

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

J. C. MOORE

**Comparaison de la bar-construction à la construction
 W et aux complexes $K(\pi, n)$**

Séminaire Henri Cartan, tome 7, n° 2 (1954-1955), exp. n° 13, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_2_A2_1

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1954/55.

13-01

COMPARAISON DE LA BAR-CONSTRUCTION
À LA CONSTRUCTION W ET AUX COMPLEXES $K(W, n)$.

(Exposé de J. C. MOORE, 14.2.1955)

1.- Préliminaires sur les modules différentiels filtrés.

Nous conservons les notations de l'Exposé 3 pour la suite spectrale.

Soient A une DGA-algèbre, M un DGA-module sur A , N un DGA-module sur $\wedge$ (ayant une $\wedge$ -base homogène), et ψ un DGA-homomorphisme de M sur N . On suppose donnée une filtration sur M , définie par des sous-modules $F_p(M)$ satisfaisant aux conditions de l'Exposé 3 (p. 3-01), et en outre aux conditions suivantes : (1) chaque $F_p(M)$ est stable pour les opérations de A ; (2) l'application $\psi : M \rightarrow N$ envoie $F_p(M)$ sur $\sum_{q \leq p} N_q$.

Considérons $A \otimes N$ comme un DGA-module sur A , avec la différentielle $d(a \otimes n) = (da) \otimes n + (-1)^\alpha a \otimes (dn)$, où $\alpha = \deg(a)$. Considérons la filtration

$$F_p(A \otimes N) = A \otimes \sum_{q \leq p} N_q \text{ définie par le degré de } N ; \text{ on a}$$

$$F_p(A \otimes N)/F_{p-1}(A \otimes N) \approx A \otimes N_p \text{ muni de la différentielle de } A .$$

Supposons de plus qu'on se soit donné un homomorphisme

$$\varphi^0 : E^0(M) \rightarrow E^0(A \otimes N) \approx A \otimes N ,$$

c'est-à-dire, pour chaque p , un homomorphisme $F_p(M)/F_{p-1}(M) \rightarrow A \otimes N_p$; et que φ^0 soit compatible avec les structures de A -module et les différentielles d^0 . Supposons en outre que si on compose

$$M_p \rightarrow F_p(M)/F_{p-1}(M) \xrightarrow{\varphi^0} A \otimes N_p \rightarrow N_p ,$$

où le premier homomorphisme est défini par l'injection $M_p \rightarrow F_p(M)$, et où le dernier est $a \otimes n \rightarrow (\varepsilon a)n$, on obtienne l'application $M_p \rightarrow N_p$ induite par ψ .

Dans la situation précédente, φ^0 induit un homomorphisme des modules de d^0 -homologie, c'est-à-dire un homomorphisme

$$\varphi^1 : E^1(M) \rightarrow E^1(A \otimes N) \approx H(A) \otimes N .$$

φ^1 est compatible avec les structures de modules à gauche sur l'algèbre graduée $H(A)$. Mais il n'est pas certain que φ^1 soit compatible avec les différentielles d^1 . On notera que la différentielle d^1 de $H(A) \otimes N$ envoie $a \otimes n$ dans $(-1)^\alpha a \otimes (dn)$ pour $a \in H(A)$ de degré α .

Proposition 1.- Dans la situation précédente, supposons que φ^1 soit un isomorphisme, et que l'augmentation de A définisse un isomorphisme $H_0(A) \approx \Lambda$. Alors φ^1 est compatible avec d^1 , et définit donc un isomorphisme

$$\varphi^2 : E^2(M) \approx H(H(A) \otimes N) .$$

Démonstration : soit $u \in H(A)$, $n \in N_p$. Prenons $m \in M_p$ tel que $\Psi(m) = n$; l'image m' de $m \in F_p(M)$ dans $E^1(M)$ est telle que $\varphi^1(m') = 1 \otimes n$. Soit a un cycle de A dont la classe d'homologie soit u ; l'image m'' de $am \in F_p(M)$ dans $E^1(M)$ est $u \otimes n$. Puisque, dans $F_p(M)$, on a

$$d(am) = (-1)^\alpha a(dm) , \quad \alpha = \deg(a) ,$$

il s'ensuit que $\varphi^1(d^1 m'') = (-1)^\alpha a \otimes (dn)$, ce qui démontre la proposition.

