

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

H. CARTAN

Constructions multiplicatives itérées cohomologie

Séminaire Henri Cartan, tome 7, n° 1 (1954-1955), exp. n° 5, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_1_A5_0

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONSTRUCTIONS MULTIPLICATIVES ITÉRÉES
COHOMOLOGIE

(Exposé de H. CARTAN, 8.12.1954)

1.- Constructions itérées.

Définition : Une construction itérée $\mathcal{A}$, d'algèbre initiale A , est une suite de constructions multiplicatives (Cf Exposé 4, n° 4) :

$$(A^{(n)}, A^{(n+1)}, M^{(n+1)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

avec $A^{(0)} = A$. L'algèbre $A^{(n+1)}$ s'appelle la n -ième algèbre finale, et aussi la $(n+1)$ -ième algèbre initiale de la construction.

Homomorphisme: Soit une autre construction itérée $\mathcal{C}$, formée d'une suite $(C^{(n)}, C^{(n+1)}, P^{(n+1)})$. Un homomorphisme $g : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ consiste dans la donnée de DGA-homomorphismes d'algèbres

$$g^{(n+1)} : P^{(n+1)} \longrightarrow M^{(n+1)}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

- 1) pour chaque n , $g^{(n+1)}$ applique la sous-algèbre $C^{(n)}$ de $P^{(n+1)}$, dans la sous-algèbre $A^{(n)}$ de $M^{(n+1)}$. On notera $f^{(n)}$ le DGA-homomorphisme $C^{(n)} \rightarrow A^{(n)}$ ainsi obtenu ;
- 2) l'homomorphisme $\bar{g}^{(n+1)} : C^{(n+1)} \rightarrow A^{(n+1)}$ déduit de $g^{(n+1)}$ par passage aux algèbres quotients, est identique à $f^{(n+1)}$.

Lorsqu'il en est ainsi, on dit que l'homomorphisme g de la construction itérée $\mathcal{C}$ dans la construction itérée $\mathcal{A}$, est compatible avec le DGA-homomorphisme $f^{(0)} : C \rightarrow A$.

Construction spéciale itérée : une construction spéciale itérée consiste dans la donnée d'une construction itérée $\mathcal{A}$ et, pour chaque $n \geq 0$, d'une structure de construction spéciale pour $(A^{(n)}, A^{(n+1)}, M^{(n+1)})$. On doit donc se donner, pour chaque n , un opérateur d'homotopie $s^{(n+1)}$ dans $M^{(n+1)}$, satisfaisant aux conditions (6) et (7) de l'Exposé 4 ; ou encore se donner une sous-algèbre

$\tilde{A}^{(n+1)}$ de $M^{(n+1)}$, contenant $A^{(n+1)}$, et satisfaisant à la condition (S) de l'Exposé 4 (n° 5).

Exemple : la bar construction itérée (Exp. 4, n° 3) est une construction spéciale itérée.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$ deux constructions itérées, dont la seconde est spéciale. Un homomorphisme $g : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ sera dit spécial si, pour chaque $n \geq 0$, $g^{(n+1)}$ est un homomorphisme spécial de $P^{(n+1)}$ dans $M^{(n+1)}$; autrement dit, si $g^{(n+1)}(\mathcal{C}^{(n+1)}) \subset \tilde{A}^{(n+1)}$.

Par application itérée du théorème 5 (Exp. 4, n° 6), on obtient :

Théorème 5 bis. - Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$ deux constructions itérées, dont la seconde est spéciale et anticommutative (i.e : les $A^{(n)}$ sont des algèbres anticommutatives). Etant donné un DGA-homomorphisme $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ des algèbres initiales, il existe un homomorphisme spécial $g : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$, compatible avec f ; et un tel g est unique.

2.- Un diagramme de compatibilité.

Théorème 6. - Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$ deux constructions itérées, dont les algèbres initiales $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$ sont anticommutatives. Supposons que $\mathcal{A}$ soit spéciale et anticommutative. Soit donné un DGA-homomorphisme $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{(n)} & \xrightarrow{f^{(n)}} & A^{(n)} \\ \downarrow g^{(n)} & & \uparrow h^{(n)} \\ \overline{\mathcal{B}}^{(n)}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\varphi^{(n)}} & \overline{\mathcal{B}}^{(n)}(\mathcal{A}) \end{array}$$

où $f^{(n)}$ désigne l'homomorphisme spécial défini par $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$;
 $\varphi^{(n)}$ désigne l'homomorphisme fonctoriel défini par $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$;
 $g^{(n)}$ désigne l'homomorphisme spécial défini par l'identité $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$;
 $h^{(n)}$ désigne l'homomorphisme spécial défini par l'identité $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$.

