C. CHEVALLEY

Correspondances, II

Séminaire Henri Cartan, tome 8 (1955-1956), exp. n° 10, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A10_0>

CORRESPONDANCES, II.

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 30.1.1956).

4.- Fin de la démonstration du théorème 1 (Exposé 9).

On se place maintenant dans le cas où S' et S'' sont des schémas affines, et où S'' domine S et S' , f et f' étant les applications de domination. Le corps des fractions du joint S''_o de S et S' est le corps des fractions $F(A')$ de $F[A']$; d'' est donc le degré de transcendance de $F(A')$ par rapport à K . Les localités de S'' qui dominent F sont les anneaux locaux des idéaux premiers de $F[A'']$ (cf. la démonstration de la proposition 2 (Exposé 9) tenant compte de ce que F est un corps). Soient h l'application de domination de S'' dans S''_o et f'_o celle de S''_o dans S' , d'où $f' = f'_o \circ h$. Il existe un élément $v' \neq 0$ de A' qui possède la propriété suivante : si N' est l'anneau local d'un idéal premier de A' qui ne contient pas v', N' n'est l'image par f'_o d'aucune localité de S''_o de dimension $>$ dim $N' + d'' - d'$ (exposé 8, théorème 3). Il existe un élément $v'' \neq 0$ de A'' qui jouit de la propriété suivante : si N'' est l'anneau local d'un idéal premier de A'' qui ne contient pas v'' et si $f'(N'')$ est spécialisation d'une localité P' de S' , P' est l'image par f' d'une localité P'' de S'' qui admet N'' comme spécialisation (exposé 8, théorème 4). Il existe des éléments $x'_1 , \ldots , x'_{d'}$ de A' , algébriquement indépendants sur K , tels que A' soit entier sur $K[x'_1 , \ldots , x'_{d'}]$ (exposé 4, proposition 1). Soit $e = d'' - d$ le degré de transcendance de $F(A')$ sur F ; on peut supposer que $x'_1 , \ldots , x'_e$ forment une base de transcendance de $F(A')$ par rapport à F . Soit V'_1 une partie ouverte non vide quelconque de S' ; il y a un élément $v'_1 \neq 0$ de A' tel que V'_1 contienne les anneaux locaux de tous les idéaux premiers de A' ne contenant pas v'_1 . Il y a enfin un élément $w' \neq 0$ de $F[x'_1 , \ldots , x'_e]$ tel que tout homomorphisme de $F[x'_1 , \ldots , x'_e]$ dans un corps algébriquement clos qui n'applique pas w' sur 0 puisse se prolonger en un homomorphisme de $F[A'']$ qui n'applique pas $v''v'v'_1$ sur 0 (exposé 3, lemme, page 3-01) ; on peut