

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

H. CARTAN

Opérations cohomologiques, III

Séminaire Henri Cartan, tome 7, n° 2 (1954-1955), exp. n° 16, p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_2_A5_0

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1954/55.

OPÉRATIONS COHOMOLOGIQUES, III.

(Exposé de H. CARTAN, 21.3.1955)

1.- Opérations de Steenrod itérées.

Soit G un groupe abélien tel que $pG = 0$ (p premier, éventuellement égal à 2). On a défini (fin de l'Exposé 15) des opérations de Steenrod $P_p^k : H^n(X; G) \longrightarrow H^{n+2k(p-1)}(X; G)$, pour tout $k \geq 1$ et tout $n \geq 1$. On va maintenant définir une opération cohomologique St_p^a pour chaque entier $a \equiv 0$ ou $1 \pmod{2p-2}$. On pose

$$(1) \quad \begin{cases} St_p^a = P_p^k & \text{si } a = 2k(p-1) \quad (\text{en convenant que } St_p^0 \text{ est l'identité}) \\ St_p^a = \beta'_p \circ P_p^k & \text{si } a = 2k(p-1)+1, \text{ et en particulier } St_p^1 = \beta'_p, \end{cases}$$

où β'_p désigne l'opération $H^q(X; G) \longrightarrow H^{q+1}(X; G)$, transposée de l'opération de Bockstein $\beta_p : H_{q+1}(X; Z_p) \longrightarrow H_q(X; Z_p)$. Chaque opération $St_p^a : H^n(X; G) \longrightarrow H^{n+a}(X; G)$ est définie pour tous les n , et, pour chaque n , est transposée d'une opération homologique additive.

Soit maintenant $I = (a_1, \dots, a_i, \dots)$ une suite d'entiers ≥ 0 , tous $\equiv 0$ ou $1 \pmod{2p-2}$, et nuls sauf un nombre fini. Définissons

$$(2) \quad St_p^I = St_p^{a_1} \circ St_p^{a_2} \circ \dots \circ St_p^{a_i} \circ \dots$$

C'est une opération cohomologique additive

$$H^n(X; G) \longrightarrow H^{n+q(I)}(X; G),$$

définie pour tout n ; $q(I)$ désigne $\sum_i a_i$ (cf. Exposé 15, formule (5)).

Cette opération, pour chaque n , est transposée d'une opération homologique, et la collection de ces opérations homologiques (pour une suite I donnée)

est stable par suspension : cela résulte du théorème 3 de l'Exposé 15, et du fait que β_p commute à la suspension (en homologie), d'après la proposition 2 de l'exposé 8. Bien entendu, ces opérations homologiques sont indépendantes du groupe G .

Proposition 1.- Dans les $H^*(\Pi, m; G)$, les opérations St_p^I (pour une suite I donnée, et tous les degrés n) commutent avec la suspension t_σ .

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2 de l'Exposé 15.

Proposition 2.- Le sous-espace vectoriel $A^*(\Pi, n; G)$ des éléments additifs de la cohomologie $H^*(\Pi, n; G)$ est stable par St_p^I .

En effet, d'après la proposition 3 de l'Exposé 15, si $x' \in A^*(\Pi, n; G)$, x' est de la forme $t_\sigma(y')$, avec $y' \in A^*(\Pi, n+1; G)$; donc $St_p^I x' = St_p^I t_\sigma y' = t_\sigma St_p^I y'$ est dans l'image de la suspension, c'est-à-dire dans $A^*(\Pi, n; G)$.

2.- Génération de $A^*(\Pi, n; G)$.

On suppose toujours que $pG = 0$. Désormais, nous considérerons uniquement des suites $I = (a_1, \dots, a_i, \dots)$ telles que

$$(3) \quad a_i \equiv 0 \text{ ou } 1 \pmod{2p-2}, \quad a_i \geq pa_{i+1}.$$

Une telle suite sera dite canonique. Comme au paragraphe 4 de l'Exposé 15, nous introduisons, pour une suite canonique I , les entiers

$$(4) \quad q(I) = \sum_i a_i, \quad n(I) = [pa_1/(p-1)] - q(I),$$

où le symbole $[u]$ désigne le plus petit entier au moins égal à u . Noter que $q(I)$ est le degré de l'application St_p^I .

Proposition 3.- Si I est une suite canonique, St_p^I s'annule sur les éléments de degré $< n(I)$.

Démonstration : si $I = (2k(p-1), 0, \dots)$, c'est-à-dire $St_p^I = P_p^k$, on a $n(I) = 2k$, et l'on sait (Exposé 15, corollaire du théorème 3) que P_p^k s'annule sur les éléments de degré $< 2k$.

Envisageons maintenant le cas où $I = (2k(p-1)+1, 0, \dots)$, c'est-à-dire $St_p^I = \beta_p' P_p^k$. Alors $n(I) = 2k+1$; il est évident que $\beta_p' P_p^k$ s'annule sur les éléments de degré $< 2k$, et il reste à montrer qu'il s'annule aussi sur le degré $2k$. Par double transposition, on voit qu'il suffit de

le prouver lorsque le groupe G est Z_p . Alors P_p^k est la puissance p -ième, et tout revient à vérifier que l'opérateur de Bockstein β_p' s'annule sur x'^p quand le degré de x' est pair ; cela résulte aussitôt de la formule donnant le Bockstein d'un produit.