2.- La suite spectrale d'une construction.

Soit R un complexe (au sens de l'Exposé 12). La notation R_N désignera le complexe normalisé (Exposé 12, paragraphe 1) muni de sa structure de Λ -module différentiel gradué (R_N n'est pas un "complexe"). Si de plus R est un complexe d'anneaux (Exposé 12, p. 12-02), alors R_N sera considéré comme muni de sa structure d'algèbre différentielle graduée. Rappelons que la multiplication de R_N est alors définie par l'application composée $R_N \otimes R_N \xrightarrow{\nabla} (R \times R)_N \rightarrow R_N$, dont la seconde est définie par la multiplication de chaque algèbre R_q . Rappelons aussi que si la multiplication de R est commutative, celle de R_N est anticommutative (au sens strict).

Soit $(R, \bar{U}, U)$ une construction, au sens de l'Exposé 12, paragraphe 2. Alors U_N est un DGA-module sur la DGA-algèbre R_N , pour la multiplication définie par l'application composée $R_N \otimes U_N \xrightarrow{\nabla} (R \times U)_N \rightarrow U_N$. On va se placer dans la situation du paragraphe 1, A étant remplacée par R_N , M par U_N et N par $\bar{U}_N$. L'application Ψ du paragraphe 1 est remplacée par l'application naturelle $U_N \rightarrow \bar{U}_N$. Nous définissons une filtration $F_p(U_N)$ comme suit : soit $\bar{U}^p$ le sous-complexe de $\bar{U}$ engendré par les éléments de degré p , c'est-à-dire le plus petit ensemble de $\bar{U}$ contenant $\bar{U}_p$ et stable pour les opérations ∂_i et s_i . Nous posons

$$F_p(U) = R \times \bar{U}^p, \quad F_p(U_N) = \text{image de } F_p(U) \text{ dans } U_N.$$

Il est immédiat que cette filtration satisfait aux conditions du paragraphe 1.

On va prendre pour $\varphi^0 : \sum_p F_p(U_N)/F_{p-1}(U_N) \rightarrow R_N \otimes \bar{U}_N$ l'application induite par

$$f : (R \times \bar{U})_N \longrightarrow R_N \otimes \bar{U}_N$$

définie dans l'Exposé 12, p. 12-02 ; f , étant compatible avec les filtrations, induit bien une application $\varphi^0 : E^0(U_N) \rightarrow E^0(R_N \otimes \bar{U}_N)$.

Si on compose f avec l'application $R_N \otimes \bar{U}_N \rightarrow \bar{U}_N$ définie par l'augmentation de R_N , on retrouve bien l'application naturelle $U_N \rightarrow \bar{U}_N$. Il faut vérifier que φ^0 est compatible avec les opérateurs d^0 . Il en est évidemment ainsi dans le cas où la construction $(R, \bar{U}, U)$ est un produit cartésien, car alors f est compatible avec les différentielles. Il suffit donc de montrer que la différentielle d^0 de $E^0(U_N)$ est la même que pour un produit cartésien.

Or un élément $x \in F_p(U_{p+q})$ est une somme d'éléments de la forme $r_{p+q} \times s_{i_1} \dots s_{i_q} \bar{u}_p$, où l'on peut supposer $i_1 > \dots > i_q$, et $\bar{u}_p \in \bar{U}_p$. Le ∂_j de cet élément est

$$(\partial_j r_{p+q}) \cdot \partial_j (1 \times s_{i_1} \dots s_{i_q} \bar{u}_p) = (\partial_j r_{p+q}) \cdot \partial_j s_{i_1} \dots s_{i_q} (1 \times \bar{u}_p).$$

De plus $\partial_j s_{i_1} \dots s_{i_q} (1 \times \bar{u}_p)$ est de filtration au plus $p-1$, sauf si j est égal à l'un des entiers $i_1+1, i_1, i_2+1, i_2, \dots, i_q+1, i_q$; si $j = i_r$ ou i_{r+1} (avec $1 \leq r \leq q$), on a

$$\partial_j s_{i_1} \dots s_{i_q} (1 \times \bar{u}_p) = s_{i_1-1} \dots s_{i_{r-1}-1} s_{i_{r+1}} \dots s_{i_q} (1 \times \bar{u}_p).$$

On aurait évidemment la même formule si U était un produit cartésien $R \times \bar{U}$.