écrire $w' = W'(x'_1 , \ldots , x'_e)$, où W' est un polynome $\neq 0$ à coefficients dans F . Soit $\bar{F}$ une clôture algébrique de F , et soit $\bar{K}$ la fermeture algébrique de K dans $\bar{F}$; comme $\bar{K}$ est un corps infini, il y a des éléments $c_1, \ldots, c_e$ de $\bar{K}$ tels que $W'(c_1, \ldots, c_e) \neq 0$; il y a un homomorphisme θ de $F[x'_1, \ldots, x'_e]$ dans $\bar{F}$ qui coïncide avec l'identité sur F et applique x'_i sur c_i $(1 \leqslant i \leqslant e)$; θ se prolonge en un homomorphisme, que nous désignerons encore par θ, de $F[A'']$ dans $\bar{F}$ tel que $\theta(v''v'v'_1) \neq 0$. Soit $\underline{n}''$ le noyau de l'intersection de θ avec A'' ; $N'' = A''_{\underline{n}''}$ est alors une localité de S'' qui domine F, et $N' = f'(N'')$ correspond à F. On a $N' = A'_{\underline{n}'}$, où $\underline{n}'$ est l'intersection du noyau de θ avec A' ; puisque $\theta(v'_1) \neq 0$, on a $N' \in V'_1$. On peut identifier $A'/\underline{n}'$ à un sous-corps de $\bar{F}$, la classe modulo $\underline{n}'$ d'un élément de A' s'identifiant à l'image de cet élément par θ. Soit $\xi_j = \theta(x'_{d+j})$ $(1 \leq j \leqslant d' - e)$; puisque A' est entier sur $K[x'_1, \ldots, x'_{d'}]$, $\theta(A')$ est entier sur $K[c_1, \ldots, c_e, \xi_1, \ldots, \xi_{d'-e}]$; comme $c_1, \ldots, c_e$ sont algébriques sur K, la dimension de N', égale au degré de transcendance sur K du corps des fractions de $\theta(A')$, est $\leqslant d' - e = d + d' - d''$. Posons $N''_0 = h(N'')$; comme $\theta(v') \neq 0$, v' n'est pas dans $\underline{n}'$, et on a $\dim N''_0 \leq \dim N' + d'' - d'$; puisque N''_0 domine F, on a $\dim N' \geqslant d + d' - d''$, d'où $\dim N' = d + d' - d''$. Soit h un entier tel que $d + d' - d'' \leq h \leq d'$; il y a alors au moins une localité P' de dimension h de S' admettant N' comme spécialisation. Or, v'' n'appartient pas à $\underline{n}''$; il y a donc une localité P'' de S'' telle que $f'(P'') = P'$ et que P'' admette N'' comme spécialisation. Comme N'' domine F, la localité de S dominée par P'' admet F comme spécialisation, et est par suite identique à F ; P' appartient donc à Z'_h. Puisque N' est spécialisation de P' et V'_1 ouvert, P' appartient à V'_1. Comme V'_1 était une partie ouverte non vide quelconque de S', il en résulte bien que Z'_h est dense dans S'.