Ainsi la proposition est démontrée lorsque la suite $I = (a_1, \dots, a_i, \dots)$ a un seul terme $\neq 0$ (si $a_1 = 1$, c'est évident). Passons au cas général : si $a_1 = 2k(p-1)$, on a $St_p^I x' = P_p^k y'$, avec

$$\deg(y') = \deg(x') + q(I) - 2k(p-1) ;$$

de plus, $n(I) = 2kp - q(I)$, donc si $\deg(x') < n(I)$, on a $\deg(y') < 2k$, d'où $P_p^k y' = 0$. Si maintenant $a_1 = 2k(p-1)+1$, on a $St_p^I x' = \beta_p' P_p^k y'$, avec

$$\deg(y') = \deg(x') + q(I) - 2k(p-1) - 1 ;$$

de plus, $n(I) = 2kp + 2 - q(I)$, donc si $\deg(x') < n(I)$, on a

$\deg(y') < 2k+1$, donc $\beta_p' P_p^k y' = 0$. Ceci achève la démonstration.

Avant d'énoncer le théorème fondamental qui va suivre, introduisons la notation suivante : si I désigne une suite canonique de première espèce $(a_1, \dots, a_i, 0, \dots)$, avec $a_i \neq 0$, on notera I' la suite de deuxième espèce $(a_1, \dots, a_i, 1, 0, \dots)$, qui est aussi canonique. Dans le cas où $I = (0, 0, \dots)$, I' désignera $(1, 0, \dots)$.

Théorème 1.- Soit G un groupe abélien tel que $pG = 0$, et soit n un entier ≥ 1 . Pour chaque suite canonique de première espèce I , telle que $n \geq n(I)$, l'application $St_p^I : H^n(\Pi, n; G) \rightarrow A^{n+q(I)}(\Pi, n; G)$ est un isomorphisme sur un sous-espace vectoriel, qu'on notera $A^I(\Pi, n; G)$. Pour chaque suite canonique de première espèce I , telle que $n+1 \geq n(I)$ (ce qui équivaut à $n \geq n(I')$), l'application $St_p^I : H^{n+1}(\Pi, n; G) \rightarrow A^{n+q(I')}(\Pi, n; G)$ est un isomorphisme sur un sous-espace vectoriel, qu'on notera $A^{I'}(\Pi, n; G)$. Enfin, $A^*(\Pi, n; G)$ est somme directe de tous les sous-espaces $A^I(\Pi, n; G)$ (pour $n(I) \leq n$) et $A^{I'}(\Pi, n; G)$ (pour $n(I') \leq n$).

(On observera que chaque espace $A^I(\Pi, n; G)$ est canoniquement isomorphe à $\text{Hom}(\Pi, G) \approx H^n(\Pi, n; G)$, et que chaque espace $A^{I'}(\Pi, n; G)$ est canoniquement isomorphe à $\text{Hom}_p(\Pi, G) \approx H^{n+1}(\Pi, n; G)$).

3.- Démonstration du théorème 1.

Rappelons (Exposé 15, paragraphe 4) qu'à chaque suite canonique I , de

première espèce, et à chaque entier $n \geq n(I)$, on a associé un homomorphisme

$$g_I(n) : \Pi/p\Pi \longrightarrow A_{n+q(I)}(\Pi, n; Z_p)$$

qui est un isomorphisme sur un sous-espace $A_I(\Pi, n; Z_p)$; et qu'à chaque suite canonique I' , de deuxième espèce, et à chaque entier $n \geq n(I')$, on a associé un homomorphisme

$$g_{I'}(n) : p\Pi \longrightarrow A_{n+q(I')}(\Pi, n; Z_p)$$

qui est un isomorphisme sur un sous-espace $A_{I'}(\Pi, n; Z_p)$. De plus, $A_*(\Pi, n; Z_p)$ est somme directe des $A_I(\Pi, n; Z_p)$ (pour $n(I) \leq n$) et des $A_{I'}(\Pi, n; Z_p)$ (pour $n(I') \leq n$). Rappelons aussi la définition

récurrente de $g_I(n)$: si $I = (0, \dots)$, on a $g_I(n) = \sigma^n$; si $I = (a_1, a_2, \dots)$, avec $a_1 = 2k_1(p-1) + u_1$ ($k_1 \geq 1$, u_1 égal à 0 ou 1), posons $K = (a_2, \dots)$; alors

$$(5) \quad \begin{cases} g_I(n) = \sigma^{n-n(I)} \chi_p g_K(n(I)) & \text{si } u_1 = 0, \\ g_I(n) = \sigma^{n-n(I)} \varphi_p g_K(n(I)) & \text{si } u_1 = 1. \end{cases}$$

(Observer que $n(K) \leq n(I)$). Si $I' = (1, 0, \dots)$, on a

$g_{I'}(n) = \sigma^{n-1} \varphi_p$; si $I' = (a_1, a_2, \dots)$, avec $a_1 = 2k_1(p-1) + u_1$, on pose encore $K' = (a_2, \dots)$, et on a les mêmes formules que ci-dessus (en y remplaçant I par I' et K par K').

