Séminaire Henri Cartan

H. Cartan

Puissances divisées

Séminaire Henri Cartan, tome 7, n° 1 (1954-1955), exp. n° 7, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_1_A7_0>

PUISSANCES DIVISÉES

(Exposé de H. CARTAN, 3-1-1955)

Préambule. Dans une algèbre graduée commutative sur le corps des rationnels, considérons, pour chaque entier k, l'application $\gamma_k : x \longrightarrow x^k/k!$ Elle jouit des propriétés suivantes :

(1) $\gamma_0(x) = 1$, $\gamma_1(x) = x$, $\deg \gamma_k(x) = k.\deg(x)$.

(2) $\gamma_k(x)\,\gamma_h(x) = (k,h)\,\gamma_{k+h}(x)$, en notant (k,h) le coefficient binominal $\frac{(k+h)!}{k!h!}$

(3) $\gamma_k(x+y) = \sum_{i+j=k} \gamma_i(x)\,\gamma_j(y)$ (formule de Leibniz)

(4) $\gamma_k(xy) = k!\,\gamma_k(x)\,\gamma_k(y) = x^k\,\gamma_k(y) = \gamma_k(x)y^k$

(5) $\gamma_k(\gamma_h(x)) = (h,h-1)(2h,h-1)\ldots((k-1)h,h-1)\,\gamma_{kh}(x)$.

On vérifie (5) en montrant, par récurrence sur k, que le coefficient du second membre est égal à $\frac{(kh)!}{k!(h!)^k}$, qui est donc entier.

Enfin, si l'algèbre est munie d'une différentielle d, on a

(6) $d\,\gamma_k(x) = (dx)\,\gamma_{k-1}(x)$ pour $k \geqslant 1$.

1.- Une propriété de la bar construction.

On ne fait aucune hypothèse sur l'anneau de base Λ.

Théorème 1 : Soit A une DGA-algèbre anticommutative (au sens strict, i.e. : $a^2 = 0$ pour tout $a \in A$ de degré impair). Pour chaque $x \in \overline{\mathcal{B}}(A)$ de degré pair $\geqslant 2$, il existe une suite d'éléments $\gamma_k(x) \in \overline{\mathcal{B}}(A)$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ qui satisfont à (1) et (6), où dx désigne la différentielle de $x \in \overline{\mathcal{B}}(A)$ au sens de l'algèbre acyclique $\mathcal{B}(A)$. Les éléments $\gamma_k(x)$ sont déterminés de manière unique par ces conditions ; ils ont un caractère fonctoriel ; ils satisfont en outre à (2),(3),(5), et à

(4') $\begin{cases} \text{pour } k \geqslant 2,\ \gamma_k(xy) = 0 \text{ si } \deg(x) \text{ et } \deg(y) \text{ impairs,} \\ \gamma_k(xy) = x^k\,\gamma_k(y) \text{ si } \deg(y) \text{ pair} \geqslant 2 \text{ et } \deg(x) \text{ pair.} \end{cases}$

Démonstration : d'après l'Exp. 4, th.4, (iv), l'algèbre $\overline{\mathcal{B}}(A)$ est

anticommutative au sens strict. Donc le produit tensoriel $A \otimes \overline{\mathcal{B}}(A) = \mathcal{B}(A)$ est une algèbre anticommutative au sens strict ; par suite, si $x \in \overline{\mathcal{B}}(A)$ est de degré pair, $(dx)^2$ est nul.

Cela posé, la propriété (B) (Exp. 3, th. 3), qui caractérise la bar construction, va donner la clef de la démonstration.
Soit $x \in \overline{\mathcal{B}}_{2q}(A)$, $q \geqslant 1$; l'existence et l'unicité de $\gamma_k(x)$ satisfaisant à (1) et (6) se montrent par récurrence sur k , étant triviales pour $k = 0$ et $k = 1$. Si elles sont vraies pour $k - 1$ $(k \geqslant 2)$, la détermination de $\gamma_k(x)$ revient à celle d'un $y \in \overline{\mathcal{B}}_{2kq}(A)$ tel que dy soit un élément connu $z = (dx)\, \gamma_{k-1}(x)$; un tel y existe et est unique, pourvu que z soit un cycle ; or, d'après l'hypothèse de récurrence, $dz = (dx)^2 \gamma_{k-2}(x)$, qui est nul puisque $(dx)^2 = 0$.