Alors ce diagramme est commutatif.

Démonstration : par récurrence sur n . C'est trivial pour $n = 0$. Supposons-le démontré pour $n - 1$ ($n \geq 1$). Soit $G : P^{(n)} \rightarrow \overline{\mathcal{B}}^{(n)}(\mathcal{C})$ l'unique homomorphisme spécial défini par $g^{(n-1)} : \mathcal{C}^{(n-1)} \rightarrow \overline{\mathcal{B}}^{(n-1)}(\mathcal{C})$.

Soit de même F (resp. Φ , resp. H) l'unique homomorphisme spécial défini par $f^{(n-1)}$ (resp. $\varphi^{(n-1)}$, resp. $h^{(n-1)}$). Le composé

$$H \circ \Phi \circ G : P^{(n)} \rightarrow M^{(n)}$$

est compatible avec $h^{(n-1)} \circ \varphi^{(n-1)} \circ g^{(n-1)}$, qui, d'après l'hypothèse de

réurrence, est égal à $f^{(n-1)}$. Or une simple inspection montre que $H \circ \bar{f} \circ g$ envoie $C^{(n)}$ dans $\tilde{A}^{(n)}$, donc est spécial. C'est donc l'unique homomorphisme spécial compatible avec $f^{(n-1)}$; en passant au quotient, on obtient donc $f^{(n)} : C^{(n)} \rightarrow A^{(n)}$, mais on obtient aussi le composé des quotients $h^{(n)} \circ \varphi^{(n)} \circ g^{(n)}$. C.Q.F.D.

Corollaire du théorème 6 : prenons $\mathcal{C} = \mathcal{U}$, f étant l'application identique $A \rightarrow A$. Alors le composé des deux homomorphismes spéciaux $A^{(n)} \rightarrow \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \rightarrow A^{(n)}$ est l'identité. Ainsi : toute construction spéciale anticommutative $\mathcal{U}$, d'algèbre initiale A , est (canoniquement) facteur direct de la bar construction itérée d'algèbre initiale A .

3.- Applications.

Première application : soit A une DGA-algèbre anticommutative, et soit $\mathcal{U}$ une construction itérée, d'algèbre initiale A . Il existe un unique homomorphisme spécial (compatible avec l'identité $A \rightarrow A$) de $\mathcal{U}$ dans la bar construction itérée d'algèbre initiale A ; d'où des homomorphismes, dits canoniques :

$$f^{(n)} : A^{(n)} \rightarrow \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A), \quad f_{\times}^{(n)} : H_{\times}(A^{(n)}) \rightarrow H_{\times}(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)).$$

Si de plus la construction $\mathcal{U}$ est acyclique (i.e. les $M^{(n+1)}$ sont acycliques), et si chaque $A^{(n)}$ possède une $\wedge$ -base homogène contenant l'élément unité, alors $f_{\times}^{(n)}$ est un isomorphisme pour tout n . (La dernière assertion résulte d'une application répétée du théorème 2 de l'Exp. 2).

Ainsi, pour "calculer" les algèbres d'homologie $H_{\times}(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$, on pourra utiliser n'importe quelle construction acyclique itérée $\mathcal{U}$, d'algèbre initiale A , pourvu que les $A^{(n)}$ aient chacune une $\wedge$ -base homogène contenant 1 (ce qui exige que A satisfasse déjà à cette condition).