Nous voulons étudier maintenant les relations existant entre la décomposition directe $A_*(\Pi, n; Z_p) = \sum_I A_I(\Pi, n; Z_p) + A_{I'}(\Pi, n; Z_p)$ et les sous-espaces $A^I(\Pi, n; G)$ et $A^{I'}(\Pi, n; G)$, images de $H^n(\Pi, n; G)$ et $H^{n+1}(\Pi, n; G)$ par les applications St_p^I . Pour cela, nous allons ordonner totalement l'ensemble des suites canoniques I , par l'ordre lexicographique: si $I = (a_1, \dots, a_i, \dots)$ et $J = (b_1, \dots, b_i, \dots)$ sont distinctes, on écrira $I < J$ si, i désignant le plus petit des i tels que $a_i \neq b_i$, on a $a_i < b_i$. Cela étant, le théorème 1 résultera évidemment du

Théorème 1 bis. - Pour chaque suite canonique de première espèce I , telle que $n(I) \leq n$, l'application $H^n(\Pi, n; G) \longrightarrow \text{Hom}(A_I(\Pi, n; Z_p), G)$ définie par St_p^I est un isomorphisme; pour chaque suite canonique de première espèce I , telle que $n(I) \leq n+1$, l'application $H^{n+1}(\Pi, n; G) \longrightarrow \text{Hom}(A_{I'}(\Pi, n; Z_p), G)$ définie par $St_p^{I'}$ est un isomorphisme. Pour chaque

suite canonique de première espèce I , telle que $n(I) \leq n$, l'image de
 $St_p^I : H^n(\Pi, n; G) \longrightarrow A^{n+q(I)}(\Pi, n; G)$ est orthogonale aux
 $A_J(\Pi, n; Z_p)$ relatifs à toutes les suites canoniques J (de première ou
de deuxième espèce) telles que $J \prec I$. Pour chaque suite canonique de pre-
mière espèce I , telle que $n(I) \leq n+1$, l'image de
 $St_p^I : H^{n+1}(\Pi, n; G) \longrightarrow A^{n+q(I')}(\Pi, n; G)$ est orthogonale aux
 $A_J(\Pi, n; Z_p)$ relatifs à toutes les suites canoniques J (de première ou
de deuxième espèce) telles que $J \prec I'$.

Pour la démonstration, on utilisera la notation suivante :

si $x' \in A^{n+q}(\Pi, n; G) \approx \text{Hom}(A_{n+q}(\Pi, n; Z_p), G)$, et si
 $x \in A_{n+q}(\Pi, n; Z_p)$, on notera $\langle x, x' \rangle$ l'élément de G , image de x
par l'homomorphisme $A_{n+q}(\Pi, n; Z_p) \longrightarrow G$ défini par x' . On convient
en outre que $\langle x, x' \rangle$ est défini, et égal à 0, quand $x \in A_*(\Pi, n; Z_p)$
et $x' \in A^*(\Pi, n; G)$ sont de degrés différents.

Nous nous proposons d'établir les relations suivantes :

- (6) $\langle g_I(n)s, St_p^I x' \rangle = \langle \sigma^n s, x' \rangle$ pour $s \in \Pi/p\Pi$,
 $x' \in H^n(\Pi, n; G)$, I désignant une suite canonique de première
espèce telle que $n(I) \leq n$.
- (7) $\langle g_I(n)t, St_p^I y' \rangle = \langle \sigma^{n-1} \varphi_p t, y' \rangle$ pour $t \in {}_p\Pi$,
 $y' \in H^{n+1}(\Pi, n; G)$, I désignant une suite canonique de première
espèce telle que $n(I) \leq n+1$.
- (8) $\langle g_J(n)s, St_p^I x' \rangle = 0$ pour $s \in \Pi/p\Pi$, $x' \in H^n(\Pi, n; G)$,
 I désignant une suite canonique de première espèce telle que
 $n(I) \leq n$, et J une suite canonique de première espèce telle
que $J \prec I$.
- (9) $\langle g_J(n)t, St_p^I x' \rangle = 0$ pour $t \in {}_p\Pi$, $x' \in H^n(\Pi, n; G)$,
 I désignant une suite canonique de première espèce telle que
 $n(I) \leq n$, et J une suite canonique de deuxième espèce telle
que $J \prec I$.
- (10) $\langle g_J(n)s, St_p^I y' \rangle = 0$ pour $s \in \Pi/p\Pi$, $y' \in H^{n+1}(\Pi, n; G)$,
 I désignant une suite canonique de première espèce telle que
 $n(I) \leq n+1$, et J une suite canonique de première espèce telle

que $J < I'$.

$$(11) \quad \langle g_J(n)t, St_p^I y' \rangle = 0 \text{ pour } t \in_p \Pi, y' \in H^{n+1}(\Pi, n; G),$$

I désignant une suite canonique de première espèce telle que $n(I) \leq n+1$, et J une suite canonique de deuxième espèce telle que $J < I'$.

Il est clair que ces relations établiront le théorème 1 bis. D'ailleurs elles sont triviales si $q(I) = 0$, car St_p^I est alors l'application identique, $g_I(n)$ est σ^n , et $g_{I'}(n)$ est $\sigma^{n-1} \varphi_p$. Nous allons prouver les relation (6)-(11) par récurrence sur $q(I)$.