Les applications γ_k ont un caractère fonctoriel : si $f : A \longrightarrow A'$ est un DGA-homomorphisme, l'application $g : \mathcal{B}(A) \longrightarrow \mathcal{B}(A')$ définie par f satisfait à $g(\gamma_k(x)) = \gamma_k(g(x))$ pour $x \in \overline{\mathcal{B}}_{2q}(A)$. Démonstration par récurrence sur k : si c'est vrai pour $k - 1$, les deux membres ont des différentielles égales, donc sont égaux d'après la propriété (B) de la bar construction.

La propriété (2) se vérifie par récurrence sur $k + h$, étant triviale pour $k + h = 0$ ou 1 . On prouve l'égalité des différentielles, qui résulte de l'hypothèse de récurrence, et de la relation classique :
$(k-1,h) + (k,h-1) = (k,h)$. La propriété (3) se vérifie aussi par récurrence sur k , en différentiant. De même pour (4') : si les degrés de x et y sont impairs, la différentiation nous ramène au cas $k = 2$, et dans ce cas, par différentiation, on est ramené à vérifier que $d(xy).(xy) = 0$, ce qui résulte des relations $x^2 = 0$ et $y^2 = 0$. Si $\deg(y)$ est pair $\geqslant 2$ et $\deg(x)$ pair, (4') se prouve encore en différentiant, compte tenu de la relation $y.\, \gamma_{k-1}(y) = k\, \gamma_k(y)$ qui résulte de (2) . Enfin, (5) est triviale pour $k = 1$ et se prouve par récurrence sur k en différentiant : il suffit d'appliquer (2) au calcul du produit $\gamma_{h-1}(x)\, \gamma_{kh-h}(x)$.

2.- L'algèbre des polynômes divisée.-

Les $\gamma_k(x)$ définis dans la bar construction $\overline{\mathcal{B}}(A)$ s'appellent les puissances divisées de x . Cette dénomination est justifiée par la relation

$$x^k = k!\, \gamma_k(x)$$

qui résulte aussitôt de (2) .

Prenons un exemple important : soit $A = E(x\ ;\ 2q-1)$ l'algèbre extérieure à un générateur x de degré impair $2q-1$. Introduisons le module $P(y\ ;\ 2q)$ ayant la base suivante : $y_o = 1$, $y_1 = y$, y_2 , ... , y_k , ... dans les degrés 0 , $2q$, $4q$, ... , $2kq$, ... Sur le produit tensoriel $A \otimes P(y\ ;\ 2q)$ mettons la différentielle

(7) $\quad dx = 0$, $\quad dy_k = xy_{k-1}$, $\quad$ d'où $\quad d(xy_k) = 0$

Il est immédiat que les xy_k $(k \geqslant 0)$ forment une base des cycles, et que tout cycle est le bord d'un unique élément de $P(y\ ;\ 2q)$. La propriété caractéristique de la bar construction de A est donc vérifiée ; il s'ensuit que $P(y\ ;\ 2q)$ est muni d'une structure d'algèbre, celle de $\overline{\mathcal{B}}(A)$. La relation (7), comparée à (6), montre que $y_k = \gamma_k(y)$. Alors (2) donne la multiplication dans $P(y\ ;\ 2q)$: $y_k y_h = (k,h) y_{k+h}$. Et (5) détermine les puissances divisées dans $P(y\ ;\ 2q)$:

(8) $\quad \gamma_k(y_h) = (h,h-1)(2h,h-1) \ \ldots \ ((k-1)h,h-1)\ y_{kh}$.

L'algèbre $P(y\ ;\ 2q)$, munie de ce système de γ_k , s'appelle l'<u>algèbre des polynômes divisée</u> (à un générateur y de degré $2q$) .

3.- <u>Autres exemples</u>.

