J. P. Serre

Groupes d'homotopie des bouquets de sphères

Séminaire Henri Cartan, tome 7, n° 2 (1954-1955), exp. n° 20, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_2_A10_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1954/55.

GROUPES D'HOMOTOPIE DES BOUQUETS DE SPHÈRES.

(Exposés de J.P. SERRE, 2.5.1955 et 9.5.1955).

1.- Opérations homotopiques.

Soient n et p deux entiers. Pour tout espace X, donnons-nous une application $f : \pi_n(X) \longrightarrow \pi_p(X)$, commutant avec les applications continues $X \longrightarrow Y$. La collection des applications f est appelée une opération homotopique à une variable (cf.[1]) ; c'est une notion analogue à celle d'opération cohomologique, étudiée dans les exposés 14 à 16.

Il est facile de déterminer toutes les opérations homotopiques à une variable. En effet, soit $i_n \in \pi_n(S_n)$ la classe d'homotopie de l'application identique : $S_n \longrightarrow S_n$; si f est une opération homotopique, $f(i_n) = \alpha$ est un élément bien déterminé de $\pi_p(S_n)$, et si β est un élément quelconque de $\pi_n(X)$, on a :

$$f(\beta) = f \circ \beta(i_n) = \beta \circ f(i_n) = \beta \circ \alpha \ .$$

Inversement, si α est un élément quelconque de $\pi_p(S_n)$, l'application : $\beta \longrightarrow \beta \circ \alpha$ est une opération homotopique à une variable. Ainsi, l'ensemble des opérations homotopiques à une variable est en correspondance naturelle avec l'ensemble des éléments du groupe $\pi_p(S_n)$; la sphère S_n joue donc un rôle universel pour ces opérations (de même que $K(\pi, n)$ joue un rôle universel pour les opérations cohomologiques à une variable).

On définit de la même manière les opérations homotopiques à plusieurs variables. Par exemple, une opération à 2 variables est la donnée, pour tout espace X, d'une application f de $\pi_n(X) \times \pi_m(X)$ dans $\pi_p(X)$, commutant aux applications continues (n, m et p étant des entiers donnés). Ici, l'espace universel est l'espace $S_n \vee S_m$ qui est réunion de deux sphère S_n et S_m ayant un point en commun ("bouquet" de sphères). En effet, la donnée d'un couple d'éléments $\beta \in \pi_n(X)$, $\gamma \in \pi_m(X)$ équivaut à la donnée d'une classe d'applications

$$\beta \vee \gamma : S_n \vee S_m \longrightarrow X \qquad ;$$

d'autre part, les injections canoniques $i_n : S_n \longrightarrow S_n \vee S_m$ et

$i_m : S_m \longrightarrow S_n \vee S_m$ peuvent être regardées comme des éléments de $\pi_n(S_n \vee S_m)$ et de $\pi_m(S_n \vee S_m)$ respectivement ; il s'ensuit que $f(i_n , i_m)$ est un élément bien défini $\alpha \in \pi_p(S_n \vee S_m)$, et que, pour tout couple $\beta \in \pi_n(X)$, $\gamma \in \pi_m(X)$, on a :

$$f(\beta , \gamma) = (\beta \vee \gamma) \circ \alpha .$$

Plus généralement, les opérations homotopiques à k variables

$$f : \pi_{n_1}(X) \times \ldots \times \pi_{n_k}(X) \longrightarrow \pi_p(X)$$

sont en correspondance biunivoque avec les éléments de $\pi_p(S_{n_1} \vee \ldots \vee S_{n_k})$. Nous verrons au paragraphe 2 comment ce dernier groupe peut être calculé en fonction des groupes d'homotopie de sphères.