On va se servir de la formule récurrente (5). Nous posons donc

$$J = (a_1, a_2, \dots), \quad I = (b_1, b_2, \dots).$$

$$\text{Alors } St_p^I = St_p^{b_1} St_p^K, \text{ et } g_J(n) = \sigma^{n-n(J)} \gamma_p g_L(n(J)) \text{ si } a_1 \equiv 0 \pmod{2p-2}$$

$$g_J(n) = \sigma^{n-n(J)} \varphi_p g_L(n(J)) \text{ si } a_1 \equiv 1 \pmod{2p-2}$$

On a posé $K = (b_2, \dots)$, et $L = (a_2, \dots)$. Observons que si $J < I$ et $q(J) = q(I)$, on a $n(J) \leq n(I)$, donc $n(J) \leq n$ si $n(I) \leq n$; si $J < I'$ et $q(J) = q(I')$, on a $n(J) \leq n(I')$, donc $n(J) \leq n$ si $n(I) \leq n+1$.

Remplaçons St_p^I et $g_J(n)$ par les valeurs précédentes dans le premier membre de l'une quelconque des relations (6)-(11) à démontrer; dans (8), par exemple, on obtient

$$(12) \quad \langle \gamma_p g_L(n(J))s, St_p^{b_1} St_p^K (t_\sigma)^{n-n(J)} x' \rangle \text{ si } a_1 \equiv 0 \pmod{2p-2}$$

$$(12') \quad \langle \varphi_p g_L(n(J))s, St_p^{b_1} St_p^K (t_\sigma)^{n-n(J)} x' \rangle \text{ si } a_1 \equiv 1 \pmod{2p-2}$$

(on a tenu compte de la commutation des St_p^I avec la suspension t_σ). On est ainsi ramené au cas où $n = n(J)$, et où $g_J(n)$ commence (à gauche) par γ_p ou φ_p . Si $a_1 = b_1$, on va prouver que l'expression (12) ou (12') est égale à :

$$\langle g_L(n(J))s, St_p^K (t_\sigma)^{n-n(J)} x' \rangle$$

ce qui nous ramènera au cas où la suite I est remplacée par la suite K , telle que $q(K) < q(I)$; ceci démontrera (6) et (8) par récurrence. Si $a_1 < b_1$, on montrera que l'expression (12) ou (12') est nulle, ce qui démontrera (8). On raisonnera de même pour les autres cas. On voit que tout revient

à prouver les lemmes suivants :

Lemme 1. - Soient $x \in A_*(\Pi, n; Z_p)$ de degré pair, et $x' \in A^*(\Pi, n; G)$ tel que $\gamma_p x$ et $P_p^k x'$ aient même degré. Alors

$$\begin{aligned} \langle \gamma_p x, P_p^k x' \rangle &= \langle x, x' \rangle \quad \text{si } \deg(x) = 2k, \\ &= 0 \quad \text{si } \deg(x) < 2k. \end{aligned}$$

Lemme 2. - Soient $x \in A_*(\Pi, n; Z_p)$ de degré pair, et $x' \in A^*(\Pi, n; G)$ tel que $\gamma_p x$ et $\beta'_p P_p^k x'$ aient même degré. Alors

$$\langle \gamma_p x, \beta'_p P_p^k x' \rangle = 0 \quad \text{si } \deg(x) \leq 2k.$$

Lemme 3. - Soient $x \in A_*(\Pi, n; Z_p)$ de degré pair, et $x' \in A^*(\Pi, n+1; G)$ tels que $\varphi_p x$ et $P_p^k x'$ aient même degré ; alors

$$\langle \varphi_p x, P_p^k x' \rangle = 0 \quad \text{si } \deg(x) < 2k.$$

Lemme 4. - Soient $x \in A_*(\Pi, n; Z_p)$ de degré pair, et $x' \in A^*(\Pi, n+1; G)$ tels que $\varphi_p x$ et $\beta'_p P_p^k x'$ aient même degré. Alors

$$\begin{aligned} \langle \varphi_p x, \beta'_p P_p^k x' \rangle &= \langle x, {}^t\sigma x' \rangle \quad \text{si } \deg(x) = 2k, \\ &= 0 \quad \text{si } \deg(x) < 2k. \end{aligned}$$

Démonstration des lemmes 1 à 4 : dans les hypothèses du lemme 1, si le degré de x est $< 2k$, le degré de $P_p^k x'$ est $< 2kp$, donc celui de x' est $< 2k$, et par suite $P_p^k x' = 0$ (Exposé 15, corollaire du théorème 3). Il reste à examiner le cas où, dans les hypothèses du lemme 1, x et x' ont le même degré $2k$. On va prouver la relation

$$\langle \gamma_p x, P_p^k x' \rangle = \langle x, x' \rangle$$

sous ces hypothèses. Si le groupe G est Z_p , la relation s'écrit

$\langle \gamma_p x, x'^p \rangle = \langle x, x' \rangle$; elle résulte de la détermination de l'algèbre de cohomologie $H^*(\Pi, n; Z_p)$ faite au paragraphe 5 de l'Exposé 9.

Il s'ensuit que l'opération homologique (dans $H_*(\Pi, n; Z_p)$) dont la puissance p -ième des éléments de degré $2k$ est la transposée, transforme $\gamma_p(x)$ dans x , pour $x \in H_{2k}(\Pi, n; Z_p)$. Par transposition dans $A^*(\Pi, n; G)$, on obtient la relation cherchée.