Dans l'exemple précédent, y n'est autre que $[x]$, déduit de $x \in A$ par l'application s qui définit la suspension. Plus généralement :

<u>Soit</u> A <u>une DGA-algèbre anticommutative au sens strict, et soit</u> $a \in A_{2q-1} (q \geqslant 1)$; <u>dans</u> $\overline{\mathcal{B}}(A)$, <u>on a</u>

(9) $\quad \gamma_k([a]) = [a\ ,\ \ldots\ ,\ a] \quad (k \text{ fois})$.

Démonstration : par récurrence sur k , on doit vérifier que

$$\gamma_k([a]) = s(a\ \gamma_{k-1}([a]))\ .$$

Pour cela, on différentie ; on doit prouver que

$$d\,[a].\ \gamma_{k-1}([a]) = a\ \gamma_{k-1}([a]) - sd(a\ \gamma_{k-1}([a]))$$

ou encore $\quad [da].\ \gamma_{k-1}([a]) = sd(a\ \gamma_{k-1}([a]))$,

ou, en différentiant :

$$(da)\ \gamma_{k-1}([a]) - [da].d\ \gamma_{k-1}([a]) = d(a\ \gamma_{k-1}([a]))\ ,$$

ce qui revient à $d[a].d\ \gamma_{k-1}([a]) = 0$. Or c'est vrai, puisque le carré de $d\,[a]$ est nul, $d\,[a]$ étant de degré impair.

On démontre de même (c'est un peu plus compliqué) : <u>si</u> $a \in A$ <u>et</u> $b \in A$ <u>sont de degrés pairs</u> $\geqslant 0$, <u>on a, dans</u> $\overline{\mathcal{B}}(A)$,

(10) $\gamma_k([a,b]) = [a,b,\dots,a,b]$ (dans le crochet, on a k fois le couple a,b) .

4.- Définition générale des puissances divisées.

Toutes les algèbres qu'on considérera désormais sont graduées et anticommutatives au sens strict. Etant donnée une telle algèbre N , on dit que N est munie d'un système de puissances divisées si on a attaché à chaque $x \in N$ de degré pair $\geqslant 2$, une suite d'éléments $\gamma_k(x) \in N$ ($k = 0 , 1 , 2 , \dots$) satisfaisant à (1), (2), (3) et (4') . (On ne pose pas la condition (5)) . Si de plus N est sous-algèbre graduée d'une algèbre différentielle graduée M (anticommutative au sens strict), on dit que les puissances divisées de N sont compatibles avec la différentielle d de M si la condition (6) est satisfaite.

Comme on l'a déjà observé, (2) entraîne :

(11) $x.\gamma_{k-1}(x) = k\gamma_k(x)$, d'où $x^k = k!\,\gamma_k(x)$.

(3) entraîne :

(12) $$\gamma_k(x_1 + \dots + x_n) = \sum_{k_1+\dots+k_n=k} \gamma_{k_1}(x_1) \dots \gamma_{k_n}(x_n) .$$

(4') entraîne que (4) a lieu chaque fois que $\deg(x)$ et $\deg(y)$ sont pairs $\geqslant 2$. Enfin, (6) entraîne que si x est un cycle, alors $\gamma_k(x)$ est un cycle.

Théorème 2 : Soient B et C deux sous-algèbres graduées de l'algèbre N (anticommutative au sens strict), telles que l'application canonique $B \otimes C \longrightarrow N$ soit biunivoque. Etant donné, sur chacune des algèbres B et C , un système de puissances divisées, il existe sur N un système de puissances divisées qui les prolonge, et un tel système est unique. Si de plus les puissances divisées de B et de C sont compatibles avec la différentielle d'une algèbre M (dont N est sous-algèbre), il en est de même des puissances divisées de N .