Deuxième application : Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{U}$ des constructions itérées, dont les algèbres initiales C et A soient anticommutatives. Supposons que $\mathcal{U}$ soit une construction spéciale, et que, pour tout n , $A^{(n)}$ soit anticommutative et possède une $\wedge$ -base homogène contenant l'élément unité. Soit donné un DGA-homomorphisme $f : C \rightarrow A$ des algèbres initiales. Alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_{\times}(C^{(n)}) & \xrightarrow{f_{\times}^{(n)}} & H_{\times}(A^{(n)}) \\ \downarrow u^{(n)} & & \downarrow w^{(n)} \\ H_{\times}(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(C)) & \xrightarrow{v^{(n)}} & H_{\times}(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) \end{array}$$

où $f_{\times}^{(n)}$ est déduit de l'homomorphisme spécial défini par f , $v^{(n)}$ est

l'homomorphisme fonctoriel défini par f , et où $u^{(n)}$ et $w^{(n)}$ sont les homomorphismes canoniques (dont le second, $w^{(n)}$, est un isomorphisme).

(Démonstration : puisque $A^{(n)}$ est canoniquement facteur direct de $\bar{B}^{(n)}(A)$, l'isomorphisme $w^{(n)}$ est l'isomorphisme réciproque de l'isomorphisme $H_{\times}(\bar{B}^{(n)}(A)) \rightarrow H_{\times}(A^{(n)})$ défini par l'unique homomorphisme spécial de la bar construction dans la construction $\mathcal{C}$. Il suffit alors d'utiliser la commutativité du diagramme du théorème 6).

Remarque : supposons en outre que la construction $\mathcal{C}$ soit acyclique et que chaque $C^{(n)}$ possède une $\wedge$ -base homogène contenant 1. Alors $u^{(n)}$ est aussi un isomorphisme. Si l'on identifie $H_{\times}(C^{(n)})$ et $H_{\times}(A^{(n)})$ à $H_{\times}(\bar{B}^{(n)}(C))$ et $H_{\times}(\bar{B}^{(n)}(A))$ grâce aux isomorphismes canoniques $u^{(n)}$ et $w^{(n)}$, on voit que l'homomorphisme $f_{\times}^{(n)}$ permet de "calculer" l'homomorphisme fonctoriel $v^{(n)}$. Mais, pour obtenir ce résultat, on a dû supposer que $f_{\times}^{(n)}$ a été obtenu à partir de l'unique homomorphisme spécial de la construction $\mathcal{C}$ dans la construction $\mathcal{C}$.

Cette remarque trouvera notamment à s'appliquer dans le cas suivant : on se donne deux groupes abéliens Π et Π' , et un homomorphisme $\theta : \Pi \rightarrow \Pi'$. On prend $C = \wedge(\Pi)$, $A = \wedge(\Pi')$, f étant l'homomorphisme $C \rightarrow A$ défini par θ . La méthode précédente permettra alors de "calculer" les homomorphismes $H_{\times}(\Pi, n; \wedge) \rightarrow H_{\times}(\Pi', n; \wedge)$ définis par θ .

4.- Cohomologie des constructions.

Rappelons d'abord des notions élémentaires. Soit un complexe $X = \sum_q X_q$ (avec $X_q = 0$ pour $q < 0$), muni d'un opérateur différentiel d tel que $dd = 0$, $dX_q \subset X_{q-1}$. On suppose que les X_q sont des $\wedge$ -modules, et que d est $\wedge$ -linéaire. On notera $\text{Hom}'(X, \wedge)$ le complexe $X' = \sum_q X'^q$, où l'on pose $X'^q = \text{Hom}_{\wedge}(X_q, \wedge)$, et où $\delta : X'^q \rightarrow X'^{q+1}$ est transposé de d . Le module de "cohomologie" du complexe X' :

$$H^*(\text{Hom}'(X, \wedge)) = \sum_q H^q(\text{Hom}'(X, \wedge))$$

se notera aussi, par abus de langage, $H^*(X) = \sum_q H^q(X)$. C'est un $\wedge$ -module gradué.

Un homomorphisme de complexes $f : X \rightarrow Y$ (f étant une application $\wedge$ -linéaire telle que $f(X_q) \subset Y_q$, $fd = df$) définit un homomorphisme de complexes $\text{Hom}'(Y, \wedge) \rightarrow \text{Hom}'(X, \wedge)$, transposé de f ; d'où un homomorphisme des modules de cohomologie

$$f^* : H^*(Y) \rightarrow H^*(X),$$

qui conserve les degrés.

Si l'homomorphisme $f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ des modules d'homologie est un isomorphisme, alors f^* est un isomorphisme des modules de cohomologie, tout au moins si on suppose que X et Y ont des $\wedge$ -bases homogènes.