Passons au lemme 2. Si x est de degré $\leq 2k$, $\beta'_p P_p^k x'$ est de degré $\leq 2kp$, donc x' est de degré $\leq 2k-1$, et par suite $\beta'_p P_p^k x' = 0$.

est nul. D'où le lemme 2.

On prouve de même le lemme 3 : si $\deg(x) < 2k$, le degré de $P_p^k x'$ est $\leq 2p(k-1)+2$, donc le degré de x' est $\leq 2k - 2(p-1) < 2k$, et par suite $P_p^k x' = 0$.

Enfin, passons au lemme 4, en nous rappelant que $\beta_p \varphi_p = \sigma \gamma_p$ dans $A_*(\Pi, n; Z_p)$, même pour $p = 2$ (cf. théorème 1 de l'Exposé 8); il vient

$$\begin{aligned} \langle \varphi_p^x, \beta_p P_p^k x' \rangle &= \langle \beta_p \varphi_p^x, P_p^k x' \rangle = \langle \sigma \gamma_p^x, P_p^k x' \rangle \\ &= \langle \gamma_p^x, P_p^k t_{\sigma} x' \rangle, \end{aligned}$$

et on est ramené au lemme 1.

Ainsi sont démontrés les lemmes 1 à 4, d'où, par récurrence sur $q(I)$, les relations (6) à (11), lesquelles entraînent le théorème 1 bis (et, par suite, le théorème 1).

Problème ouvert : si I est une suite canonique de première espèce, le sous-espace $A^I(\Pi, n; G)$ est-il orthogonal à tous les espaces $A_J(\Pi, n; Z_p)$ relatifs aux suites canoniques J autres que I ? Et le sous-espace $A^{I'}(\Pi, n; G)$ est-il orthogonal à tous les espaces $A_J(\Pi, n; Z_p)$ relatifs aux suites canoniques J autres que I' ? Nous ne savons pas répondre à cette question (voir Appendice ci-dessous).

4.- Détermination de toutes les opérations cohomologiques additives

$$H^n(X; \Pi) \longrightarrow H^q(X; G), \text{ quand } pG = 0.$$

Elles correspondent aux éléments de $A^*(\Pi, n; G)$ (cf. le préambule de l'Exposé 15), et sont donc nulles pour $0 < q < n$. On supposera $q \geq n$.

Comme dans l'Exposé 14, nous noterons $T(u)$ l'opération cohomologique définie par un élément $u \in A^{n+q}(\Pi, n; G)$. Toute opération cohomologique additive $H^n(X; \Pi) \longrightarrow H^{n+q}(X, G)$ est canoniquement la somme d'opérations cohomologiques dont chacune est associée à l'un des sous-espaces

$A^I(\Pi, n; G)$, resp. $A^{I'}(\Pi, n; G)$ du théorème 1, pour les suites canoniques I de première espèce telles que $n(I) \leq n$ et $q(I) = q$, resp. $n(I) \leq n+1$ et $q(I) = q-1$. Tout revient à expliciter une opération associée à un élément de $A^I(\Pi, n; G)$, resp. de $A^{I'}(\Pi, n; G)$; une telle opération sera appelée opération élémentaire de première espèce, resp. de deuxième espèce.

Détermination des opérations élémentaires de première espèce :

Une telle opération $H^n(X; \Pi) \longrightarrow H^{n+q}(X; G)$ est de la forme $T(u)$, où u est de la forme $St_p^I x'$, avec $x' \in H^n(\Pi, n; G) \approx \text{Hom}(\Pi, G)$, et I est une suite canonique de première espèce, telle que $n(I) \leq n$ et $q(I)=q$. Donc une telle opération est déterminée par le choix d'une suite I et d'un homomorphisme $\lambda : \Pi \longrightarrow G$, ou, ce qui revient au même, d'un homomorphisme $\Pi/p\Pi \longrightarrow G$. En vertu de la relation (8') de l'Exposé 14, on a

$T(St_p^I x') \cdot \xi = St_p^I(T(x') \cdot \xi)$ pour $\xi \in H^n(X; \Pi)$. Mais il est évident que l'opération $T(x') : H^n(X; \Pi) \longrightarrow H^n(X; G)$ est simplement l'application définie par l'homomorphisme $\lambda : \Pi \longrightarrow G$ des coefficients.

Ainsi, l'opération élémentaire définie par la suite canonique I et l'homomorphisme λ s'obtient en faisant d'abord l'application $H^n(X; \Pi) \longrightarrow H^n(X; G)$ définie par λ , puis en effectuant la transformation de Steenrod $St_p^I : H^n(X; G) \longrightarrow H^{n+q}(X; G)$, q désignant l'entier $q(I)$.

Remarques : cette même opération élémentaire peut se décomposer aussi comme suit : on effectue l'application naturelle $H^n(X; \Pi) \longrightarrow H^n(X; \Pi/p\Pi)$, puis l'opération $St_p^I : H^n(X; \Pi/p\Pi) \longrightarrow H^{n+q}(X; \Pi/p\Pi)$, et enfin l'application $H^{n+q}(X; \Pi/p\Pi) \longrightarrow H^{n+q}(X; G)$ définie par λ .