Démonstration : l'unicité résulte aussitôt de (3) et(4') . D'une façon précise, un élément de $B_q \otimes C_r$ ($q+r$ pair $\geqslant 2$) s'écrit sous la forme $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} b_i c_i$, et l'on doit avoir, pour $k \geqslant 2$,

(13) $$\gamma_k\Big(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} b_i c_i\Big) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} b_{i_1} c_{i_1} \dots b_{i_k} c_{i_k} \quad \text{si } q \text{ impair}$$

(14) $$\gamma_k\Big(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} b_i c_i\Big) = \sum_{k_1+\dots+k_n=k} (b_1)^{k_1} \dots (b_n)^{k_n} \gamma_{k_1}(c_1) \dots \gamma_{k_n}(c_n)$$

si r pair $\geqslant 2$,

et une formule analogue (14') si q pair $\geqslant 2$ (si q et r sont tous deux pairs $\geqslant 2$, les formules (14) et (14') sont d'accord). Pour prouver l'existence, nous devons d'abord montrer que les valeurs des seconds membres de (13), (14), et (14') ne dépendent que de l'élément

$$\sum_i b_i c_i = \sum_i b_i \otimes c_i \in B_q \otimes C_r .$$

Notons provisoirement $f(b_1 , c_1 , \dots , b_n , c_n)$ le second membre de (13), resp. (14), resp. (14'). Eu égard à la définition d'un produit tensoriel, on doit montrer trois choses :

(i) $f(\lambda b_1, c_1, b_2, c_2, \dots, b_n, c_n) = f(b_1, \lambda c_1, b_2, c_2, \dots, b_n, c_n)$;

(ii) si $b_1 = b' + b''$, on a

$f(b_1, c_1, b_2, c_2, \dots) = f(b', c_1, b'', c_1, b_2, c_2, \dots)$;

(iii) si $c_1 = c' + c''$, on a

$f(b_1, c_1, b_2, c_2, \dots) = f(b_1, c', b_1, c'', b_2, c_2, \dots)$.

Or le point (i) est évident. La vérification de (ii) se ramène à $(c_1)^2 = 0$ dans le cas de (13) , et, dans le cas de (14), à

$$\sum_{k'+k''=k_1} b'^{k'} b''^{k''} \gamma_{k'}(c) \gamma_{k''}(c) = (b'+b'')^{k_1} \gamma_{k_1}(c)$$

ce qui résulte de (2). Enfin, la vérification de (iii), dans le cas de (14), se ramène à

$$\sum_{k'+k''=k_1} b^{k'} b^{k''} \gamma_{k'}(c') \gamma_{k''}(c'') = b^k \gamma_k(c' + c'')$$

qui résulte de (3) .

Il est ainsi prouvé que les formules (13),(14) et (14') définissent sans ambigüité les γ_k sur chacun des sous-modules $B_q \otimes C_r$ ($q+r$ pair $\geqslant 2$), et par suite, d'après (3), sur leur somme directe. Les γ_k ainsi définis satisfont évidemment à (3). Ils satisfont à (2) : c'est évident si x est de la forme bc ; et si (2) est vérifié par x et par y , il l'est par la somme $x+y$, en vertu de (3), et de la relation $(k,h) = \sum (i,i')(j,j')$ étendue aux systèmes (i,i',j,j') tels que $i+j=k$, $i'+j'=h$. La condition (4') est vérifiée si x a la forme bc et y la forme $b'c'$ (vérification facile) ; si elle l'est pour un produit $x'y$ et pour un produit $x''y$, elle l'est pour $(x'+x'')y$, d'après un calcul ci-dessus ; si elle l'est pour un produit xy' et pour un produit xy'' , elle l'est pour $x(y'+y'')$; donc elle est vérifiée

quels que soient x et y .

Enfin, supposons que (6) soit vérifié quand $x \in B$ et quand $x \in C$; alors, pour $b \in B$ et $c \in C$, on a $d\,\gamma_k(bc) = d(bc) \cdot \gamma_{k-1}(bc)$; car si b et c sont de degrés impairs tout revient à voir que le produit de $d(bc)$ et de bc est nul (ce qui résulte de $b^2 = 0$ et $c^2 = 0$) ; et si b et c sont de degrés pairs ($\deg(c) \geqslant 2$) , cela résulte de la relation $c.\gamma_{k-1}(c) = k\,\gamma_k(c)$. Enfin, si (6) est vérifié par des x_i , il l'est par leur somme : il suffit d'utiliser (3) .

Ceci achève la démonstration du théorème 2 .

5.- Puissances divisées dans une construction.

