, contient 1, donc que $\underline{f}$ n'est pas contenu dans $\underline{p}^*$. Pour montrer maintenant que $\underline{f} \not\subset \underline{m}^*$, raisonnons par l'absurde : si $\underline{f} \subset \underline{m}^*$, $\underline{m}^*$ serait minimal dans l'ensemble des idéaux premiers de $M^*$ contenant $\underline{f}$, d'après ce qu'on vient de voir. Il existerait donc un $u \in M^*$, $u \notin \underline{f}$, tel que $u\underline{m}^* \subset \underline{f}$ (cf. Exposé 2). Cela signifie l'existence d'un $v \in M^*$ tel que $uv \notin M[x]$ et $uv\underline{m}^* \subset M[x]$. Or ceci contredit le lemme.

Ainsi $\underline{f} \not\subset \underline{m}$. Ceci implique que $M^* \subset (M[x])_{\underline{m}}$, et par suite $M' = (M[x])_{\underline{m}}$. Donc $(M[x])_{\underline{m}}$ domine $M$ régulièrement, et par suite $\underline{m}$ est minimal dans l'ensemble des idéaux premiers de $M[x]$ qui contiennent $\underline{r}(M)$.

Dans ces conditions, je dis que $x$ <u>annule un polynome à coefficients dans</u> <u>M</u>, <u>non tous dans</u> $\underline{r}(M)$. Sinon, introduisons l'algèbre $C$ des polynomes à une lettre $\tau$, à coefficients dans $M/\underline{r}(M)$ ; il existerait un homomorphisme $\varphi$ de $M[x]$ dans $C$, qui prolonge l'application canonique de $M$ sur $M/\underline{r}(M)$ et envoie $x$ sur $\tau$. Le noyau de $\varphi$ est un idéal premier contenant $\underline{r}(M)$, donc est identique à $\underline{m}$ ; or ce noyau est visiblement l'idéal engendré par $\underline{r}(M)$ dans $M[x]$. Or on sait qu'il existe un polynome unitaire $P$ tel que $P(x) \in \underline{m}$ ; ceci donne une équation $Q(x) = 0$, où les coefficients du polynome $Q$ sont dans $M$ et non tous dans $\underline{r}(M)$, contrairement à l'hypothèse.

Ainsi nous avons une équation de la forme

$$x^n(1 + c_1x + \dots + c_sx^s) + b_1x^{n-1} + \dots + b_n = 0 ,$$

les $b_j$ étant dans $M$, et les $c_i$ dans $\underline{r}(M)$, avec $n > 0$. Soit $y = 1 + c_1x + \dots + c_sx^s$. On a $y \notin \underline{m}$ ; $x$ est entier sur $M[y^{-1}]$, donc $y$, qui est dans $M[x]$, est entier sur $M[y^{-1}]$, et ceci exprime que $y$ est entier sur $M$. Alors $y \in M$ (hypothèse (ii) de l'énoncé). Comme $y \notin \underline{m}$, on a $y \notin \underline{r}(M)$, donc $y^{-1} \in M$ ; alors $x$, entier sur $M[y^{-1}]$, est entier sur $M$, donc $x \in M$. Ceci implique $M^* = M$, d'où finalement $M' = M$. Et la démonstration du théorème préliminaire est achevée.