

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

H. CARTAN

DGA-modules (suite), notion de construction

Séminaire Henri Cartan, tome 7, n° 1 (1954-1955), exp. n° 3, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_1_A3_0>

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DGA-MODULES (Suite)

NOTION DE CONSTRUCTION

(Exposé de H. CARTAN, 24.11.1954)

1. Rappels concernant la suite spectrale.

Le théorème 2, énoncé sans démonstration à la fin de l'exposé précédent, sera démontré ci-dessous (n° 4) comme conséquence d'un théorème dû à J. C. Moore (théorème A ci-dessous, n° 2). Auparavant, quelques rappels seront utiles.

Soit M un Λ -module différentiel gradué et filtré. Par là nous entendons que :

M est gradué : $M = \sum_n M_n$, $M_n = 0$ pour $n < 0$;

M est muni d'un Λ -endomorphisme d tel que $dd = 0$, $dM_n \subset M_{n-1}$;

M est muni d'une filtration croissante, ce qui veut dire qu'on a associé à tout entier p un sous-module $F_p(M)$ de manière que :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_p(M) = 0 \text{ pour } p < 0, \quad F_p(M) \subset F_{p+1}(M), \\ F_p(M) = \sum_n F_p(M_n), \text{ en notant } F_p(M_n) \text{ le sous-module } F_p(M) \cap M_n, \\ M_p \subset F_p(M), \quad F_p(M) \text{ est stable pour } d. \end{array} \right.$$

Dans une telle situation, on sait (voir par exemple J.P. Serre, Ann. of Math. 54, 1951, p. 425-505, Chap. I ; et H. Cartan-S. Eilenberg, Homological Algebra, Chap. XV, à paraître) que M définit une suite spectrale. On a une suite de modules bigradués $E^r(M) = \sum_{p,q} E^r_{p,q}(M)$, $r = 0, 1, 2, \dots$ (avec $E^r_{p,q}(M) = 0$ pour $p < 0$ ou $q < 0$), et $E^r(M)$ est muni d'un opérateur différentiel d^r tel que

$$d^r d^r = 0, \quad d^r(E^r_{p,q}) \subset E^r_{p-r, q+r-1}.$$

$E^{r+1}(M)$, abstraction faite de son opérateur d^{r+1} , est le module d'homologie de

$E^r(M)$. Pour p et q donnés, le module $E_{p,q}^r(M)$ est indépendant de r pour r assez grand ; d'où un module bigradué $E^\infty(M)$. Filtrons $H_n(M)$ en notant $F_p(H_n(M))$ l'image, dans $H_n(M)$, des cycles de $F_p(M_n)$; alors le module bigradué associé au module gradué-filtré $H(M)$, c'est-à-dire

$$E_{p,q}^\infty(M) \approx F_p(H_{p+q}(M)) / F_{p-1}(H_{p+q}(M)).$$

Rappelons enfin que $E^0(M)$ est le module bigradué associé à M :

$$E_{p,q}^0(M) = F_p(M_{p+q}) / F_{p-1}(M_{p+q}).$$

Soient maintenant M et M' deux $\wedge$ -modules différentiels gradués et filtrés, et soit $g: M \rightarrow M'$ un $\wedge$ -homomorphisme compatible avec les graduations, les filtrations et les opérateurs différentiels. On sait qu'alors g induit, pour chaque r , un homomorphisme $g^r: E^r(M) \rightarrow E^r(M')$ compatible avec les bigraduations et les opérateurs d^r , et que g^{r+1} se déduit de g^r par passage à la d^r -homologie. Dans une telle situation, on va, avec J.C. Moore, introduire un troisième module différentiel gradué et filtré M'' , appelé le "mapping cylinder" de l'application $g: M \rightarrow M'$.

On prend $M'' = M' + M$ (somme directe), avec la graduation $M''_n = M'_n + M_{n-1}$ et l'opérateur différentiel $d(x', x) = (dx' + g(x), -dx)$. Les applications $x' \mapsto (x', 0)$ et $(x', x) \mapsto x$ définissent une suite exacte de complexes $0 \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow M \rightarrow 0$ à laquelle correspond une suite exacte d'homologie

$$(1) \quad \dots \rightarrow H_{n+1}(M'') \rightarrow H_n(M) \rightarrow H_n(M') \rightarrow H_n(M'') \rightarrow \dots,$$

et si on explicite l'homomorphisme médian $H_n(M) \rightarrow H_n(M')$, on voit que c'est l'homomorphisme g_* déduit de g par passage à l'homologie.