Détermination des opérations élémentaires de deuxième espèce :

une telle opération $H^n(X; \Pi) \longrightarrow H^{n+q}(X; G)$ est de la forme $T(u)$, où u est de la forme $St_p^I y'$, avec $y' \in H^{n+1}(\Pi, n; G) \approx \text{Hom}_p(\Pi, G)$, et I est une suite canonique de première espèce, telle que $n(I) \leq n+1$ et $q(I) = q-1$. Donc une telle opération est déterminée par le choix d'une suite I et d'un homomorphisme $\mu : {}_p\Pi \longrightarrow G$. On a alors

$T(St_p^I y') \cdot \xi = St_p^I(T(y') \cdot \xi)$ pour $\xi \in H^n(X; \Pi)$. Tout revient à déterminer l'opération cohomologique

$$T(y') : H^n(X; \Pi) \longrightarrow H^{n+1}(X; G)$$

définie par la donnée d'un homomorphisme $\mu : {}_p\Pi \longrightarrow G$. Alors toute opération élémentaire de deuxième espèce s'obtiendra en composant l'opération $T(y')$ et une opération St_p^I , I désignant une suite canonique de première espèce, telle que $n(I) \leq n+1$ et $q(I) = q-1$.

Proposition 4. - L'opération $T(y')$ définie par un homomorphisme

$\mu : {}_p\pi \longrightarrow G$ n'est autre que l'opération de Bockstein généralisée, définie comme suit : soit $\xi \in H^n(X; \pi)$; l'application naturelle $H^n(X; \pi) \longrightarrow \text{Hom}(H_n(X), \pi)$ associe à ξ un homomorphisme $g : H_n(X) \longrightarrow \pi$. Considérons l'application composée

$$H_{n+1}(X; Z_p) \xrightarrow{\delta_p} H_n(X) \xrightarrow{g} \pi$$

où δ_p désigne l'opération de Bockstein en homologie (Exposé 8, paragraphe 2) ; l'image de l'application composée est contenue dans le sous-groupe ${}_p\pi$; d'où une application linéaire $H_{n+1}(X; Z_p) \longrightarrow {}_p\pi$, laquelle définit à son tour un élément de $H^{n+1}(X; {}_p\pi)$; en composant avec l'application $H^{n+1}(X; {}_p\pi) \longrightarrow H^{n+1}(X; G)$ définie par $\mu : {}_p\pi \longrightarrow G$, on obtient un élément de $H^{n+1}(X; G)$, qui est le transformé de $\xi \in H^n(X; \pi)$ par l'opération "de Bockstein" que l'on voulait définir.

Démonstration : soit $f_\xi : X \longrightarrow K(\pi, n)$ une application de la classe définie par $\xi \in H^n(X; \pi)$ (Exposé 14, corollaire du théorème 1). Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n+1}(X; Z_p) & \xrightarrow{(f_\xi)_*} & H_{n+1}(\pi, n; Z_p) & \longrightarrow & A_{n+1}(\pi, n; Z_p) & \approx & {}_p\pi \xrightarrow{\mu} G \\ \downarrow \delta_p & & \downarrow \delta_p & & \downarrow & & \downarrow \text{injection} \\ H_n(X) & \xrightarrow{(f_\xi)_*} & H_n(\pi, n; Z) & \approx & A_n(\pi, n; Z) & \approx & \pi \end{array}$$

L'application composée de la ligne supérieure $H_{n+1}(X; Z_p) \longrightarrow G$ définit l'élément $\eta \in H^{n+1}(X; G)$, transformé de ξ par $T(y')$: il suffit de remonter aux définitions. L'application composée de la ligne inférieure $H_n(X) \longrightarrow \pi$ est l'homomorphisme g défini par $\xi \in H^n(X; \pi)$. La commutativité du diagramme montre alors que η est le transformé de ξ par l'opération "de Bockstein" définie dans l'énoncé de la proposition 4, qui est ainsi prouvée.

Remarque : on peut, d'une manière naturelle, associer à chaque homomorphisme $\mu : {}_p\pi \longrightarrow G$ (G étant un groupe abélien tel que $pG = 0$) une classe d'extensions de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow \pi \longrightarrow 0 \quad (\text{suite exacte, } F \text{ abélien}),$$

et on obtient même ainsi une correspondance biunivoque entre les éléments de $\text{Hom}({}_p\pi, G)$ et les classes d'extensions de π par G (voir le livre à

paraître de CARTAN-EILENBERG, Homological Algebra, Ch. VII, Exer. 8 ; voir aussi [1], theorem 26.5). Or la donnée d'une suite exacte comme ci-dessus définit une suite exacte de cohomologie ; on peut montrer que son opérateur "cobord" : $H^n(X ; \Pi) \longrightarrow H^{n+1}(X ; G)$ est, au signe près, l'opération de Bockstein généralisée.

Autre remarque : comme dans le cas d'une opération élémentaire de première espèce, une opération élémentaire de deuxième espèce, définie par une suite canonique I et un homomorphisme $\mu : {}_p\Pi \longrightarrow G$, peut aussi se décomposer comme suit : on effectue d'abord l'opération de Bockstein

$H^n(X ; \Pi) \longrightarrow H^{n+1}(X ; {}_p\Pi)$ (relative à l'application identique

${}_p\Pi \longrightarrow {}_p\Pi$) ; puis on fait $St_p^I : H^{n+1}(X ; {}_p\Pi) \longrightarrow H^{n+q}(X ; {}_p\Pi)$,

q désignant $q(I)+1$; enfin, on fait l'application

$H^{n+q}(X ; {}_p\Pi) \longrightarrow H^{n+q}(X ; G)$ définie par l'homomorphisme $\mu : {}_p\Pi \longrightarrow G$.