Soit (A,N,M) une construction anticommutative (au sens strict). Supposons que chacune des algèbres A et N soit munie d'un système de puissances divisées, compatible avec la différentielle de l'algèbre $M = A \otimes N$. D'après le théorème 2 , il existe sur M un système de puissances divisées, compatible avec la différentielle de M , qui prolonge les deux systèmes donnés ; et ce système prolongé est unique. On dit alors que la construction (A,N,M) est munie de puissances divisées. (Observer que A et N sont stables pour les puissances divisées) .

Proposition 1 - Soit (A,N,M) une construction munie de puissances divisées. Alors :

1) la projection $M \longrightarrow N$ (définie par l'augmentation ε de A) est compatible avec les γ_k ;

2) les puissances divisées de N sont compatibles avec la différentielle $\bar{d}$ de l'algèbre finale N ;

3) si M est acyclique, les γ_k de N passent à l'algèbre d'homologie $H_*(N)$, qui devient donc une algèbre munie de puissances divisées.

Démonstration : 1) soit $x \in N$, et soit $u \in M$ dont la projection $\bar{u}$ dans N soit nulle. Montrons que $\gamma_k(x+u) - \gamma_k(x)$ a une projection nulle. C'est égal à $\sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \gamma_i(u)\,\gamma_{k-i}(x)$, et il suffit donc de montrer que, pour $i \geqslant 1$, $\gamma_i(u)$ a une projection nulle. Il suffit de le montrer quand $u \in A_q \otimes N_r$, $q+r$ pair $\geqslant 2$. Soit $u = \sum_j a_j \otimes n_j$. D'après (3), il suffit de montrer que $\gamma_i(a \otimes n)$ a une projection nulle quand $a \in A_q$, $n \in N_r$, $q+r$ pair $\geqslant 2$, et $\varepsilon a = 0$. Supposons d'abord r pair $\geqslant 2$; alors $\gamma_i(a \otimes n) = a^i \otimes \gamma_i(n)$ a bien une projection nulle, car $\varepsilon(a^i) = 0$.

Si r impair, $\gamma_i(a \otimes n) = 0$. Si $r = 0$, alors $\gamma_i(a \otimes n) = \gamma_i(a)n^i$, dont la projection est nulle puisque le degré de $\gamma_i(a)$ est > 0 .

2) la relation (6) ayant lieu quand $x \in N$ et d est la différentielle de M , on en déduit, par projection sur N ,

$\bar{d}\,\gamma_k(x) = (\bar{d}x)\,\gamma_{k-1}(x)$, ce qui prouve l'assertion 2) .

3) si $x \in N$ et $\bar{d}x = 0$, on a $\bar{d}\,\gamma_k(x) = 0$ d'après ce qui précède.

Pour montrer que γ_k passe à la $\bar{d}$-homologie de N , on doit prouver que

$$\gamma_k(x+\bar{d}y) - \gamma_k(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \gamma_i(\bar{d}y)\,\gamma_{k-i}(x)$$

est un $\bar{d}$-bord si $x \in N_{2q}$, $\bar{d}x = 0$, $y \in N_{2q+1}$ $(q \geqslant 1)$. Il suffit de montrer que, dans le second membre, chacun des $\gamma_i(\bar{d}y)$ est un $\bar{d}$-bord . Or, d'après 1), $\gamma_i(\bar{d}y)$ est la projection, sur N , de $\gamma_i(dy)$, qui est un d-cycle. Puisque M est supposée acyclique, $\gamma_i(dy)$ est un d-bord donc, par projection, $\gamma_i(\bar{d}y)$ est un $\bar{d}$-bord .

Application : soit A une DGA-algèbre anticommutative (au sens strict) Il en est alors de même de $\overline{\mathcal{B}}^{(n-1)}(A)$, pour $n \geqslant 2$ (cf Exp. 4, th. 4, (iv)) Donc $\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A)$, qui est canoniquement munie de puissances divisées quand $n \geqslant 1$ (th.1 ci-dessus), voit ses γ_k passer à l'homologie $H_*(\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$ quand $n \geqslant 2$. De plus, si A est de degré zéro, A est trivialement munie de puissances divisées, donc les γ_k de $\overline{\mathcal{B}}^{(1)}(A)$ passent aussi à l'homologie. En particulier, prenant $A = \Lambda(\pi)$, π groupe abélien, on voit que les algèbres d'Eilenberg-MacLane $H_*(\pi, n ; \Lambda)$, pour $n \geqslant 1$, sont canoniquement munies de puissances divisées qui satisfont à (1),(2),(3),(4') et (5) .