Pour pouvoir appliquer à cette situation la proposition 1 ci-dessus, il reste à vérifier que φ^0 définit un isomorphisme

$$\varphi^1 : E^1(U_N) \approx H(R_N) \otimes \bar{U}_N.$$

Or φ^0 est induite par f ; dans l'Exposé 12, p. 12-02, on a défini

$$\nabla : R_N \otimes \bar{U}_N \longrightarrow (R \times \bar{U})_N$$

et une homotopie Φ entre ∇f et l'identité ; comme Φ est naturelle,

Φ respecte la filtration, donc (cf. [1]) l'application composée

$$E^0(U_N) \xrightarrow{\varphi^0} E^0(R_N \otimes \bar{U}_N) \xrightarrow{\nabla^0} E^0(U_N)$$

définit, par passage à l'homologie, l'application identique. Il s'ensuit que φ^1 est un isomorphisme. Finalement, on a prouvé :

Proposition 2.- Si $(R, \bar{U}, U)$ est une construction, et si $H_0(R_N) = \wedge$, la suite spectrale de la filtration $F_p(U_N)$ a pour terme E^1 le module $H(R_N) \otimes \bar{U}_N$, et la différentielle d^1 envoie $a \otimes u$ dans $(-1)^\alpha a \otimes (du)$, avec $\alpha = \deg(a)$. On a donc $E^2(U_N) \approx H(H(R_N) \otimes \bar{U}_N)$.

3.- Comparaison de la construction W et de la bar construction.

Soit R un complexe d'anneaux (non supposés commutatifs). On notera $W_N(R)$ le normalisé du complexe $W(R)$ défini dans l'Exposé 12 (p. 12-04, 12-05). L'image de l'application composée $\bar{W}(R) \rightarrow W(R) \rightarrow W_N(R)$ s'identifie au normalisé $\bar{W}_N(R)$ de $\bar{W}(R)$.

Théorème 1.- Soient A une DGA-algèbre, et R un complexe d'anneaux. Soit $f : A \rightarrow R_N$ un DGA-homomorphisme. Alors il existe un DGA-homomorphisme et un seul

$$g : \mathcal{B}(A) \rightarrow W_N(R)$$

compatible avec f , et tel que $g(\bar{\mathcal{B}}(A)) \subset \bar{W}_N(R)$. Soit $\bar{g} : \bar{\mathcal{B}}(A) \rightarrow \bar{W}_N(R)$ l'application induite par g ; si f induit un isomorphisme $H(A) \approx H(R_N)$, et si $H_0(A) \approx H_0(R_N) \approx \wedge$, alors $\bar{g}_* : H(\bar{\mathcal{B}}(A)) \rightarrow H(\bar{W}_N(R))$ est un isomorphisme.

(Ce théorème, essentiellement dû à Eilenberg-MacLane, est énoncé p. 98 du mémoire cité en [1] dans l'Exposé 12, sous des hypothèses légèrement différentes).

Démonstration : l'existence et l'unicité de g se prouvent exactement comme dans la démonstration du théorème 5 de l'Exposé 4, parce que tout cycle d'augmentation nulle de $W_N(R)$ est le bord d'un unique élément de $\bar{W}_N(R)$ (cf. Exposé 12, démonstration du théorème 2). L'application g est compatible avec les filtrations. D'après la proposition 1, on a $E^1(\mathcal{B}(A)) = H(A) \otimes \bar{\mathcal{B}}(A)$, la différentielle d^1 étant induite par l'opérateur $\bar{d}$ de $\bar{\mathcal{B}}(A)$. D'après la proposition 2, $E^1(W_N(R)) = H(R_N) \otimes \bar{W}_N(R)$, et d^1 est induit par l'opérateur de $\bar{W}_N(R)$. Si de plus f induit un isomorphisme $H(A) \rightarrow H(R_N)$, nous sommes exactement dans les conditions d'application du théorème A de

l'Exposé 3 (p. 3-04). On en conclut que $\bar{g}_* : H(\bar{\mathcal{B}}(A)) \rightarrow H(\bar{W}_N(R))$ est un isomorphisme. C.Q.F.D.