Définissons sur M'' la filtration croissante

$$(2) \quad F_p(M'') = F_p(M') + F_{p-1}(M).$$

Alors M'' est bien un module différentiel gradué et filtré (au sens précis

défini plus haut). La décomposition directe (2) induit une décomposition directe $E_{p,q}^0(M'') = E_{p,q}^0(M') + E_{p-1,q}^0(M)$, compatible avec les différentielles d^0 ; d'où une décomposition directe

$$(3) \quad E_{p,q}^1(M'') = E_{p,q}^1(M') + E_{p-1,q}^1(M)$$

et on va chercher comment s'exprime l'opérateur d^1 de $F^1(M'')$ dans cette décomposition. Soit $(x', x) \in F_p(M''_{p+q})$ tel que $d(x', x) \in F_{p-1}(M''_{p+q-1})$; alors l'opérateur d^1 de $E^1(M'')$ transforme la classe de (x', x) dans la classe de $d(x', x) = (dx' + g(x), -dx)$.

Ainsi, pour $\xi' \in E_{p,q}^1(M')$ et $\xi \in E_{p-1,q}^1(M)$, on a

$$d^1(\xi', \xi) = (d^1\xi' + g^1(\xi), -d^1\xi);$$

en d'autres termes, $E^1(M'')$ est le "mapping-cylinder" de l'application $g^1 : E^1(M) \rightarrow E^1(M')$.

Appliquons à ce mapping cylinder la suite exacte (1), en y remplaçant M , M' et g par $E^1(M)$, $E^1(M')$ et g^1 ; il vient une suite exacte

$$(4) \quad \dots \rightarrow E_{p+1,q}^2(M'') \rightarrow E_{p,q}^2(M) \xrightarrow{g^2} E_{p,q}^2(M') \rightarrow E_{p,q}^2(M'') \rightarrow \dots,$$

où g^2 est l'homomorphisme induit par g .

2. Enoncé du double théorème de Moore.

Hypothèses du théorème : soient M, M' et $g : M \rightarrow M'$ comme dans le n° 1. Supposons en outre donnés deux $\wedge$ -modules gradués U et U' (avec $U_q = 0$ et $U'_q = 0$ pour $q < 0$), et un $\wedge$ -homomorphisme $h : U \rightarrow U'$, conservant les degrés. Supposons aussi donnés deux $\wedge$ -modules différentiels gradués N et N' , et un $\wedge$ -homomorphisme $\bar{g} : N \rightarrow N'$ compatible avec les graduations et les opérateurs différentiels (ces derniers notés $\bar{d}$). On suppose que $N_p = 0$ et $N'_p = 0$ pour $p < 0$, et que, pour $p \geq 0$, N_p et N'_p sont $\wedge$ -libres. Enfin, supposons donné un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E^1(M) & \xrightarrow{g^1} & E^1(M') \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \Psi' \\ U \otimes_{\wedge} N & \xrightarrow{h \otimes \bar{g}} & U' \otimes_{\wedge} N' \end{array}$$

où Ψ et Ψ' sont compatibles avec les bigraduations (i.e : Ψ envoie $E_{p,q}^1(M)$ dans $U_q \otimes N_p$, et de même pour Ψ'), ainsi qu'avec les opérateurs différentiels : dans $U \otimes N$, on considère d défini par $d(u \otimes n) = (-1)^q u \otimes (\bar{d}n)$ pour $u \in U_q$; de même $\bar{d}$ dans $U' \otimes N'$; dans $E^1(M)$ et $E^1(M')$, on considère les opérateurs d^1 .
On suppose en outre que

$$\Psi_* : E^2(M) \rightarrow H(U \otimes N) \quad \text{et} \quad \Psi'_* : E^2(M') \rightarrow H(U' \otimes N')$$

sont des isomorphismes.