De plus, pour tout homomorphisme $\pi \longrightarrow \pi'$, l'application fonctorielle $H_*(\pi, n ; \Lambda) \longrightarrow H_*(\pi', n ; \Lambda)$ est compatible avec les puissances divisées, d'après le théorème 1 .

6.- Puissances divisées dans une construction spéciale .

Soit $(A,N,M,\widetilde{N})$ une construction spéciale anticommutative (au sens strict). On dira qu'elle est munie de puissances divisées si les γ_k laissent stable non seulement les sous-algèbres A et N , mais aussi la sous-algèbre $\widetilde{N}$. C'est trivialement ainsi pour la bar construction, car alors $\widetilde{N} = N$.

Proposition 2 - Si $(A,N,M,\widetilde{N})$ est une construction spéciale avec puissances divisées, les γ_k, sur $\widetilde{N}$ (et a fortiori sur N) satisfont à (5).

Démonstration : par récurrence sur k, en différentiant, et en observant que d applique biunivoquement $\widetilde{N}$ dans M. C'est le même calcul que pour la bar construction (th. 1).

Proposition 3 - Si on a deux constructions spéciales avec puissances divisées, leur produit tensoriel (Exp. 4, n° 5) est une construction spéciale avec puissances divisées.

Démonstration : les puissances divisées sont définies, sur le produit tensoriel $(A'',N'',M'',\widetilde{N}'')$, par le théorème 2 ci-dessus. Il reste à vérifier que $\widetilde{N}''$ est stable pour les γ_k ; or cela résulte de la formule (9) de l'Exposé 4.

La proposition 3 s'applique notamment à un produit tensoriel de plusieurs bar-constructions ; les puissances divisées de ce produit tensoriel satisfont donc à (5), en vertu de la prop. 2.

En particulier : dans un produit tensoriel d'algèbres de polynômes divisées (cf n° 2), les puissances divisées satisfont à (5). Plus généralement :

Proposition 4 - Dans les hypothèses du théorème 2, si les puissances divisées de B et celles de C satisfont à (5), les puissances divisées de $B \otimes C$ satisfont à (5).

Démonstration : il suffit de montrer que les $x \in B \otimes C$ qui satisfont à (5) forment une sous-algèbre ; autrement dit, si x et y sont des éléments de degrés pairs q et $q' \geq 2$, d'une algèbre graduée N et satisfont à (5), il en est de même de la somme $x + y$ et du produit xy. Pour le voir, considérons les algèbres de polynômes divisées $P(\xi, q)$ et $P(\xi', q')$, et définissons une application linéaire de $P(\xi, q) \otimes P(\xi', q')$ dans N, en envoyant $\gamma_k(\xi) \otimes \gamma_h(\xi')$ dans le produit $\gamma_k(x)\,\gamma_h(y)$. La condition (2) des puissances divisées entraîne que f est un homomorphisme d'algèbres graduées ; puisque x et y satisfont à (5), la restriction de f à chacune des sous-algèbres $P(\xi, q)$ et $P(\xi', q')$ est compatible avec les puissances divisées. Il résulte alors des propriétés (3) et (4') des puissances divisées, que f est compatible avec les puissances divisées ; comme tous les éléments de $P(\xi, q) \otimes P(\xi', q')$ satisfont à (5), (5) est vérifiée par tous les éléments de l'image de f, et en particulier par $x + y$ et par xy.

Théorème 3 : Soit (C,Q,P) une construction anticommutative (au sens strict), et $(A,N,M,\widetilde{N})$ une construction spéciale, anticommutative au sens strict, munie de puissances divisées. Soit $f : C \longrightarrow A$ un DGA-homomorphisme,

et soient $g : P \longrightarrow M$ et $\bar{g} : Q \longrightarrow N$ les homomorphismes spéciaux définis par f (Exp. 4, th.5) . Si Q est munie de puissances divisées compatibles avec la différentielle de P , alors $\bar{g}$ est compatible avec les puissances divisées.