Rappelons que si la DGA-algèbre A est anticommutative, $\mathcal{B}(A)$ et $\bar{\mathcal{B}}(A)$ sont douées d'une multiplication qui en fait des DGA-algèbres anticommutatives (Exposé 3, proposition 3 et théorème 4). Il y a une propriété analogue pour la construction W : supposons que le complexe d'anneaux R soit commutatif (alors la DGA-algèbre R_N est anticommutative) : l'application $R \times R \rightarrow R$ définie par la multiplication des anneaux R_q est alors multiplicative ; d'après le théorème 2 de l'Exposé 12, elle définit une application g de $W(R \times R) = W(R) \times W(R)$ dans $W(R)$, qui applique $\bar{W}(R \times R) = \bar{W}(R) \times \bar{W}(R)$ dans $\bar{W}(R)$. Il est facile d'explicitier g : rappelons que $W_q(R) = R_q \otimes \dots \otimes R_0$, et $\bar{W}_q(R) = R_{q-1} \otimes \dots \otimes R_0$; définissons une multiplication dans $W_q(R)$ par $(r_q \otimes \dots \otimes r_0) \cdot (r'_q \otimes \dots \otimes r'_0) = (r_q r'_q) \otimes \dots \otimes (r_0 r'_0)$, ce qui induit sur $\bar{W}_q(R)$ la multiplication $(r_{q-1} \otimes \dots \otimes r_0) \cdot (r'_{q-1} \otimes \dots \otimes r'_0) = (r_{q-1} r'_{q-1}) \otimes \dots \otimes (r_0 r'_0)$. Pour montrer que c'est bien la multiplication g cherchée, il suffit de prouver qu'avec cette multiplication $W(R)$ et $\bar{W}(R)$ sont des complexes d'anneaux augmentés (d'ailleurs commutatifs). Or cela résulte des formules

$$s_i(r_q \otimes \dots \otimes r_0) = (s_i r_q) \otimes (s_{i-1} r_{q-1}) \otimes \dots \otimes (s_0 r_{q-i}) \otimes 1_{q-i} \otimes r_{q-i-1} \otimes \dots \otimes r_0$$

$$\varepsilon(r_q \otimes \dots \otimes r_0) = (\varepsilon r_q) \dots (\varepsilon r_0),$$

$$\partial_i(r_q \otimes \dots \otimes r_0) = (\partial_i r_q) \otimes \dots \otimes (\partial_0 r_{q-i}) r_{q-i-1} \otimes \dots \otimes r_0,$$

et du fait que, R étant commutatif, on a

$$(\partial_0 r_{q-i}) r_{q-i-1} \cdot (\partial_0 r'_{q-i}) r'_{q-i-1} = \partial_0 (r_{q-i} r'_{q-i}) r_{q-i-1} r'_{q-i-1}.$$

Proposition 3.- Soient A une DGA-algèbre anticommutative, R un complexe d'anneaux commutatifs, et $f : A \rightarrow R_N$ un DGA-homomorphisme. Alors les DGA-homomorphismes $g : \mathcal{B}(A) \rightarrow W_N(R)$ et $\bar{g} : \bar{\mathcal{B}}(A) \rightarrow \bar{W}_N(R)$ du théorème 1 sont compatibles avec les structures multiplicatives (ce sont des DGA-homomorphismes de DGA-algèbres).

La démonstration est la même que pour le théorème 5 de l'Exposé 4.

4.- Comparaison des constructions itérées.

Soit R un complexe d'anneaux augmentés, commutatif. Alors $W(R)$ est aussi un complexe d'anneaux augmentés, commutatif. On peut donc définir, par

réurrence sur l'entier n , des complexes d'anneaux augmentés, commutatifs, $W^{(n)}(R)$ et $\bar{W}^{(n)}(R)$, comme suit :

$$\bar{W}^0(R) = R, \quad W^{(n+1)}(R) = W(\bar{W}^{(n)}(R)), \quad \bar{W}^{(n+1)}(R) = \bar{W}(\bar{W}^{(n)}(R)).$$

On posera $\bar{W}_N^{(n+1)}(R) = \bar{W}_N(\bar{W}^{(n)}(R))$.