Sous toutes les hypothèses précédentes, on a les deux théorèmes suivants :

Théorème A.— Si $g_* : H(M) \rightarrow H(M')$ est un isomorphisme, si $h : U \rightarrow U'$ est un isomorphisme, et si l'anneau $\wedge$ est facteur direct de U_0 , alors $\bar{g}_* : H(N) \rightarrow H(N')$ est un isomorphisme.

Théorème B.— Si $g_* : H(M) \rightarrow H(M')$ est un isomorphisme, si $\bar{g}_* : H(N) \rightarrow H(N')$ est un isomorphisme, et si l'anneau $\wedge$ est facteur direct de $H_0(N)$, alors $h : U \rightarrow U'$ est un isomorphisme.

Rappelons pour mémoire le théorème bien connu :

Théorème C.— Si $h : U \rightarrow U'$ est un isomorphisme, et si $\bar{g}_* : H(N) \rightarrow H(N')$ est un isomorphisme, alors $g_* : H(M) \rightarrow H(M')$ est un isomorphisme. (En effet, $g^2 : E^2(M) \rightarrow E^2(M')$ est alors un isomorphisme, d'où la conclusion suit par un raisonnement connu).

Remarque : avant de démontrer ces théorèmes, observons qu'ils s'appliquent à l'homologie des espaces fibrés, dans le cas où le groupe fondamental de la base opère trivialement dans l'homologie de la fibre. Alors M désigne le complexe des chaînes (singulières cubiques) de l'espace fibré, N celui des chaînes de la base et U l'homologie de la fibre. Soit $\bar{\Phi}$ une application continue d'un tel espace fibré X dans un espace fibré X' , compatible avec les fibrations ; le théorème A dit que si $\bar{\Phi}$ induit un isomorphisme des homologies des espaces fibrés et un isomorphisme des homologies des fibres, alors $\bar{\Phi}$ induit un isomorphisme des homologies des bases. Les théorèmes B et C s'interprètent de même.

3. Démonstration des théorèmes A et B.

Lemme 1.— Sous les hypothèses du théorème A, les assertions suivantes sont équivalentes : $(\alpha_p) \quad H_s(N) \rightarrow H_s(N')$ est un isomorphisme pour $s \leq p$;

$(\beta_p) \quad E_{s,0}^2(M) \rightarrow E_{s,0}^2(M')$ est un isomorphisme pour $s \leq p$;

$(\gamma_p) \quad E_{s,q}^2(M) \rightarrow E_{s,q}^2(M')$ est un isomorphisme pour $s \leq p$ et tout entier q

En effet, (β_p) signifie que $H_s(U_0 \otimes N) \rightarrow H_s(U'_0 \otimes N')$ pour $s \leq p$,

et (γ_p) signifie que $H_s(U_q \otimes N) \rightarrow H_s(U'_q \otimes N')$ pour $s \leq p$ et tout q . Or

(β_p) entraîne (α_p) parce que $U_0 \rightarrow U'_0$ est un isomorphisme et que $\wedge$ est facteur direct de U_0 ; (α_p) entraîne (γ_p) à cause du "théorème des coefficients universels" (compte tenu du fait que N_p et N'_p sont $\wedge$ -libres) ; enfin, (γ_p) entraîne trivialement (β_p) .

Le lemme 1 étant prouvé, il suffit, pour établir le théorème A, de montrer que (α_p) est vrai pour tout p . Or c'est trivial pour $p < 0$. Montrons que (α_p) entraîne (α_{p+1}) ; d'après le lemme 1, il revient au même de montrer que (γ_p) entraîne (β_{p+1}) . D'après la suite exacte (4), (γ_p) implique que $E_{s,q}^2(M'') = 0$ pour $s \leq p$ et tout q . Considérons $E_{s,0}^2(M'')$ pour $s \leq p+2$; ses éléments sont des cycles pour toutes les différentielles d^r ($r \geq 2$), et seul 0 est un bord pour ces différentielles. Donc $E_{s,0}^2(M'') \cong E_{s,0}^\infty(M'')$, et ce dernier module est nul, puisque $E^\infty(M'')$ est le module bigradué associé à $H(M'')$, lequel est nul d'après la suite exacte (1) et l'hypothèse suivant laquelle $g_\times: H(M) \rightarrow H(M')$ est un isomorphisme. Ainsi $E_{s,0}^2(M'') = 0$ pour $s \leq p+2$; la suite exacte (4) montre alors que $E_{s,0}^2(M'') \rightarrow E_{s,0}^2(M')$ est un isomorphisme pour $s \leq p+1$, ce qui est l'assertion (β_{p+1}) à démontrer.

