Séminaire Henri Cartan

H. Cartan

Détermination des algèbres $H_*(\pi, n; Z)$

Séminaire Henri Cartan, tome 7, n° 1 (1954-1955), exp. n° 11, p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_1_A11_0>

DÉTERMINATION DES ALGÈBRES $H_*(\Pi,n;Z)$

(Exposé de H. CARTAN, 31.1.1955)

On se propose de calculer les algèbres d'homologie $H_*(\Pi,n;Z)$ à coefficients entiers, munies de leurs puissances divisées.

1.- Les opérations Ψ_h.

Ceci est un complément à l'Exposé n° 6. On y a défini une opération $\Psi_p : {}_p\Pi \longrightarrow H_2(\Pi,1;Z_p)$ pour p premier. Plus généralement, on va, pour tout entier $h \geqslant 2$, définir une application

$$\Psi_h : {}_h\Pi \longrightarrow H_2(\Pi,1;Z_h) \quad .$$

Plaçons-nous dans une construction Z-libre et acyclique (A,N,M) ayant pour algèbre initiale $A = Z(\Pi)$, Π étant un groupe abélien (noté multiplicativement). Soit $a \in {}_h\Pi$, donc $a^h = 1$. Prenons $x \in M_1$ tel que $dx = a - 1$, puis $y \in M_2$ tel que

$$dy = (1+a+\ldots+a^{h-1})x \quad . \tag{1}$$

Par projection dans N, on obtient $\bar{x}$ et $\bar{y}$ tels que

$$\bar{d}\,\bar{x} = 0 \quad , \quad \bar{d}\,\bar{y} = h\,\bar{x} \quad . \tag{2}$$

La classe d'homologie de $\bar{y}$, dans $H_*(N \otimes Z_h) \approx H_*(\Pi,1;Z_h)$, est indépendante des choix de x et de y (démonstration analogue à celle de la proposition 2, Exposé n° 6). Par définition, l'application Ψ_h associe à l'élément a la classe d'homologie de $\bar{y}$. On a $\Psi_h(1) = 0$.

La relation (2) entraîne : si $\delta_h : H_2(\Pi,1;Z_h) \to H_1(\Pi,1;Z)$ désigne l'opérateur de Bockstein, on a

$$\boxed{\delta_h \Psi_h = \sigma} \quad \text{sur le sous-groupe } {}_h\Pi \quad . \tag{3}$$

Proposition 1.- *Soient* a *et* a' *deux éléments de* ${}_h\Pi$. *On a*

$$\Psi_h(aa') = \Psi_h(a) + \Psi_h(a') \quad \text{si } h \text{ est impair,} \tag{4}$$

$$\Psi_h(aa') = \Psi_h(a) + \Psi_h(a') + (h/2)(\sigma a).(\sigma a') \quad \text{si } h \text{ est pair.} \tag{4'}$$

(Ces relations ont lieu dans $H_2(\Pi,1;Z_h)$).

Démonstration : soient x et x' tels que $dx = a-1$, $dx' = a'-1$. Alors $d(x+ax') = aa'-1$. On vérifie que

$$(1+aa'+\ldots+(aa')^{h-1})(x+ax') = (1+\ldots+a^{h-1})x + (1+\ldots+a'^{h-1})x' - dw \quad , \text{ avec}$$

$$w = \Big(\sum_{0\leqslant q<p\leqslant h-1} a^p a'^q\Big)xx' \quad .$$

Soient y , y' , Y tels que $dy = (1+\ldots+a^{h-1})x$, $dy' = (1+\ldots+a'^{h-1})x'$, $dY = (1+\ldots+(aa')^{h-1})(x+ax')$. Alors $Y-y-y'+w$ est un cycle de M ; en projetant sur N , on voit que $\bar{Y}-\bar{y}-\bar{y}'+\bar{w}$ est un $\bar{d}$-bord. Or on a

$$\bar{w} = \frac{h(h-1)}{2}\,\bar{x}\,\bar{x}' \quad ;$$

modulo h , $\bar{w}$ est nul si h est impair, égal à $-(h/2)\bar{x}\,\bar{x}'$ si h est pair. D'où la proposition.

Proposition 2.- Si $a\in\Pi$ et $a^{hk} = 1$, on a

$$\Psi_{hk}(a) = \Psi_h(a^k) \qquad \text{(relation dans } H_2(\Pi,1;Z_h)\text{)} \quad . \tag{5}$$

Démonstration : soit toujours x tel que $dx = a-1$. Posons $x' = (1+\ldots+a^{k-1})x$. Alors $dx' = a^k-1$. L'élément $\Psi_h(a^k)$ est dans la classe de $\bar{d}$-homologie (mod. h) de $\bar{y}'$, où y' est tel que

$$dy' = (1+a^k+\ldots+a^{k(h-1)})x' \quad .$$

Le second membre étant égal à $(1+a+\ldots+a^{hk-1})x$, la classe de $\bar{y}'$ est égale à $\Psi_{hk}(a)$. D'où la proposition.