Soit alors A une DGA-algèbre anticommutative, et $f : A \rightarrow R_N$ un DGA-homomorphisme. Grâce à la proposition 3, on définit par récurrence des DGA-homomorphismes

$$\bar{g}^{(n)} : \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \rightarrow \bar{W}_N^{(n)}(R),$$

en convenant que $\bar{g}^{(n+1)}$ est l'homomorphisme que le théorème 1 attache au DGA-homomorphisme $\bar{g}^{(n)}$. Si de plus f induit un isomorphisme de $H(A)$ sur $H(R_N)$, et si $H_0(R_N) \cong \wedge$, alors une application répétée du théorème 1 montre que, pour tout n , $\bar{g}^{(n)}$ induit un isomorphisme de $H(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$ sur $H(\bar{W}_N^{(n)}(R))$.

Appliquons ceci au cas où A est l'algèbre $Z(\pi)$ d'un groupe abélien π , et où R est l'unique complexe d'anneaux tel que $R_q = Z(\pi)$ pour tout q (les s_i et les d_i étant l'application identique); alors $R_N = A$. Prenons pour f l'application identique. On constate, par un calcul direct et élémentaire, que l'application $\bar{g}^{(1)}$ de $\bar{\mathcal{B}}(A)$ dans $\bar{W}_N(R)$ est un isomorphisme (chacune de ces DGA-algèbres s'identifie au complexe non homogène, normalisé, du groupe discret π). A partir de là, on est dans les conditions d'application du théorème 1; on trouve donc des DGA-homomorphismes naturels

$$\bar{g}^{(n)} : \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(Z(\pi)) \rightarrow \bar{W}_N^{(n)}(R)$$

qui, par passage à l'homologie, donnent des isomorphismes.

Il reste à montrer que l'algèbre d'homologie $H(\bar{W}_N^{(n)}(R))$ s'identifie, d'une manière naturelle, à l'algèbre d'homologie $H_*(\pi, n; Z)$ d'un espace du type $\mathcal{K}(\pi, n)$; et que, plus généralement, pour tout anneau $\wedge$ de coefficients, $H(\bar{W}_N^{(n)}(R) \otimes \wedge)$ s'identifie canoniquement à $H_*(\pi, n; \wedge)$. Cela va résulter de la comparaison du complexe $\bar{W}^{(n)}(R)$ au complexe d'Eilenberg-MacLane $K(\pi, n)$.

5.- Comparaison de $K(\pi, n)$ avec la construction $\bar{W}$ itérée. (Cf. le mémoire cité en [1] dans l'Exposé 12).

Soit π un groupe abélien (noté additivement); Δ_q désignant le

"simplexe" $\{0, 1, \dots, q\}$ de dimension q , nous notons $C^n(\Delta_q; \pi)$ le groupe des n -cochaînes alternées de Δ_q . On peut le décrire comme le groupe des fonctions u , à valeurs dans π , définies pour chaque suite croissante $\{m_0, \dots, m_n\}$ d'entiers ≥ 0 et $\leq q$, et nulle quand ces entiers ne sont pas tous distincts; le groupe $C^n(\Delta_q; \pi)$ est nul pour $n > q$. L'opérateur cobord

$$\delta : C^n(\Delta_q; \pi) \rightarrow C^{n+1}(\Delta_q; \pi)$$

est défini par

$$(\delta u)(m_0, \dots, m_{n+1}) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j (m_0, \dots, \hat{m}_j, \dots, m_{n+1}) .$$

On a $\delta\delta = 0$. On note $Z^n(\Delta_q; \pi)$ le noyau de $\delta : C^n(\Delta_q; \pi) \rightarrow C^{n+1}(\Delta_q; \pi)$, et $B^n(\Delta_q; \pi)$ l'image de $\delta : C^{n-1}(\Delta_q; \pi) \rightarrow C^n(\Delta_q; \pi)$. Il est classique que $B^n(\Delta_q; \pi) = Z^n(\Delta_q; \pi)$ pour $n \geq 1$.