Le théorème B se prouve de la même manière. On établit d'abord :

Lemme 2.— Sous les hypothèses du théorème B, les assertions suivantes sont équivalentes :

$(\alpha_q) \quad U_s \rightarrow U'_s$ est un isomorphisme pour $s \leq q$;

$(\beta_q) \quad E_{0,s}^2(M) \rightarrow E_{0,s}^2(M')$ est un isomorphisme pour $s \leq q$;

$(\gamma_q) \quad E_{p,s}^2(M) \rightarrow E_{p,s}^2(M')$ est un isomorphisme pour $s \leq q$, et tout entier

p .

Une fois prouvé la lemme 2, on montre que (γ_q) entraîne (β_{q+1}) . D'après la suite exacte (4), (γ_q) entraîne $E_{p,s}^2(M'') = 0$ pour $s \leq q$ et tout p . Considérons $E_{0,s}^2(M'')$ et $E_{1,s}^2(M'')$ pour $s \leq q+1$; pour des raisons de degré, leurs éléments sont des cycles pour toutes les différentielles d^r ($r \geq 2$), et seul 0 est un bord, à cause de (γ_q) . Donc, pour $s \leq q+1$, on a $E_{0,s}^2(M'') \approx E_{0,s}^\infty(M'') = 0$, $E_{1,s}^2(M'') \approx E_{1,s}^\infty(M'') = 0$. Alors la suite exacte (4) montre que $E_{0,s}^2(M) \rightarrow E_{0,s}^2(M')$ est un isomorphisme pour $s \leq q+1$, et ceci est l'assertion (β_{q+1}) à démontrer.

4. Démonstration du théorème 2 (de l'exposé 2).

Soit A une DGA-algèbre, et soit M un DGA-module sur A . On définit sur M une filtration, en appelant $F_p(M)$ le sous- A -module de M engendré par les éléments de degré $\leq p$. Il est immédiat que toutes les conditions imposées à un module différentiel gradué et filtré (n° 1) sont remplies.

Dans les hypothèses du théorème 2, l'application $g: M \rightarrow M'$ est compatible avec les filtrations. Choisissons une A -base homogène de M ; ceci définit un isomorphisme $\varphi: M \approx A \otimes_\Lambda N$, où N est un Λ -module ayant une base homogène; l'application $M \rightarrow \bar{M}$ de M sur son quotient (Exp. 1, n° 4) définit un isomorphisme $N \approx \bar{N}$; par cet isomorphisme, on transporte à N l'opérateur différentiel $\bar{d}$ de $\bar{M}$ (on notera encore $\bar{d}$ l'opérateur de N). Par l'isomorphisme φ , la filtration de M se transporte à $A \otimes N$; on a $F_p(A \otimes N) = \sum_{s \leq p} A \otimes N_s$. Alors φ induit un isomorphisme de $E_{p,q}^0(M)$ sur $A_q \otimes N_p$, isomorphisme qui transforme l'opérateur d^0 dans l'opérateur de $A \otimes N$ défini par $d^0(a \otimes n) = (da) \otimes n$. Faisons de même pour M' . On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E^0(M) & \xrightarrow{g^0} & E^0(M') \\ \downarrow \varphi^0 & & \downarrow \varphi'^0 \\ A \otimes N & \xrightarrow{f \otimes \bar{g}} & A' \otimes N' \end{array}$$

où φ^0 et φ'^0 sont des isomorphismes compatibles avec les bigraduations et les opérateurs différentiels; $\bar{g}: N \rightarrow N'$ est l'homomorphisme de $\bar{N}$ dans $\bar{N}'$ induit par g , il est compatible avec les opérateurs différentiels $\bar{d}$ de N et N' .