On peut définir explicitement une application Ψ_h dans la bar construction $\overline{\mathcal{B}}(Z(\Pi))$ à coefficients entiers. Si $a \in {}_h\Pi$, il suffit de prendre pour x l'unique élément de $\overline{\mathcal{B}}$ tel que $dx = a$ (en fait, x est la suspension $[a]$), puis on prend pour y l'unique élément de $\overline{\mathcal{B}}$ tel que $dy = (1+\ldots+a^{h-1})x$. On a alors, dans la bar construction $\overline{\mathcal{B}}(Z(\Pi))$,

$$\bar{d}\,\Psi_h(a) = h\sigma(a) = h[a] \quad . \tag{6}$$

De plus, il est immédiat que

$$\Psi_{hk}(a) = k\,\Psi_h(a) \quad \text{si} \quad a \in {}_h\Pi \qquad \text{(relation valable dans } \overline{\mathcal{B}}(Z(\Pi))\text{)}. \tag{7}$$

2.- Complexes élémentaires.

On appellera complexe élémentaire une algèbre différentielle graduée sur l'anneau Z des entiers, munie de puissances divisées (définies pour les éléments de degré pair $\geqslant 2$) compatibles avec la différentielle, qui a l'une des formes suivantes :

Type (I) : $E(x,2q-1)$, algèbre extérieure à un générateur x de degré impair, $dx = 0$;

$P(x,2q)$, algèbre des polynômes divisée à un générateur x de degré pair, $dx = 0$.

Type (II) : $E(x,2q-1) \otimes P(y,2q)$, avec $dx = 0$, $dy = hx$ (h entier) ;

$P(x,2q) \otimes E(y,2q+1)$, avec $dx = 0$, $dy = hx$.

L'homologie d'un complexe élémentaire se calcule immédiatement ; c'est trivial pour le type (I) ; pour $E(x,2q-1) \otimes P(y,2q)$, les cycles homogènes sont, outre 1 les multiples entiers de $x,xy,\ldots,x\gamma_k(y),\ldots,$ dont les classes d'homologie sont d'ordre h ; pour $P(x,2q) \otimes E(y,2q+1)$, les cycles homogènes sont, outre 1 , les multiples entiers de $x,\ldots,\gamma_k(x),\ldots$; la classe d'homologie de $\gamma_k(x)$ est d'ordre kh . On notera que les γ_k ne passent pas à l'algèbre d'homologie (par exemple, si $h = 3$, $3x$ est un bord, mais $\gamma_2(3x)$ n'est pas un bord).

Soit K une algèbre différentielle graduée, Z-libre, munie de puissances divisées compatibles avec la différentielle. Un homomorphisme f d'un complexe élémentaire A dans K , compatible avec toutes les structures, est défini par la connaissance de l'élément $f(x)$ dans le cas (I), de l'élément $f(y)$ dans le cas (II). Un tel homomorphisme existe sous la seule condition que $f(x)$ soit un cycle dans le cas (I) ; que $f(y)$ soit un cycle modulo h dans le cas (II).

Proposition 3.- Soit K une algèbre différentielle graduée anticommutative, Z-libre, et munie de puissances divisées. Supposons que K soit quotient d'une algèbre acyclique L à puissances divisées, l'application $L \longrightarrow K$ étant compatible avec les graduations, les différentielles, les produits et les puissances divisées. Soient f et f' deux homomorphismes d'un complexe élémentaire A dans K , compatibles avec toutes les structures. Supposons, dans le cas (I), que les cycles $f(x)$ et $f'(x)$ aient même image dans $H(K)$; supposons, dans le cas (II), que $f(y)$ et $f'(y)$, qui sont des cycles mod. h , aient même image dans $H(K \otimes Z_h)$. Alors les applications f et f' sont homotopes.

Démonstration : On cherche une application linéaire $s : A \longrightarrow K$, augmentant le degré de 1 , et telle que $f - f' = ds + sd$. Observons d'abord que les puissances

divisées de K passent à l'homologie : si $u \in K$ est de degré impair ≥ 3, $\gamma_k(du)$ est le bord d'un élément de K ; en effet, soit $\bar{u} \in L$ dont u soit l'image par la projection $L \to K$; $\gamma_k(du)$ est l'image de $\gamma_k(d\bar{u})$, lequel est un cycle de L, donc le bord d'un élément $\bar{v}_k \in L$; alors $\gamma_k(du) = dv_k$, v_k désignant l'image de $\bar{v}_k$ dans K.