<u>Exemple d'opération homotopique</u> : <u>le produit de Whitehead</u>. Considérons $S_n \vee S_m$ comme plongé dans le produit direct $S_n \times S_m$; nous obtenons ainsi une suite exacte :

$$\ldots \longrightarrow \pi_p(S_n \vee S_m) \longrightarrow \pi_p(S_n \times S_m) \longrightarrow \pi_p(S_n \times S_m , S_n \vee S_m) \longrightarrow \ldots$$

En fait, en tenant compte de ce que $\pi_p(S_n \times S_m) = \pi_p(S_n) \oplus \pi_p(S_m)$, on voit facilement que la suite exacte précédente se décompose, et l'on obtient un isomorphisme :

$$\pi_p(S_n \vee S_m) = \pi_p(S_n) \oplus \pi_p(S_m) \oplus \pi_{p+1}(S_n \times S_m , S_n \vee S_m) .$$

Les deux premiers facteurs sont plongés par les injections i_n et i_m ; le troisième facteur est plongé par l'opérateur bord

$$d : \pi_{p+1}(S_n \times S_m , S_n \vee S_m) \longrightarrow \pi_p(S_n \vee S_m) .$$

Mais le théorème d'Hurewicz relatif montre que $\pi_q(S_n \times S_m , S_n \vee S_m)$ est nul pour $q < n+m$, et que $\pi_{n+m}(S_n \times S_m , S_n \vee S_m)$ est cyclique infini, engendré par $i_n \times i_m$; en appliquant l'opérateur d à $i_n \times i_m$, on trouve un élément de $\pi_{n+m-1}(S_n \vee S_m)$ que nous noterons $[i_n , i_m]$. D'après ce qui a été dit plus haut, l'élément $[i_n , i_m]$ définit une opération homotopique à deux variables, que nous noterons

$$(\beta , \gamma) \longrightarrow [\beta , \gamma] \quad ;$$ c'est le <u>produit de Whitehead</u>.

Par définition, on a $[\beta , \gamma] \in \pi_{n+m-1}(X)$ si $\beta \in \pi_n(X)$, $\gamma \in \pi_m(X)$. Si β est représenté par $b : I^n \longrightarrow X$ tel que $b(\dot{I}^n) = x_0$, et si γ

est représenté par $c : I^m \longrightarrow X$, alors $[\beta , \gamma]$ est représenté par l'application u de $\dot{I}^{n+m} = S_{n+m-1}$ dans X définie par la formule :

$$u(x , y) = b(x) \qquad \text{si} \qquad x \in I^n \text{ et } y \in \dot{I}^m ,$$
$$= c(y) \qquad \text{si} \qquad x \in \dot{I}^n \text{ et } y \in I^m .$$

Il en résulte aisément que $[\beta , \gamma]$ est bilinéaire. De plus, un calcul d'orientations montre que $[\beta , \gamma] = (-1)^{nm} [\gamma , \beta]$, et nous verrons plus loin que $[\beta , \gamma]$ vérifie l'identité de Jacobi (modifiée par des signes convenables). Le produit de Whitehead possède donc des propriétés tout à fait analogues à celles du crochet d'une algèbre de Lie.

2.- Le théorème de Hilton.

Ce théorème (démontré dans [3]) exprime $\pi_p(S_{n_1} \vee \ldots \vee S_{n_k})$, $n_1 \geq 2$, ... , $n_k \geq 2$, comme une somme directe de groupes d'homotopie de sphères $\pi_p(S_m)$. Chaque facteur se trouve plongé par un certain produit de Whitehead multiple. Nous allons d'abord décrire ces produits :

Définition des produits basiques. Nous définirons par récurrence sur w les produits basiques de poids w ; les produits basiques de poids 1 sont les éléments i_1 , ... , i_k , classes d'homotopie des injections canoniques $S_{n_1} \longrightarrow S_{n_1} \vee \ldots \vee S_{n_k}$, ... , $S_{n_k} \longrightarrow S_{n_1} \vee \ldots \vee S_{n_k}$; nous les ordonnons par la relation d'ordre $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Supposons maintenant définis et ordonnés les produits basiques de poids $< w$. Un produit basique de poids w sera alors un produit de Whitehead $[a , b]$, où a (resp. b) est un produit basique de poids u (resp. v) , avec $u + v = w$, $a < b$, et si b est lui-même défini comme $[c , d]$, on doit avoir $c \leq a$. Les produits de poids w sont ordonnés arbitrairement entre eux, et sont considérés comme strictement supérieurs aux produits basiques de poids $< w$.