Or, N et N' étant libres, l'homologie de $A \otimes N$ (resp. $A' \otimes N'$) pour l'opérateur d^0 s'identifie à $H(A) \otimes N$, resp. $H(A') \otimes N'$. Si dans le diagramme précédent on passe à l'homologie, on trouve exactement le diagramme du paragraphe n° 2 ci-dessus, où U serait remplacé par $H(A)$ et U' par $H(A')$. On peut donc appliquer le théorème A [Voir Erratum, page 1 de l'Exposé 13] : $H(M) \xrightarrow{\sim} H(M')$ est bien un isomorphisme en vertu de l'acyclicité de M et de M' ; l'anneau Λ est bien facteur direct de $H_0(A) = U$, à cause de l'augmentation de A . Le théorème A dit que si $f_* : H(A) \xrightarrow{\sim} H(A')$ est un isomorphisme, alors $g_* : H(M) \xrightarrow{\sim} H(M')$ est aussi un isomorphisme. Et ceci établit le théorème 2 de l'exposé 2.

5. Notion générale de "construction".

Une construction consiste dans la donnée :

- 1) d'une DGA-algèbre A (sur l'anneau Λ) ;
- 2) d'un Λ -module gradué N (tel que $N_q = 0$ pour $q < 0$) et d'une augmentation $\eta : N_0 \rightarrow \Lambda$;
- 3) d'un opérateur différentiel sur le A -module à gauche $M = A \otimes_\Lambda N$, qui fasse de M un DGA-module sur A , lorsqu'on utilise sur M l'augmentation η définie par $\eta(a \otimes n) = \xi(a) \eta(n)$.

Une construction (A, N, M) est dite acyclique si M est acyclique.

Soit (A, N, M) une construction. L'application $M \rightarrow \bar{M}$ de M sur le module quotient associé, induit un isomorphisme $N \cong \bar{N}$; on transporte à N l'opérateur différentiel $\bar{d}$ de $\bar{M}$, et N devient un DGA-module sur Λ . Ce DGA-module N s'appelle le module final de la construction ; A s'appelle l'algèbre initiale de la construction.

L'application $n \rightarrow 1 \otimes n$ de N dans M permet d'identifier N à un sous- Λ -module de M (mais cette identification n'est pas compatible avec les opérateurs différentiels $\bar{d}$ et d de N et M).

Exemple : la donnée d'une A -base homogène d'un DGA-module M sur une DGA-algèbre A , définit une construction.

Théorème 3. - Soit donnée une DGA-algèbre A . Il existe au moins une construction acyclique (A, N, M) ayant A pour algèbre initiale. Il existe même une construction satisfaisant à la condition supplémentaire :

(B) l'augmentation $\eta : N_0 \rightarrow \Lambda$ est un isomorphisme ; pour $k \geq 0$, l'opérateur différentiel d de M applique biunivoquement N_{k+1} sur le sous-module

de M_k formé des éléments d'augmentation nulle (si $k = 0$), resp. des cycles de degré k (si $k \geq 1$).

Deux constructions satisfaisant à (B) sont isomorphes.

(Le sens du mot "isomorphe" sera précisé au cours de la démonstration).

Remarque : la condition (B) entraîne l'acyclicité de M .

Démonstration de l'unicité : L'unicité (à un isomorphisme près) va résulter de la proposition suivante :

Proposition 1.- Soient (A, N, M) et (A', N', M') deux constructions dont la seconde satisfait à (B). Pour tout DGA-homomorphisme $f : A \rightarrow A'$, il existe un DGA-homomorphisme $g : M \rightarrow M'$ et un seul qui soit compatible avec f et envoie 0 dans N' .

Prouvons cette proposition. Un tel g est déterminé par sa restriction $\bar{g}$ à N , puisque

$$(5) \quad g(a \otimes n) = f(a) \otimes \bar{g}(n) .$$

Donnons-nous donc un $\wedge$ -homomorphisme $\bar{g} : N \rightarrow N'$; pour que g défini par (5) soit un DGA-homomorphisme, il faut et il suffit que

$$(6) \quad \eta' \bar{g}(n) = \eta(n) , \quad n \in N_0 ,$$

$$(7) \quad d'(1 \otimes \bar{g}(n)) = g d(1 \otimes n) , \quad n \in N_k \quad (k \geq 1),$$

où, dans le second membre de (7), g est calculé par (5). Par récurrence sur le degré k de n , les relations (6) et (7) entraînent l'existence et l'unicité de $\bar{g}$, compte tenu de la condition (B) ; et la linéarité de $\bar{g}$ suit de l'unicité.