Démonstration : le "mapping cylinder" M de $f : X \rightarrow Y$ (Exp.3, page 2) est acyclique et $\wedge$ -libre. Il possède donc un opérateur d'homotopie, qui par transposition définit un opérateur d'homotopie dans $\text{Hom}'(M, \wedge)$; ce dernier complexe est donc acyclique, et comme il s'identifie au mapping cylinder de l'application $\text{Hom}'(Y, \wedge) \rightarrow \text{Hom}'(X, \wedge)$ (transposée de f), il s'en suit bien que f^* est un isomorphisme.

Revenons au cas d'une construction itérée $\mathcal{U}$ (cf n° 1). On a des modules de cohomologie $H^*(A^{(n)}) = H^*(\text{Hom}'(A^{(n)}, \wedge))$. Si l'algèbre initiale A est anticommutative, les homomorphismes canoniques $f^{(n)} : A^{(n)} \rightarrow \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)$ induisent des homomorphismes

$$H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) \rightarrow H^*(A^{(n)}),$$

qu'on qualifie encore de canoniques. Lorsque la construction $\mathcal{U}$ est acyclique et que les $A^{(n)}$ ont une $\wedge$ -base homogène contenant 1, les homomorphismes précédents sont des isomorphismes.

Dans les mêmes hypothèses que la "deuxième application" du n° 3, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^*(C^{(n)}) & \longleftarrow & H^*(A^{(n)}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(C)) & \longleftarrow & H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) \end{array}$$

où les homomorphismes verticaux sont les homomorphismes "canoniques", et les homomorphismes horizontaux sont déduits des homomorphismes spéciaux. Cette commutativité résulte de la commutativité exprimée au théorème 6 ; il suffit de renverser le sens d'une flèche (en remplaçant un isomorphisme par l'isomorphisme réciproque).

5.- Structure multiplicative de la cohomologie.

Supposons donné un DGA-homomorphisme d'algèbres

$$\Delta : A \rightarrow A \otimes_{\wedge} A,$$

A étant une DGA-algèbre anticommutative. (Par exemple, si $A = \wedge(\Pi)$ est l'algèbre d'un groupe abélien, considérons l'application "diagonale" $x \mapsto (x, x)$ de Π dans $\Pi \times \Pi$, d'où un DGA-homomorphisme $\wedge(\Pi) \rightarrow \wedge(\Pi \times \Pi)$,

qui est bien compatible avec les augmentations. D'ailleurs $\Lambda(\pi \times \pi)$ s'identifie canoniquement à $\Lambda(\pi) \otimes_{\Lambda} \Lambda(\pi)$.

La donnée de Δ définit des homomorphismes

$$\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \longrightarrow \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A \otimes A) \longrightarrow \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \otimes \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A),$$

dont le premier est l'homomorphisme fonctoriel défini par Δ , et le second est l'homomorphisme spécial de deux constructions ayant même algèbre initiale $A \otimes A$. Le composé de ces homomorphismes

$$\Delta^{(n)} : \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \longrightarrow \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \otimes \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)$$

est l'homomorphisme spécial défini par l'homomorphisme $\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$ des algèbres initiales.

Par dualité, on obtient un homomorphisme de Λ -complexes

$$\text{Hom}'(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A), \Lambda) \otimes_{\Lambda} \text{Hom}'(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A), \Lambda) \longrightarrow \text{Hom}'(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A), \Lambda).$$

Passons à la cohomologie, et observons que $H^*(X') \otimes H^*(X')$ s'envoie canoniquement dans $H^*(X' \otimes X')$: en appliquant cette remarque au complexe

$X' = \text{Hom}'(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A), \Lambda)$, on obtient une application

$$(1) \quad H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) \otimes_{\Lambda} H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) \longrightarrow H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)).$$

Cette application envoie $H^k(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) \otimes H^h(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$ dans $H^{k+h}(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$.

Ainsi (1) définit une multiplication dans $H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$, dans laquelle les degrés s'ajoutent.