Considérons la suite exacte

$$(1) \quad 0 \rightarrow Z^n(\Delta_q; \pi) \rightarrow C^n(\Delta_q; \pi) \xrightarrow{\delta} Z^{n+1}(\Delta_q; \pi) \rightarrow 0 .$$

Définissons $\tau : Z^{n+1}(\Delta_q; \pi) \rightarrow C^n(\Delta_q; \pi)$ par

$$(\tau u)(m_0, \dots, m_n) = u(0, m_0, \dots, m_n) .$$

Un calcul immédiat montre que $\delta\tau$ est l'identité. La suite exacte (1) et τ définissent une décomposition directe

$$(2) \quad C^n(\Delta_q; \pi) \approx Z^n(\Delta_q; \pi) + Z^{n+1}(\Delta_q; \pi) ,$$

à savoir : toute n -cochaîne de Δ_q s'écrit d'une seule manière comme somme d'un n -cocycle et d'une n -cochaîne nulle sur toute suite $(m_0, \dots, m_n)$ telle que $m_0 = 0$.

On définit des homomorphismes (de groupes abéliens)

$$\partial_i : C^n(\Delta_{q+1}; \pi) \rightarrow C^n(\Delta_q; \pi) , \quad 0 \leq i \leq q+1 ,$$

$$s_i : C^n(\Delta_q; \pi) \rightarrow C^n(\Delta_{q+1}; \pi) , \quad 0 \leq i \leq q ,$$

comme suit : soit $\lambda_i : \{0, \dots, q\} \rightarrow \{0, \dots, q+1\}$ l'application telle que $\lambda_i(j) = j$ pour $j < i$, $\lambda_i(j) = j+1$ pour $j \geq i$; soit $\eta_i : \{0, \dots, q+1\} \rightarrow \{0, \dots, q\}$ l'application telle que $\eta_i(j) = j$ pour $j \leq i$, $\eta_i(j) = j-1$

pour $j > i$. Alors ∂_i est défini par

$$(\partial_i u)(m_0, \dots, m_n) = u(\lambda_i(m_0), \dots, \lambda_i(m_n)) ,$$

et s_i est défini par

$$(s_i u)(m_0, \dots, m_n) = u(\eta_i(m_0), \dots, \eta_i(m_n)) .$$

Il est immédiat que les ∂_i et les s_i satisfont aux identités du paragraphe 1 de l'Exposé 12. De plus, ils induisent des applications (encore notées ∂_i , resp. s_i) de $Z^n(\Delta_{q+1}; \pi)$ dans $Z^n(\Delta_q; \pi)$, resp. de $Z^n(\Delta_q; \pi)$ dans $Z^n(\Delta_{q+1}; \pi)$.

Proposition 4.- L'application composée

$$Z^{n+1}(\Delta_{q+1}; \pi) \xrightarrow{\tau} C^n(\Delta_{q+1}; \pi) \xrightarrow{\partial_0} C^n(\Delta_q; \pi)$$

est un isomorphisme.

En effet, on a une correspondance biunivoque entre les n -cochaînes de Δ_q , et les n -cochaînes de Δ_{q+1} nulles sur toute suite $(m_0, \dots, m_n)$ telle que $m_0 = 0$.

Définition : les groupes $C^n(\Delta_q; \pi)$ et $Z^n(\Delta_q; \pi)$ étant désormais notés multiplicativement, soit $K_q(\pi, n)$ l'algèbre du groupe $Z^n(\Delta_q; \pi)$ à coefficients dans l'anneau Z des entiers, et soit $L_q(\pi, n+1)$ l'algèbre du groupe $C^n(\Delta_q; \pi)$ à coefficients dans Z . Ce sont des algèbres commutatives à élément unité, et la première s'identifie à une sous-algèbre de la seconde. Les homomorphismes ∂_i et s_i définis ci-dessus induisent des homomorphismes d'algèbres

$$\partial_i : K_{q+1}(\pi, n) \rightarrow K_q(\pi, n) \quad , \quad \partial_i : L_{q+1}(\pi, n+1) \rightarrow L_q(\pi, n) \quad ,$$

$$s_i : K_q(\pi, n) \rightarrow K_{q+1}(\pi, n) \quad , \quad s_i : L_q(\pi, n+1) \rightarrow L_{q+1}(\pi, n) \quad .$$

Ainsi $K(\pi, n) = \sum_{q \geq 0} K_q(\pi, n)$ et $L(\pi, n+1) = \sum_{q \geq 0} L_q(\pi, n+1)$ sont des complexes

d'anneaux ; le premier s'identifie à un sous-complexe du second ; ils sont commutatifs. Ces complexes sont munis d'une augmentation évidente, qui envoie chaque élément de la base de $K_q(\pi, n)$ (resp. de $L_q(\pi, n+1)$) dans l'élément $1 \in Z$.