5.- Localités fondamentales par rapport à une correspondance.

Nous sommes maintenant en mesure de généraliser la notion de localité fondamentale, que nous avons déjà introduite dans le cas des morphismes de domination.

Définition 1 . Soit Γ une correspondance non dégénérée entre S et S' ; posons $\Gamma = (S'', f, f')$; supposons que S'' domine S et S', f et f' étant les applications de domination ; soient S''_0 le joint de S et S', h l'application de domination de S'' dans S''_0 et f_0 celle de S''_0 dans S.

On dit qu'une localité M de S est fondamentale (par rapport à Γ) si on est dans l'un ou l'autre des cas suivants : a) M est fondamentale par rapport à S''_o, ou b) il y a dans $f_o^{-1}(M)$ une localité qui n'est spécialisation d'aucune localité appartenant à $h(S'') \cap f_o^{-1}(M)$.

Théorème 2. Soit Γ une correspondance non dégénérée entre S et S'. Les localités de S qui sont fondamentales par rapport à Γ forment un sous-ensemble constructible non dense de S.

On sait déjà que les localités de S qui sont fondamentales par rapport à S''_o forment un ensemble constructible non dense (exposé 8, fin du paragraphe 2). Par ailleurs, l'ensemble $S''_o - h(S'')$ est constructible (exposé 7, théorème 3) ; soient G_k $(1 \leq k \leq r)$ ses composantes irréductibles. Pour chaque k, $\bar{G}_k$ est un ensemble fermé irréductible, que nous identifierons au schéma induit sur lui par S''_o ; soit f_{ok} la restriction de f_o à $\bar{G}_k$. L'ensemble H_k des localités $M''_o \in \bar{G}_k$ telles que $\dim M''_o \geq \dim f_{ok}(M''_o) + d'' - d$ (où d et d'' sont les dimensions de S et S''_o) est fermé (exposé 8, théorème 2) ; l'ensemble $G_k \cap H_k$ est donc constructible, et il en est de même de $f_o(G_k \cap H_k)$ (exposé 7, théorème 3). Toute localité $M \in f_o(G_k \cap H_k)$ est fondamentale par rapport à Γ. C'est en effet vrai si M est fondamentale par rapport à S''_o ; supposons donc que M ne soit pas fondamentale par rapport à S''_o ; il y a une localité $M''_o \in G_k \cap H_k$ telle que $f_o(M''_o) = M$. Puisque $M''_o \in H_k$, on a $\dim M''_o \geq \dim M + d'' - d$; puisque M n'est pas fondamentale par rapport à S''_o, on a $\dim M''_o = \dim M + d'' - d$, et M''_o n'est spécialisation d'aucune localité différente d'elle même appartenant à $f^{-1}(M)$; puisque $M''_o \in G_k$, M''_o n'appartient pas à $h(S'')$, ce qui montre bien que M est fondamentale par rapport à Γ. Réciproquement, toute localité M de S, fondamentale par rapport à Γ sans l'être par rapport à S''_o appartient à l'un au moins des ensembles $f_o(G_k \cap H_k)$. En effet, il y a dans $f^{-1}(M)$ une localité qui n'est spécialisation d'aucune localité de cet ensemble appartenant à $h(S'')$; or, toute localité de $f^{-1}(M)$ est spécialisation d'une localité de $f^{-1}(M)$ de dimension $\geq \dim M + d'' - d$ (exposé 8, théorème 2) ; il y a donc un $M''_o \in f^{-1}(M)$ tel que $\dim M''_o \geq \dim M + d'' - d$ et $M''_o \notin h(S'')$; la localité M''_o appartient à l'un au moins des G_k, et, si elle appartient à G_k, elle appartient à H_k, d'où $M \in f_o(G_k \cap H_k)$. L'ensemble des localités de S fondamentales par rapport à Γ est donc constructible ; pour montrer qu'il est non dense, il suffit de montrer que, pour tout k, $f_o(G_k \cap H_k)$ est non dense. C'est évident si

$f_o(\bar{G}_k)$ est non dense ; si $f_o(\bar{G}_k)$ est dense, le schéma $\bar{G}_k$ domine S , avec f_{ok} comme application de domination ; comme $\dim \bar{G}_k < d''$, il résulte du théorème 3, exposé 8 qu'il y a une partie ouverte non vide de S qui ne rencontre pas $f_{ok}(H_k)$, ce qui démontre le résultat dans ce cas.

6.- Dimension des localités qui correspondent à une localité non fondamentale.

Théorème 3 . Soit Γ une correspondance non dégénérée entre S et S' ; désignons par d et d' les dimensions de S et S' , et par d'' la dimension de Γ . Soit M une localité de S non fondamentale par rapport à Γ ; il lui correspond alors au moins une localité de S' ; soit M' une localité de S' qui correspond à M mais qui n'est spécialisation d'aucune localité différente d'elle-même qui corresponde à M . On a alors $d'' - d \leq \dim M' \leq d'' - d + \dim M$. Désignons par $\gamma(M)$ (resp. $\gamma(M')$) l'ensemble des spécialisations de M (resp. M') dans S (resp. S') ; posons $h_o = \dim M' - (d'' - d)$; si h est un entier, l'ensemble des localités de dimension h de $\gamma(M)$ auxquelles M' correspond est dense dans $\gamma(M)$ si $h_o \leq h \leq \dim M$, mais n'y est pas dense si $h < h_o$; l'ensemble des localités de dimension h de $\gamma(M')$ qui correspondent à M est dense dans $\gamma(M')$ si $h_o \leq h \leq \dim M'$, mais n'y est pas dense si $h < h_o$.