Les propriétés de cette multiplication dépendent, bien entendu, de celles de l'application Δ . Signalons-en quelques-unes, sans démonstration :

(i) considérons l'application $\varepsilon \otimes 1$ de $A \otimes A$, qui transforme $a \otimes a'$ dans $(\varepsilon a)a'$ (rappelons que ε désigne l'augmentation $A \rightarrow \Lambda$). Supposons que le composé de Δ et de $\varepsilon \otimes 1$ soit l'application identique de A (il en est bien ainsi dans le cas de l'application diagonale d'un groupe). Alors la même propriété est vraie pour toutes les applications

$\Delta^{(n)} : \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \longrightarrow \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \otimes \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)$. Dans ces conditions, l'élément de degré 0 de $\text{Hom}'(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A), \Lambda)$, défini par l'augmentation $\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \rightarrow \Lambda$, est élément unité à gauche pour la multiplication ; comme c'est un cocycle, il définit un élément de degré 0 de $H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$, qui est unité à gauche pour la multiplication (1). Si maintenant le composé de Δ et de $1 \otimes \varepsilon$ est l'application identique de A , le même élément que ci-dessus est unité à droite pour la multiplication.

(ii) Supposons que l'application Δ soit "associative", c'est-à-dire que

l'application de A dans $A \otimes A \otimes A$, composée de $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ et de $\Delta \otimes 1 : A \otimes A \rightarrow (A \otimes A) \otimes A$, soit identique à la composée de $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ et de $1 \otimes \Delta : A \otimes A \rightarrow A \otimes (A \otimes A)$. Alors on montre que chaque application $\Delta^{(n)}$ est associative. Il en résulte que la multiplication de $\text{Hom}^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A), \Lambda)$ est associative, et cette associativité se conserve en passant à la cohomologie.

(iii) Supposons que l'application Δ soit "anticommutative", c'est-à-dire que Δ soit égal au composé de Δ et de l'automorphisme de $A \otimes A$ qui envoie $a \otimes a'$ dans $(-1)^{kh} a' \otimes a$ pour $\deg(a) = k$ et $\deg(a') = h$. Cette propriété cesse d'être vraie pour les $\Delta^{(n)}$, mais quand on passe à la cohomologie on peut montrer que la multiplication (1) est anticommutative. Par exemple, si $A = \Lambda(\pi)$ et si Δ est l'application diagonale, $H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$ est une algèbre anticommutative.

Remarque : on définira plus tard des DGA-homomorphismes canoniques $\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \rightarrow K(\pi, n)$, lorsque $A = Z(\pi)$, en désignant par $K(\pi, n)$ le complexe d'Eilenberg-MacLane du groupe abélien π (cf. Exp.2, n° 2). Ces applications définissent des isomorphismes $H_*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) \approx H_*(\pi, n)$; il en résulte que si $C = \Lambda(\pi)$, on a des isomorphismes canoniques $H^*(\pi, n; \Lambda) \approx H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(C))$. On verra que ces isomorphismes sont compatibles avec les structures multiplicatives : celle de $H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(C))$ comme définie ci-dessus, et celle de $H^*(\pi, n; \Lambda)$ comme on la définit en Topologie.

6.- Calcul de la multiplication en cohomologie.

Soit $\mathcal{U}$ une construction spéciale itérée, d'algèbre initiale A . On suppose que chaque algèbre $A^{(n)}$ de la construction est anticommutative et possède une Λ -base homogène contenant 1. Alors le produit tensoriel $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ de ces deux constructions est une construction spéciale itérée, anticommutative, dont la n -ième algèbre initiale est $A^{(n)} \otimes A^{(n)}$; son algèbre initiale est $A \otimes A$. Un DGA-homomorphisme $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ définit un unique homomorphisme spécial

$$\mathcal{J}^{(n)} : A^{(n)} \rightarrow A^{(n)} \otimes A^{(n)}.$$

Proposition 4.- Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A^{(n)} & \xrightarrow{\mathcal{J}^{(n)}} & A^{(n)} \otimes A^{(n)} \\ \downarrow g^{(n)} & & \uparrow h^{(n)} \otimes h^{(n)} \\ \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) & \xrightarrow{\Delta^{(n)}} & \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \otimes \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \end{array}$$

où $g^{(n)}$ désigne l'homomorphisme "canonique", et $h^{(n)}$ désigne l'homomorphisme spécial $\bar{\beta}^{(n)}(A) \rightarrow A^{(n)}$.