La proposition 1 étant ainsi prouvée, appliquons-la à deux constructions (A, N, M) et (A', N', M') sur la même DGA-algèbre A , ces constructions étant supposées toutes deux satisfaire à (B). On prend pour $f : A \rightarrow A'$ l'application identique. La prop. 1 définit $g : M \rightarrow M'$ et $g' : M' \rightarrow M$; en composant, $g' \circ g : M \rightarrow M$ satisfait aux conditions de la proposition 1, donc, en vertu de l'unicité, c'est l'application identique de M . De même, $g \circ g'$ est l'application identique de M' . Ceci prouve l'isomorphisme des deux constructions, en précisant le sens du mot "isomorphisme".

Le reste de la démonstration du théorème 3 (preuve de l'existence d'une construction acyclique satisfaisant à (B)) fait l'objet du paragraphe suivant.

6. La "bar construction".

On va exhiber une construction (appelée la "bar construction" de A) qui satisfait à la condition (B) du théorème 3.

Notons $\bar{A}$ le $\wedge$ -module $A/\wedge$, qui est gradué et muni d'un opérateur différentiel (réduit de d par passage au quotient). Notons $\bar{A}^k$ le produit tensoriel (sur $\wedge$) $\bar{A} \otimes \dots \otimes \bar{A}$ (k facteurs); convenons que $\bar{A}^0 = \wedge$. Posons

$$N = \sum_{k \geq 0} \bar{A}^k,$$

et utilisons la notation $[a_1, \dots, a_k]$ à la place de $\bar{a}_1 \otimes \dots \otimes \bar{a}_k$ ($\bar{a}_i$ désignant l'image de $a_i \in A$ dans $\bar{A}$). L'élément $1 \in \wedge = N_0$ sera noté $[]$. Observons que $[a_1, \dots, a_k]$ est une fonction multilinéaire des a_i , nulle lorsque l'un d'eux est un scalaire. Graduons N en posant

$$\deg [a_1, \dots, a_k] = k + \sum_{i=1}^k \deg(a_i).$$

Dans le A -module $M = A \otimes N$, l'élément $a \otimes [a_1, \dots, a_k]$ sera noté simplement $a[a_1, \dots, a_k]$; si $a = 1$, on écrit simplement $[a_1, \dots, a_k]$ (ce qui est conforme à l'identification de N et d'un sous-module de M). Définissons un $\wedge$ -homomorphisme $s : M \rightarrow N$, de degré $+1$, par :

$$s(a[a_1, \dots, a_k]) = [a, a_1, \dots, a_k].$$

Utilisant la factorisation directe définie par l'augmentation de A , on voit que le noyau de s est $N = \sum_{q \geq 0} N_q$, et que l'image de s est $\sum_{q \geq 1} N_q$. On notera que $s[] = 0$, $ss = 0$.

Proposition 2.- Il existe, dans $M = A \otimes N$, un $\wedge$ -endomorphisme d , de degré -1 , qui satisfait aux deux conditions

$$(i) \quad d(ax) = (da)x + (-1)^{\deg(a)} a(dx), \text{ pour } a \in A, x \in M,$$

$$(ii) \quad dsx + sdx = x - (\eta x)[] \text{ pour } x \in M.$$

Un tel d est unique, et satisfait à

$$(iii) \quad \eta d = 0, \quad dd = 0.$$

Démonstration : d sera déterminé par ses valeurs sur N , car

$$(9), \quad d(a \otimes n) = (da) \otimes n + (-1)^{\deg(a)} a \cdot d(1 \otimes n).$$