Exemple. Si $k = 2$, et si l'on pose $x = i_1$, $y = i_2$, les produits basiques de poids ≤ 4 sont les suivants :

poids 1 : x , y
" 2 : $[x , y]$
" 3 : $[x, [x , y]]$, $[y, [x , y]]$
" 4 : $[x, [x, [x , y]]]$, $[y, [x, [x , y]]]$, $[y, [y, [x , y]]]$

Chaque produit basique a peut être considéré comme un élément de

$\pi_{n_a}(S_{n_1} \vee \ldots \vee S_{n_k})$, n_a désignant un entier facile à déterminer. L'application $\beta \longrightarrow a \circ \beta$ est donc un homomorphisme f_a de $\pi_p(S_{n_a})$ dans $\pi_p(S_{n_1} \vee \ldots \vee S_{n_k})$; d'où un homomorphisme f de la somme directe $\sum_a \pi_p(S_{n_a})$ dans $\pi_p(S_{n_1} \vee \ldots \vee S_{n_k})$. Le résultat de Hilton s'énonce alors :

<u>Théorème. Pour tout entier</u> p , <u>l'homomorphisme</u> f <u>est un isomorphisme de</u> $\sum_a \pi_p(S_{n_a})$ <u>sur</u> $\pi_p(S_{n_1} \vee \ldots \vee S_{n_k})$.

On observera que les entiers n_a tendent vers $+\infty$; il s'ensuit que, pour chaque entier p , la somme directe $\sum_a \pi_p(S_{n_a})$ est <u>finie</u>. On a par exemple :

$$\pi_p(S_n \vee S_n) = \pi_p(S_n) \oplus \pi_p(S_n) \oplus \pi_p(S_{2n-1}) \oplus \pi_p(S_{3n-2}) \oplus \pi_p(S_{3n-2}) \quad \text{si}$$

$p < 4n-3$.

[Des résultats partiels de ce genre avaient d'ailleurs été déjà obtenus par G. Whitehead, J.H.C. Whitehead, Blakers-Massey, Moore, Chang, etc.]

<u>Démonstration du théorème de Hilton.</u>

Soit Ω l'espace des lacets sur l'espace $S_{n_1} \vee \ldots \vee S_{n_k}$; d'après un résultat de Bott et Samelson [2], $H_*(\Omega)$, munie de la structure d'algèbre définie par le produit de Pontrjagin, est <u>l'algèbre associative libre</u> engendrée par les éléments $x_1, \ldots, x_k$ correspondant aux sphères $S_{n_1}, \ldots, S_{n_k}$ par transgression. (La démonstration de Bott et Samelson consiste à expliciter la suite spectrale de l'espace des chemins sur $S_{n_1} \vee \ldots \vee S_{n_k}$; on pourrait également utiliser le théorème de Moore démontré dans l'exposé 3). Soit de même Ω_a l'espace des lacets sur S_{n_a} ; l'algèbre $H_*(\Omega_a)$ est une algèbre de polynomes à 1 générateur y_a de dimension $n_a - 1$. Si l'on désigne par T la limite inductive des produits finis des Ω_a , a parcourant l'ensemble des produits basiques, on voit que $H_*(T)$ admet pour base l'ensemble des éléments de la forme :