Démonstration : considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 A^{(n)} & \xrightarrow{\delta^{(n)}} & A^{(n)} \otimes A^{(n)} & & \\
 \downarrow g^{(n)} & & \uparrow \text{spécial} & \nearrow h^{(n)} \otimes h^{(n)} & \\
 \bar{\beta}^{(n)}(A) & \xrightarrow{\text{défini par } \Delta} & \bar{\beta}^{(n)}(A \otimes A) & \xrightarrow{\text{spécial}} & \bar{\beta}^{(n)}(A) \otimes \bar{\beta}^{(n)}(A)
 \end{array}$$

Le carré de gauche est commutatif d'après le théorème 6. On montre que le triangle de droite est commutatif, en procédant par récurrence sur n , comme pour la démonstration du théorème 6. Le composé des deux homomorphismes de la ligne inférieure du diagramme est $\Delta^{(n)}$, ce qui démontre la proposition.

Prenons le diagramme de la prop. 4 ; transposons-le, puis passons à la cohomologie : on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(\bar{\beta}^{(n)}(A)) \otimes H^*(\bar{\beta}^{(n)}(A)) & \xrightarrow{\quad} & H^*(\bar{\beta}^{(n)}(A)) \\
 \uparrow u \otimes u & & \downarrow v \\
 H^*(A^{(n)}) \otimes H^*(A^{(n)}) & \xrightarrow{\quad} & H^*(A^{(n)})
 \end{array}$$

où la première flèche horizontale désigne la multiplication de $H^*(\bar{\beta}^{(n)}(A))$ définie par $\Delta^{(n)}$, et la deuxième flèche horizontale désigne la multiplication de $H^*(A^{(n)})$ définie par $\delta^{(n)}$. Quant à $u : H^*(A^{(n)}) \rightarrow H^*(\bar{\beta}^{(n)}(A))$, c'est l'isomorphisme réciproque de l'isomorphisme canonique v . Il en résulte :

Théorème 7. - Soit $\mathcal{U}$ une construction spéciale itérée anticommutative, d'algèbre initiale A , de n -ième algèbre initiale $A^{(n)}$ (ayant une $\wedge$ -base homogène contenant 1). Soit $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ un DGA-homomorphisme, et soient $\delta^{(n)} : A^{(n)} \rightarrow A^{(n)} \otimes A^{(n)}$, et $\Delta^{(n)} : \bar{\beta}^{(n)}(A) \rightarrow \bar{\beta}^{(n)}(A) \otimes \bar{\beta}^{(n)}(A)$ les homomorphismes qu'il détermine. Alors l'isomorphisme canonique des modules de cohomologie $H^*(\bar{\beta}^{(n)}(A)) \simeq H^*(A^{(n)})$ est compatible avec les structures multiplicatives définies, sur $H^*(\bar{\beta}^{(n)}(A))$ et $H^*(A^{(n)})$ respectivement, par $\Delta^{(n)}$ et par $\delta^{(n)}$.

D'un point de vue pratique, on peut donc "calculer" la structure multiplicative de $H^*(\bar{\beta}^{(n)}(A))$ en utilisant une construction spéciale anticommutative, la multiplication de $H^*(A^{(n)})$ étant calculée à l'aide de $\delta^{(n)}$.

Remarque : si $\wedge$ est un corps, on peut interpréter comme suit la multiplication de $H^*(A^{(n)}) = H^*(\text{Hom}(A^{(n)}, \wedge))$ définie par $\delta^{(n)}$: en passant à l'homologie, $\delta^{(n)}$ définit $H_*(A^{(n)}) \rightarrow H_*(A^{(n)} \otimes A^{(n)})$, et ce dernier module

est isomorphe (canoniquement) à $H_{\times}(A^{(n)}) \otimes H_{\times}(A^{(n)})$. En séparant les degrés, on obtient, pour tout couple d'entiers k et h , un homomorphisme $H_{k+h}(A^{(n)}) \longrightarrow H_k(A^{(n)}) \otimes H_h(A^{(n)})$. Par transposition, et compte tenu du fait que le dual de $H_k(A^{(n)})$ est canoniquement isomorphe à la cohomologie $H^k(\text{Hom}^1(A^{(n)}, \wedge))$ notée $H^k(A^{(n)})$, on obtient une application

$$H^k(A^{(n)}) \otimes H^h(A^{(n)}) \longrightarrow H^{k+h}(A^{(n)}),$$

qui n'est autre que la multiplication cherchée.