L'application τ définit une application biunivoque

$$K(\pi, n+1) \rightarrow L(\pi, n+1) \quad ,$$

qui permet désormais d'identifier le premier de ces complexes à un sous-complexe du second. La décomposition directe (2) montre que $L(\pi, n+1)$ s'identifie alors au produit $K(\pi, n) \times K(\pi, n+1)$; d'une façon précise, on a $L_q(\pi, n+1) \approx K_q(\pi, n) \otimes K_q(\pi, n+1)$ comme algèbre, et on vérifie que

$$s_i(1_q \times x) = 1_{q+1} \times (s_i x) \text{ pour } x \in K_q(\pi, n+1) ,$$

$$\partial_i(1_{q+1} \times x) = 1_q \times (\partial_i x) \text{ pour } x \in K_{q+1}(\pi, n+1) \text{ et } i > 1 ,$$

et ∂_0 induit un isomorphisme de $K_{q+1}(\pi, n+1)$ sur $L_q(\pi, n+1)$: cela résulte de la proposition 4. Enfin, l'augmentation est un isomorphisme $K_0(\pi, n+1)$ sur Z . Ainsi,

$$(K(\pi, n), K(\pi, n+1), L(\pi, n+1))$$

est une construction satisfaisant à la condition (W) (Exposé 12, p. 12-04).

En vertu de l'unicité de la construction W sur un complexe R donné (Exposé 12, p. 12-05), on voit qu'on a un isomorphisme naturel

$$K(\pi, n+1) \approx \bar{W}(K(\pi, n)) ,$$

d'où, par récurrence sur n ,

$$(3) \quad \bar{W}^{(n)}(K(\pi, 0)) \approx K(\pi, n) .$$

D'ailleurs $K(\pi, 0)$ est l'unique complexe R tel que $R_q = Z(\pi)$ pour tout q . En combinant l'isomorphisme (3) et l'homomorphisme $\bar{g}^{(n)q}$ du paragraphe 3, on obtient des DGA-homomorphismes naturels

$$(4) \quad \bar{\beta}^{(n)}(Z(\pi)) \rightarrow K_N(\pi, n)$$

qui, par passage à l'homologie, donnent des isomorphismes. La notation $K_N(\pi, n)$ désigne le complexe normalisé de $K(\pi, n)$; on sait que $H(K_N(\pi, n)) \approx H(K(\pi, n))$.

Il est classique [2] que le complexe $K(\pi, n)$ est isomorphe à un sous-complexe minimal du complexe singulier de n'importe quel espace X tel que $\pi_i(X) = 0$ pour $i \neq n$, $\pi_n(X) = \pi$; et que si X est un espace multiplicatif de Hopf (ce qu'on peut toujours supposer), alors la multiplication du complexe minimal de X induit la multiplication de $K(\pi, n)$ comme ci-dessus décrite (cf. [3]). Les algèbres d'homologie $H_*(X; \wedge)$ s'identifient donc aux algèbres d'homologie $H_*(K_N(\pi, n) \otimes \wedge)$. On a finalement obtenu des isomorphismes naturels

$$H_*(\bar{\beta}^{(n)}(\wedge(\pi))) \approx H_*(\pi, n; \wedge) .$$

Il est aisé de voir qu'ils commutent avec la suspension.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] H. CARTAN - S. EILENBERG - Homological algebra (Princeton Univ. Press, à paraître) ; voir chapitre XV, Proposition 3.1.
 - [2] S. EILENBERG - S. MAC LANE - Relations between homology and homotopy groups of spaces, I (Ann. of Math. 46, 1945, p. 480-509).
 - [3] S. MAC LANE - Homology products in $K(\pi, n)$ (Proc. Amer. Math. Soc., 5 1954, p. 41-51).
-