$$y_{a_1}^{m_1} \otimes \ldots \otimes y_{a_i}^{m_i} .$$

Chaque produit basique a définit, par passage aux espaces de lacets, une application multiplicative $g_a : \Omega_a \longrightarrow \Omega$; nous désignerons par x_a l'image de y_a par g_a. Puisque g_a est multiplicative, l'image de y_a^m par g_a est égale à x_a^m. Soit alors $g : T \longrightarrow \Omega$ l'application produit des applications g_a ; par passage à l'homologie, g transforme les $y_{a_1}^{m_1} \otimes \ldots \otimes y_{a_i}^{m_i}$ en les <u>monômes</u> $x_{a_1}^{m_1} \ldots x_{a_i}^{m_i}$. Admettons provisoirement que ces monômes forment une <u>base</u> de $H_*(\Omega)$. Alors $g_* : H_*(T) \longrightarrow H_*(\Omega)$ est une bijection ; comme les espaces T et Ω sont des H-espaces, ceci entraîne, en vertu du théorème de Moore, que $\widetilde{g}_* : H_*(\widetilde{T}) \longrightarrow H_*(\widetilde{\Omega})$ est bijectif, $\widetilde{T}$ et $\widetilde{\Omega}$ désignant les revêtements universels de T et de Ω respectivement (pour une démonstration directe, cf. [3]) ; appliquant alors le théorème d'Hurewicz relatif au mapping-cylinder de $\widetilde{g}$, on en conclut que $g_o : \pi_{p-1}(T) \longrightarrow \pi_{p-1}(\Omega)$ est bijectif pour tout p. Mais,

$$\pi_{p-1}(T) = \sum\nolimits_a \pi_p(S_{n_a}) \quad , \quad \pi_{p-1}(\Omega) = \pi_p(S_{n_1} \vee \ldots \vee S_{n_k}) \text{ ,}$$

et ces isomorphismes transforment g_o en f, comme on le vérifie immédiatement ; donc f est bijectif.

Ainsi, la démonstration sera achevée si nous montrons que les monômes $x_{a_1}^{m_1} \ldots x_{a_i}^{m_i}$ forment une base de $H_*(\Omega)$.

Calculons d'abord les x_a en fonction des générateurs $x_1, \ldots, x_k$ de $H_*(\Omega)$. De façon générale, soit X un espace quelconque, Ω son espace des lacets, et soit τ l'application composée des homomorphismes canoniques :

$$\pi_{p+1}(X) \longrightarrow \pi_p(\Omega) \longrightarrow H_p(\Omega) \quad .$$

D'après un résultat de Samelson [4], on a :

$$\tau[\beta, \gamma] = (-1)^p(\tau\beta . \tau\gamma - (-1)^{pq}\tau\gamma . \tau\beta) \quad \text{si } \beta \in \pi_{p+1}(X) \text{ ,} \; \gamma \in \pi_{q+1}(X) \text{ .}$$

Ceci nous fournit tout de suite la valeur des x_a : si l'on munit $H_*(\Omega)$ de l'opération $[x , y] = (-1)^p(x.y - (-1)^{pq}\, y.x)$, x_a n'est autre que le a-ième produit basique des $x_1 \ldots , x_k$.

Nous sommes ainsi ramenés à un problème purement algébrique : montrer que, si l'on forme les produits basiques x_a des générateurs d'une algèbre associative libre A, les monômes en les x_a forment une <u>base</u> de A. Dans le cas où le crochet $[x , y]$ est égal à $x.y - y.x$ (ce qui se produit si toutes les sphères considérées sont de dimension impaire), le résultat précédent est un théorème bien connu de Witt ; ceci montre que le nombre des monômes en les x_a de degré r donné est égal au rang du groupe formé des éléments homogènes de degré r de A. Il suffit donc, dans le cas où les n_i sont quelconques, de montrer que les monômes en question engendrent A ; c'est ce que fait Hilton [3], par un raisonnement direct, inspiré de raisonnements analogues de P. Hall et Magnus.

3. Applications.

Le théorème de Hilton détermine complètement la forme des opérations homotopiques à plusieurs variables ; il montre en particulier que ces opérations sont engendrées par les trois opérations élémentaires suivantes : addition, composition, produit de Whitehead.