Remarque finale : lorsque $\Pi = G$, avec $pG = 0$, et que μ est l'application identique de G , l'opération de Bockstein

$H^n(X ; G) \longrightarrow H^{n+1}(X ; G)$ est évidemment la transposée de

$\beta_p : H_{n+1}(X ; Z_p) \longrightarrow H_n(X ; Z_p)$. Autrement dit, c'est l'opération St_p^1 .

En particulier, l'opération de Bockstein $H^n(\Pi, n ; G) \longrightarrow H^{n+1}(\Pi, n ; G)$ n'est autre que l'application $\text{Hom}(\Pi, G) \longrightarrow \text{Hom}({}_p\Pi, G)$ induite par l'inclusion ${}_p\Pi \longrightarrow \Pi$. Revenant alors au théorème 1, on obtient :

Corollaire au théorème 1 : soit Π un groupe abélien tel que $p\Pi = 0$. Alors, pour G tel que $pG = 0$, $A^*(\Pi, n ; G)$ est somme directe des images (biunivoques) des $St_p^I : H^n(\Pi, n ; G) \longrightarrow H^{n+q(I)}(\Pi, n ; G)$ relatifs à toutes les suites canoniques I (de première ou de deuxième espèce) telles que $n(I) \leq n$.

5.- Complément dans le cas $p = 2$.-

Les opérations de Steenrod St_2^a sont définies pour toute valeur de l'entier $a \geq 0$; on les note aussi Sq^a ("carré de Steenrod").

Par définition, on a $Sq^{2k+1} = \beta_2' Sq^{2k}$, et, en particulier, $Sq^1 = \beta_2'$. De plus, si $G = Z_2$, on a $Sq^{2k} \xi = \xi^2$ (carré de ξ) lorsque est de degré $2k$. Tout cela n'est qu'une spécialisation de propriétés valables pour tout p premier. Mais, pour $p=2$, on a en outre :

Proposition 5. - Dans l'algèbre de cohomologie $H^*(X; Z_2)$, on a

$$Sq^{2k+1} \xi = \xi^2 \text{ pour } \xi \text{ de degré } 2k+1.$$

Démonstration : désignons par Π le groupe cyclique d'ordre 2, et soit x' la classe fondamentale de $H^{2k+1}(\Pi, 2k+1; Z_2)$. Il suffit de montrer que $Sq^{2k+1} x' = x'^2$. Or, utilisons la détermination de l'algèbre de cohomologie $H^*(\Pi, 2k+1; Z_2)$ faite dans l'Exposé 10, théorème 2; on voit qu'il suffit de montrer : 1° que $Sq^{2k+1} x'$ est orthogonal aux éléments de $A_{4k+2}(\Pi, 2k+1; Z_2)$ situés dans l'image de la suspension; 2° que l'on a

$$\langle \gamma_2 y, Sq^{2k+1} x' \rangle = \langle y, x' \rangle$$

y désignant le générateur de $A_{2k+1}(\Pi, 2k+1; Z_2)$ (qui est un groupe cyclique d'ordre 2).

Démontrons 1° : si $u \in A_{4k+1}(\Pi, 2k; Z_2)$, on a

$$\langle \sigma u, Sq^{2k+1} x' \rangle = \langle u, Sq^{2k+1} ({}^t \sigma x') \rangle,$$

et comme ${}^t \sigma x'$ est de degré $2k$, $Sq^{2k+1} ({}^t \sigma x')$ est nul (cf. proposition 3 ci-dessus). Démontrons 2° : on a $y = \sigma x$, x désignant le générateur de $A_{2k}(\Pi, 2k; Z_2)$. Donc $\gamma_2 y = \gamma_2 \sigma x$, qui, d'après l'Exposé 8 (proposition 1), est égal à $\varphi_2 x$. Ainsi

$$\langle \gamma_2 y, Sq^{2k+1} x' \rangle = \langle \varphi_2 x, \beta'_2 Sq^{2k} x' \rangle,$$

ce qui, d'après le lemme 4 ci-dessus, est égal à $\langle x, {}^t \sigma x' \rangle = \langle y, x' \rangle$. Ceci achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. EILLENBERG-S. MAC LANE, On the groups $H(\Pi, n)$, II (Annals of Math. 60, 1954, p. 49-139).
-

APPENDICE

A la fin du paragraphe 3, on a posé le problème de comparer les deux décompositions directes de $A^*(\Pi, n; G)$: celle donnée par le théorème 1, et celle qui résulte (par transposition) de la décomposition directe de $A_*(\Pi, n; Z_p)$ suivant les $A_I(\Pi, n; Z_p)$ et les $A_{I'}(\Pi, n; Z_p)$. Nous ne savons pas résoudre ce problème, mais on peut faire quelques remarques.

La décomposition directe de $A^*(\Pi, n; G)$ donnée au théorème 1 provient, par transposition, d'une décomposition directe de $A_*(\Pi, n; Z_p)$ qui ne dépend pas de G , et qu'on va expliciter.