Démonstration : observons d'abord qu'on ne suppose pas que C soit munie de puissances divisées. L'application $\bar{g}$ est composée de $Q \longrightarrow \tilde{N} \longrightarrow N$, dont la première est la restriction de g à Q , et la seconde est la restriction à N de la projection $M \longrightarrow N$, qui est compatible avec les puissances divisées (prop.1). Il suffit donc de montrer que, pour $x \in Q$, de degré pair $\geqslant 2$, on a

$$g(\gamma_k(x)) = \gamma_k(g(x)) .$$

Or les deux membres sont dans $\tilde{N}$, puisque $\tilde{N}$ est stable pour γ_k . Il suffit donc de montrer l'égalité des différentielles, et ceci fournit une démonstration par récurrence sur k .

7.- Puissances divisées en caractéristique p .

On suppose désormais que l'on a $p = 0$ dans l'anneau de base Λ , p désignant un entier premier. Soit N une algèbre graduée anticommutative munie de puissances divisées ; on a donc $x^p = 0$ pour tout $x \in N$ de degré pair $\geqslant 2$, d'après la relation (11) .

On suppose en outre que les puissances divisées de N satisfont à (5). Les propriétés arithmétiques élémentaires des coefficients binomiaux donnent alors

(5') $\gamma_k(\gamma_p(x)) = \gamma_{kp}(x)$ pour tout k , en caractéristique p .

Ceci s'écrit aussi $\gamma_{kp} = \gamma_k \circ \gamma_p$. On en déduit, par récurrence sur l'entier i ,

$$\gamma_{p^i} = \gamma_p \circ \ldots \circ \gamma_p \quad (i \text{ fois}).$$

Soit $k = k_o + k_1 p + \ldots + k_i p^i$ le développement p-adique de k ($k_o < p$, $k_1 < p$, ... , $k_i < p$) . la formule (2) donne, compte tenu de (5') :

(15) $\gamma_k(x) = \gamma_{k_o}(x) . \gamma_{k_1}(\gamma_p(x)) \ldots \gamma_{k_i}(\gamma_{p^i}(x))$.

D'autre part, $\gamma_{k_i}(y) = (1/k_i!)y^{k_i}$, de sorte que toutes les opérations γ_k sont déterminées par la structure multiplicative de N et par l'unique opération γ_p ("puissance p-ième divisée"). On observera que, d'après (4') , on a

(16) $\gamma_p(xy) = 0$ pour $\deg(x) > 0$ et $\deg(y) > 0$.

La relation (15) peut être interprétée comme donnant la structure de l'algèbre des polynômes divisée (à coefficients modulo p) : notons $Q_p(y)$ le quotient de l'algèbre des polynômes ordinaires à un générateur y , par l'idéal engendré par y^p ("algèbre des polynômes tronquée"). Alors

$$P(y\ ;\ 2q) \approx Q_p(y) \otimes Q_p(\gamma_p(y)) \otimes \dots \otimes Q_p(\gamma_{p^i}(y)) \otimes \dots$$

(produit tensoriel infini d'algèbres).

8.- Puissances divisées en caractéristique 2.

Lorsque $p = 2$, ce qui précède reste valable : tout se ramène à l'opération γ_2 ("carré divisé"). Mais on peut faire davantage. Nous dirons (lorsque $p = 2$) qu'une algèbre graduée est strictement anticommutative si elle est anticommutative (i.e : commutative) et si en outre $x^2 = 0$ pour tout x de degré > 0 . Exemple : la bar construction $\overline{B}(A)$ d'une A anticommutative est strictement anticommutative (Exp. 4, th. 4, (iv)).