Nous supposerons que S'' domine S et S', f et f' étant les applications de domination, et nous utiliserons les notations de la définition 1 . Puisque M n'est pas fondamentale par rapport à Γ , il est clair que $M \in f(S'') = f_o(h(S''))$, donc qu'il correspond à M au moins une localité de S'. Soit M'' une localité de S'' telle que $f(M'') = M$, $f'(M'') = M'$; M'' domine alors une localité M''_o de S''_o dont la dimension est la dimension de la correspondance entre $\gamma(M)$ et $\gamma(M')$ induite par Γ définie par M'' (proposition 5 de l'Exposé 9) ; comme M n'est pas fondamentale par rapport à S''_o , cette dimension est $\leq \dim M + d'' - d$. Montrons qu'il y a au moins une correspondance entre $\gamma(M)$ et $\gamma(M')$ induite par Γ qui est de dimension $\dim M + d'' - d$. La localité M''_o est spécialisation d'une localité N''_o de S''_o qui domine M et qui n'est spécialisation d'aucune localité différente d'elle-même de S''_o qui domine M ; on a alors $\dim N''_o \geq \dim M + d'' - d$ (exposé 8, théorème 2). Puisque M n'est pas fondamentale par rapport à Γ , N''_o appartient à $h(S'')$, soit $N''_o = h(N'')$, $N'' \in S''$. On a $f(N'') = M$; par ailleurs, si f'_o est l'application de domination de S''_o dans S' , on a $f'(N'') = f'_o(N''_o)$ comme M''_o est spécialisation de N''_o , $M' = f'_o(M''_o)$ est spécialisation de $f'(N'')$; comme $f'(N'')$ correspond à M , on a $f'(N'') = M'$. La localité N'' définit une correspondance entre $\mathcal{V}(M)$ et $\mathcal{V}(M')$ induite par Γ et dont la dimension, égale à $\dim N''_o$, est $\geqslant \dim M + d'' - d$, et lui est même égale en vertu de ce qui a été dit plus haut. On en conclut que, dans les notations du théorème 1, on a $\delta''(M , M') = \dim M + d'' - d = \delta + d'' - d$. Comme ce nombre est manifestement $\geqslant \dim M'$, on a $\dim M' \leq \dim M + d'' - d$. On a $\dim M + \dim M' - (\dim M + d'' - d) = h_o$; les dernières assertions du théorème 3 résultent alors immédiatement du théorème 1 appliqué à Γ et à la correspondance (S'' , f' , f) entre S' et S. Puisqu'il existe dans $\mathcal{V}(M)$ des localités de dimension h_o, on a $h_o \geqslant 0$, d'où $\dim M' \geqslant d'' - d$.

Remarque : Si Γ est une correspondance non dégénérée maximale entre S et S', pour qu'une localité $M \in S$ ne soit pas fondamentale par rapport à Γ, il faut et suffit que les conditions suivantes soient satisfaites : a) il correspond au moins une localité de S' à M ; b) l'ensemble des $N \in \mathcal{V}(M)$ auxquelles il correspond au moins une localité de S' de dimension $> \dim N + d'' - d$ est non dense dans $\mathcal{V}(M)$.

En effet, si M n'est pas fondamentale, l'ensemble des localités de $\mathcal{V}(M)$ qui ne sont pas fondamentales est non dense dans $\mathcal{V}(M)$, comme il résulte immédiatement du fait que l'intersection de $\mathcal{V}(M)$ avec l'ensemble des localités fondamentales est constructible ; or, si N n'est pas fondamentale, il ne lui correspond aucune localité de dimension $> \dim N + d'' - d$ (théorème 3) ; les conditions a) et b) sont donc nécessaires, que Γ soit maximale ou non. Supposons maintenant que Γ soit maximale et que les conditions a) et b) soient satisfaites : utilisant les mêmes notations que plus haut, S'' est le joint de S et S', et nous avons à montrer que S n'est pas fondamentale par rapport à S''. Supposons le contraire ; puisqu'il correspond à M au moins une localité de S', M appartient à $f(S'')$; puisque M est fondamentale, il y a une localité M'' de dimension $> \dim M + d'' - d$ de S'' qui domine M. Soit $M' = f'(M'')$; M'' définit alors une correspondance entre $\mathcal{V}(M)$ et $\mathcal{V}(M')$ de dimension $> \dim M + d'' - d$, induite par Γ ; les notations étant celles du théorème 1, on a $\delta'' > \delta + d'' - d$. L'ensemble E des localités de dimension $\delta + \delta' - \delta''$ de $\mathcal{V}(M)$ qui correspondent à M' est dense dans $\mathcal{V}(M)$ (théorème 1) ; or, si $N \in E$, on a $\dim M' = \dim N + (\delta'' - \delta) >$ $> \dim N + d'' - d$, d'où une contradiction avec la condition b).