Notons St_J^p l'opération homologique dont St_p^J est la transposée. Soit alors I une suite canonique de première espèce, telle que $n(I) \leq n$; on notera $B_I(\Pi, n; Z_p)$ l'intersection des noyaux des

$St_J^p : A_{n+q(I)}(\Pi, n; Z_p) \rightarrow A_n(\Pi, n; Z_p)$ relatifs aux suites canoniques J de première espèce, telles que $\bigvee_{J \neq I} n(J) \leq n$ et $q(J) = q(I)$, et des

$St_J^p = A_{n+q(I)}(\Pi, n; Z_p) \rightarrow A_{n+1}(\Pi, n; Z_p)$ relatifs aux suites canoniques J de première espèce, telles que $n(J) \leq n+1$ et $q(J) = q(I)-1$. De même, soit I' une suite canonique de première espèce, telle que $n(I') \leq n+1$; on notera $B_{I'}(\Pi, n; Z_p)$ le noyau des

$St_J^p : A_{n+q(I')}(\Pi, n; Z_p) \rightarrow A_n(\Pi, n; Z_p)$ relatifs aux suites canoniques J de première espèce, telles que $n(J) \leq n$ et $q(J) = q(I')$, et des $St_J^p : A_{n+q(I')}(\Pi, n; Z_p) \rightarrow A_{n+1}(\Pi, n; Z_p)$ relatifs aux suites canoniques J de première espèce, telles que $\bigvee_{J \neq I'} n(J) \leq n+1$ et $q(J) = q(I')-1$.

Alors St_I^p est un isomorphisme de $B_I(\Pi, n; Z_p)$ sur $A_n(\Pi, n; Z_p) \approx \Pi/p\Pi$; et $St_{I'}^p$ est un isomorphisme de $B_{I'}(\Pi, n; Z_p)$ sur $A_{n+1}(\Pi, n; Z_p) \approx_p \Pi$.

L'isomorphisme réciproque est un isomorphisme (naturel) θ_I de $\Pi/p\Pi$ sur $B_I(\Pi, n; Z_p)$ (pour $n(I) \leq n$), resp. un isomorphisme (naturel) $\theta_{I'}$ de $_p\Pi$ sur $B_{I'}(\Pi, n; Z_p)$ (pour $n(I') \leq n+1$).

D'autre part, on a considéré, au paragraphe 3, un isomorphisme naturel $g_I(n)$ (que nous noterons simplement g_I) de $\Pi/p\Pi$ sur $A_I(\Pi, n; Z_p)$, pour $n(I) \leq n$; et un isomorphisme naturel $g_{I'}(n)$ (que nous noterons

simplement g_I) de ${}_p\pi$ sur $A_I(\pi, n; Z_p)$, pour $n(I) \leq n+1$.

Il s'agit de comparer les deux décompositions directes, naturelles, de $A_*(\pi, n; Z_p)$: l'une, suivant les $A_I(\pi, n; Z_p)$ et les $A_{I'}(\pi, n; Z_p)$; l'autre, suivant les $B_I(\pi, n; Z_p)$ et les $B_{I'}(\pi, n; Z_p)$. On peut écrire, a priori, pour $x \in \pi/p\pi$, et $n(I) \leq n$:

$$g_I(x) = \sum_{n(J) \leq n} \theta_J(\alpha_{JI}(x)) + \sum_{n(J) \leq n+1} \theta_{J'}(\beta_{JI}(x)),$$

les α_{JI} étant des homomorphismes naturels $\pi/p\pi \rightarrow \pi/p\pi$,

et les β_{JI} étant des homomorphismes naturels $\pi/p\pi \rightarrow {}_p\pi$.

De même, pour $y \in {}_p\pi$, et $n(I) \leq n+1$:

$$g_I(y) = \sum_{n(J) \leq n} \theta_J(\gamma_{JI}(y)) + \sum_{n(J) \leq n+1} \theta_{J'}(\delta_{JI}(y)),$$

les γ_{JI} étant des homomorphismes naturels ${}_p\pi \rightarrow \pi/p\pi$,

et les δ_{JI} étant des homomorphismes naturels ${}_p\pi \rightarrow {}_p\pi$.

Il résulte du théorème 1 bis que α_{II} est l'identité, et que δ_{II} est l'identité; de plus, $\alpha_{JI} = 0$ pour $I < J$, et $\delta_{JI} = 0$ pour $I < J$. De plus, on voit facilement que tout homomorphisme naturel $\pi/p\pi \rightarrow {}_p\pi$ est nul, ainsi que tout homomorphisme naturel ${}_p\pi \rightarrow \pi/p\pi$. Donc $\beta_{JI} = 0$, $\gamma_{JI} = 0$. Enfin, on voit facilement que tout homomorphisme naturel $\pi/p\pi \rightarrow \pi/p\pi$, resp. ${}_p\pi \rightarrow {}_p\pi$, est de la forme $x \rightarrow kx$, où $k \in Z_p$. Tout revient, finalement, à déterminer les éléments $\alpha_{JI} \in Z_p$ et $\delta_{JI} \in Z_p$, pour $I > J$. Il est plausible de conjecturer qu'ils sont nuls.

En tout cas, on voit que

$$\sum_{n(I) \leq n} A_I(\pi, n; Z_p) = \sum_{n(I) \leq n} B_I(\pi, n; Z_p),$$

et que
$$\sum_{n(I) \leq n+1} A_I(\pi, n; Z_p) = \sum_{n(I) \leq n+1} B_I(\pi, n; Z_p).$$