Il fournit également une démonstration de l'identité de Jacobi :

$$(-1)^{pq}\,[[\beta, \gamma], \alpha] + (-1)^{qr}\,[[\gamma , \alpha], \beta] + (-1)^{rp}\,[[\alpha , \beta], \gamma] = 0$$

si $\quad \alpha \in \pi_p(X) , \quad \beta \in \pi_q(X) , \quad \gamma \in \pi_r(X)$.

En effet, d'après le paragraphe 1, il suffit de démontrer cette identité lorsque α , β , γ sont respectivement égaux aux éléments i_p , i_q , i_r de $\pi_*(S_p \vee S_q \vee S_r)$. Comme $[i_p, [i_q , i_r]]$ n'est pas un produit basique, il peut s'écrire sous la forme :

$$[i_p, [i_q , i_r]] = a\,[i_q, [i_p , i_r]] + b\,[i_r, [i_p , i_q]] + \delta \quad ,$$

où a et b sont des entiers, et où δ est une somme d'opérations homotopiques ne portant que sur deux des trois éléments i_p , i_q , i_r. La formule précédente étant universelle, on en déduit facilement que $\delta = 0$, et l'on détermine les valeurs de a et de b par un raisonnement homologique.

[D'autres démonstrations de l'identité de Jacobi ont été données par Nakaoka et Toda, Massey et Uehara, G. Whitehead].

Une autre application importante du théorème de Hilton est la définition des invariants de Hopf généralisés (cf. [3]) : soit

$$\Phi : \pi_p(S_n) \longrightarrow \pi_p(S_n \vee S_n)$$

l'application obtenue en identifiant en un point l'équateur de S_n. Si l'on compose Φ avec les projections de $\pi_p(S_n \vee S_n)$ sur ses différents facteurs $\pi_p(S_{2n-1})$, $\pi_p(S_{3n-2})$, ... , on obtient des homomorphismes :

$$H_0 \quad : \quad \pi_p(S_n) \longrightarrow \pi_p(S_{2n-1})$$

$$H_1 \, , \, H_2 \, , \, \ldots \quad : \quad \pi_p(S_n) \longrightarrow \pi_p(S_{3n-2})$$

et l'on a, pour tout $\alpha \in \pi_p(S_n)$:

$$\Phi(\alpha) = i_1 \circ \alpha + i_2 \circ \alpha + [i_1 \, , \, i_2] \circ H_0 \alpha + [i_1, [i_1 \, , \, i_2]] \circ H_1 \alpha + \ldots \quad .$$

Si X est un espace quelconque, et si β et γ sont deux éléments de $\pi_n(X)$, on déduit de la formule précédente que l'on a :

$$(\beta + \gamma) \circ \alpha = \beta \circ \alpha + \gamma \circ \alpha + [\beta, \gamma] \circ H_0 \alpha + [\beta, [\beta, \gamma]] \circ H_1 \alpha + \ldots \quad .$$

On voit ainsi quelle est la "déviation de l'additivité" de l'opération $\beta \longrightarrow \beta \circ \alpha$.

On trouvera dans [3] diverses propriétés des H_i ; le plus intéressant de ces opérateurs est H_0 , qui généralise directement l'invariant de Hopf classique. On verra d'ailleurs, dans un exposé ultérieur de Moore (Exp. 22), qu'il est en rapport étroit avec la suspension de Freudenthal.

BIBLIOGRAPHIE

[1]. A.L.Blakers and W.S.Massey. Products in homotopy theory. Ann. of Maths., vol. 58, 1953, p. 295-324.

[2]. R.Bott and H. Samelson. On the Pontrjagin product in spaces of paths. Comm. Math. Helv., vol. 27, 1953, p. 320-337.

[3]. P.J.Hilton. On the homotopy groups of the union of spheres. J. London Math. Soc., vol. 30, 1955, p. 154-171.

[4]. H. Samelson. A connection between the Whitehead and the Pontrjagin product. Amer. J. of Maths., vol. LXXV, 1953, p. 744-752.