L'application d ainsi prolongée à M satisfera à (i). Il reste à exprimer la condition (ii) : une fois d connu sur $\sum_{q \leq k} \bar{A}^q$, (ii) sert précisément à définir d sur $\bar{A}^{k+1}$, par

$$(10) \quad \begin{cases} d[a] = a[\] - [da] - (\xi a)[\] & \text{si } k = 0, \\ d[a, a_1, \dots, a_k] = a[a_1, \dots, a_k] - sd(a[a_1, \dots, a_k]) & \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

Ces formules prouvent l'unicité de d ; pour prouver l'existence, il suffit de vérifier que le second membre de (10) est nul quand $a = 1$, c'est-à-dire que

$$(11) \quad [a_1, \dots, a_k] = sd[a_1, \dots, a_k].$$

Or, on a déjà, d'après la deuxième formule (10) appliquée à $k-1$:

$$d[a_1, \dots, a_k] = a_1[a_2, \dots, a_k] - sd(a_1[a_2, \dots, a_k]);$$

en appliquant s aux deux membres et observant que $ss = 0$, on obtient (11).

L'existence et l'unicité de d satisfaisant à (i) et (ii) est donc prouvée. Montrons maintenant que $\eta d = 0$, $dd = 0$. Il suffit de prouver que $\eta dx = 0$, $ddx = 0$ quand $x \in N$, car (i) montre que ce sera alors vrai pour tout $x \in M$. Pour $x \in N$, la relation $\eta dx = 0$ est immédiate. Quant à $ddx = 0$, on la montre par récurrence sur le degré de $x \in N$; si c'est prouvé pour les degrés $\leq q$, on a aussi $ddy = 0$ pour $y \in M_q$. Soit alors $x \in N_{q+1}$; on a $x = sy$, $y \in M_q$, d'où $ddx = ddsy = -dsdy + dy$; or $ds(dy) + sd(dy) = dy$, et $ddy = 0$ par l'hypothèse de récurrence. Ceci prouve bien que $ddx = 0$.

La proposition 2 est donc établie. Elle montre que l'opérateur d , sur $M = A \otimes N$, définit une construction (A, N, d) . La condition (B) du théorème 2 est satisfaite ; en effet :

1) d applique biunivoquement N_{k+1} dans M_k . Car si $x \in N_{k+1}$, on a $dx = 0$ et $\eta x = 0$; d'où, d'après (ii), $x = sdx$; et $dx = 0$ entraîne $x = 0$.

2) tout $x \in M_k$, tel que $dx = 0$ et $\eta x = 0$, est dans l'image de N_{k+1} par d ; car on a $x = dsx$.

La construction (A, N, M) qui vient d'être définie s'appelle la bar construction. Elle a été introduite par Eilenberg-MacLane dès 1950 (voir par exemple Eilenberg-MacLane, Ann. of Math. 58, 1953, p.55-106). D'une façon plus précise, ces auteurs n'ont pas considéré le A -module acyclique M , mais seulement le $\wedge$ -module final N (qui n'est pas acyclique), qu'ils ont appelé la "bar construction normalisée".

Nous utiliserons désormais les notations suivantes : $\overline{B}(A)$ pour le module final N de la bar construction, $B(A)$ pour le module acyclique M . On a donc $B(A) = A \otimes \overline{B}(A)$. On notera d l'opérateur différentiel de $B(A)$, $\bar{d}$ celui de $\overline{B}(A)$.

Conformément à la proposition 1 (n° 5), tout DGA-homomorphisme $A \rightarrow A'$ définit des DGA-homomorphismes de modules $B(A) \rightarrow B(A')$ et $\overline{B}(A) \rightarrow \overline{B}(A')$; on peut les expliciter d'une manière évidente. Ainsi $B(A)$ et $\overline{B}(A)$ sont des foncteurs covariants de la DGA-algèbre A .

Remarque finale : lorsque A possède une $\wedge$ -base homogène contenant l'élément unité 1, $\overline{B}(A)$ possède évidemment une $\wedge$ -base homogène contenant l'élément $[]$, et $B(A)$ possède une A -base homogène. Dans le cas particulier où A est l'algèbre d'un groupe Π , munie de l'augmentation habituelle, $B(A)$ n'est autre que le classique "complexe non homogène" (normalisé) qui permet de calculer l'homologie et la cohomologie du groupe Π à coefficients dans un Π -module.