Reprenons alors le théorème 1 ; en caractéristique 2, si A est strictement anticommutative, $\gamma_k(x)$ se définit pour tout $x \in \overline{B}_q(A)$ tel que $q \geqslant 2$ (q pair ou impair), ainsi que pour les $x \in \overline{B}_1(A)$ tels que $(dx)^2 = 0$ dans A . Ces x forment un sous-module. Les propriétés (1) à (6) restent valables ; (4') se précise comme suit :

(4") pour $k \geqslant 2$,
$$\begin{cases} \gamma_k(xy) = 0 & \text{si } \deg(x) > 0 \text{ et } \deg(y) > 0 , \\ \gamma_k(xy) = x^k \gamma_k(y) & \text{si } \deg(x) = 0 . \end{cases}$$

L'algèbre des polynômes divisée $P(y\ ;\ q)$ est définie pour tout $q \geqslant 1$, pair ou impair. La formule (15) donne sa structure :

$$P(y\ ;\ q) \approx E(y\ ,\ q) \otimes E(\gamma_2(y)\ ;\ 2q) \otimes \dots \otimes E(\gamma_{2^i}(y)\ ;\ 2^i q) \otimes \dots$$

(produit tensoriel d'algèbres extérieures) : c'est l'algèbre extérieure ayant pour générateurs y , $\gamma_2(y)$, ... , $\gamma_{2^i}(y)$, ...

Exercice : soit une DGA-algèbre A strictement anticommutative ; si $a \in A$ est de degré > 0 , ou si a de degré 0 satisfait à $a^2 = (\varepsilon a)^2$, on a, dans la bar construction de A , $\gamma_k([a]) = [a\ ,\ \dots\ ,\ a]$ (k fois) . Si a et b sont des éléments quelconques de A , on a

$$\gamma_k([a\ ,\ b]) = [a\ ,\ b\ ,\ \dots\ ,\ a\ ,\ b] \quad (k \text{ fois}) .$$

Définition d'un système de puissances divisées : soit N une algèbre graduée strictement anticommutative. On dit que N est munie d'un système

de puissances divisées si on a attaché une suite d'éléments $\gamma_k(x)$ à chaque $x \in N$ de degré ≥ 2, et à un certain sous-module de N_1, ces γ_k devant satisfaire à (1),(2),(3) et (4") , éventuellement à (5) . Si de plus N est sous-algèbre graduée d'une algèbre différentielle graduée (strictement anticommutative), on dit que les puissances divisées de N sont compatibles avec la différentielle de M si la condition (6) est satisfaite.

Alors le théorème 2 s'étend à ce cas (démonstration inchangée). Quant à la proposition 1 , elle subsiste, ainsi que sa démonstration, pour les puissances divisées des éléments de degré ≥ 2 .
Elle subsiste aussi pour les puissances divisées des éléments de degré 1 , si les γ_k sont définis pour tous les éléments de degré 1 de A et de N .

Application : soit A une DGA-algèbre , strictement anticommutative (en caractéristique 2) . Alors, pour $n \geq 2$, $\overline{\mathcal{B}}^{(n-1)}(A)$ est strictement anticommutative et munie de puissances divisées. Pour $n \geq 2$, $\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A)$ n'a pas d'élément $\neq 0$ de degré 1 , donc les puissances divisées de $\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A)$ passent à l'homologie $H_*(\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$. De plus, si A est de degré 0 et si $a^2 = (\varepsilon a)^2$ pour tout $a \in A$, les puissances divisées sont définies pour tous les éléments de degré ≥ 1 de $\overline{\mathcal{B}}^{(1)}(A)$ et passent à l'homologie.

En particulier : les algèbres d'Eilenberg-MacLane $H_*(\pi, n ; Z_2)$ sont canoniquement munies de puissances divisées satisfaisant à (1), (2), (3), (4") et (5) . Ces puissances divisées $\gamma_k(x)$ sont définies pour les x de degré > 0 si $n \geq 2$; pour $n = 1$, elles sont définies pour les x de degré ≥ 2 , ainsi que pour les éléments de $H_1(\pi, 1 ; Z_2)$ situés dans l'image de $_2\pi$ par la suspension.

(Ce dernier point se voit comme suit : les γ_k sont définis pour tous les éléments de degré 1 de $H_1(_2\pi, 1 ; Z_2)$, qui s'envoie biunivoquement dans $H_1(\pi, 1 ; Z_2)$) .