Cela posé, examinons d'abord le cas où le complexe élémentaire A est du type (I). Si $A = E(x, 2q-1)$, on a $f(x) - f'(x) = du$ $(u \in K)$, et il suffit de définir s par $s(1) = 0$, $s(x) = u$. Si $A = P(x, 2q)$, on a $f(x) - f'(x) = du$, donc $\gamma_k(f(x)) - \gamma_k(f'(x)) = dv_k$ $(v_1 = u)$, et il suffit de prendre $s(1) = 0$, $s(\gamma_k(x)) = v_k$. Supposons désormais que A soit du type (II) ; étudions les deux cas possibles :

Premier cas : $A = E(x, 2q-1) \otimes P(y, 2q)$, avec $dy = hx$. On a par hypothèse $f(y) - f'(y) = hu + dv$ $(u \in K, v \in K)$, d'où $f(x) - f'(x) = du$. Pour montrer que f et f' définissent des applications homotopes de A dans K, il suffit de le prouver d'une part lorsque $f(y) - f'(y) = hu$, d'autre part lorsque $f(y) - f'(y) = dv$. Si $f(y) - f'(y) = hu$, $f(x) - f'(x) = du$, alors $\gamma_{k+1}(f(y)) - \gamma_{k+1}(f'(y))$ est divisible par l'entier h, et il suffit de prendre

$$s(\gamma_k(y)) = 0 \ , \ s(x\gamma_k(y)) = (1/h)(\gamma_{k+1}(f(y)) - \gamma_{k+1}(f'(y))) \ .$$

Si $f(y) - f'(y) = dv$, $f(x) - f'(x) = 0$, posons $\gamma_k(dv) = dv_k$, puis $w_k = \sum_{1 \leq i \leq k} \gamma_{k-i}(f'(y))v_i$. On prend

$$s(1) = 0 \ , \ s(\gamma_k(y)) = w_k \ , \ s(x\gamma_k(y)) = -f(x)\, w_k \ .$$

Deuxième cas : $A = P(x, 2q) \otimes E(y, 2q+1)$, avec $dy = hx$. Il suffit encore d'examiner séparément le cas où $f(y) - f'(y) = hu$, et le cas où $f(y) - f'(y) = dv$. Supposons d'abord $f(y) - f'(y) = dv$, $f(x) - f'(x) = 0$. Il suffit alors de prendre

$$s(\gamma_k(x)) = 0 \ , \ s(y\gamma_k(x)) = v\,\gamma_k(f(x)) \ .$$

Reste enfin le cas où $f(y) - f'(y) = hu$, $f(x) - f'(x) = du$.
Soit $\bar{u} \in L$, d'image u dans K ; soit, pour chaque entier $k \geq 1$, $\bar{v}_k \in L$ tel que $d\bar{v}_k = \gamma_k(d\bar{u})$, d'où (notant v_k l'image de $\bar{v}_k$ dans K), $dv_k = \gamma_k(du)$; on peut supposer $\bar{v}_1 = \bar{u}$. On a

$$f(y)\,\gamma_k(f(x)) - f'(y)\,\gamma_k(f'(x)) = h(k+1)\,[\gamma_k(f'(x))v_1 + \gamma_{k-1}(f'(x))v_2 + \dots]$$
$$- d\{f'(y)\,[\gamma_{k-1}(f'(x))v_1 + \gamma_{k-2}(f'(x))v_2 + \dots]\}$$
$$+ h\,[\gamma_{k-1}(f'(x))(u.du - 2v_2) + \gamma_{k-2}(f'(x))(u.\gamma_2(du) - 3v_3) + \dots] \ .$$

Montrons que chacune des quantités $u.du-2v_2$, $u.\gamma_2(du)-3v_3$, etc. est le bord d'un élément de K . Ces quantités sont respectivement les projections, dans K , des éléments suivants de L :

$$\bar{u}.d\bar{u} - 2\bar{v}_2 \quad , \quad \bar{u}.\gamma_2(d\bar{u}) - 3\bar{v}_3 \quad , \quad \dots \quad ,$$

et un calcul immédiat montre que ceux-ci sont des cycles de L , donc des bords puisque L est acyclique ; par projection $L \xrightarrow{\text{en}} K$, il résulte bien que $u.du-2v_2$, ... , sont des bords d'éléments de K .

Alors on voit que

$$f(y)\,\gamma_k(f(x)) - f'(y)\,\gamma_k(f'(x)) = h(k+1)w_{k+1} + dt_k \quad ,$$

où $t_k \in K$, et $w_{k+1} = \gamma_k(f'(x))v_1 + \gamma_{k-1}(f'(x))v_2 + \dots$

Prenons alors

$$s(1) = 0 \quad , \quad s(\gamma_k(x)) = w_k \quad , \quad s(y\gamma_k(x)) = t_k \quad ;$$

on vérifie que $f - f' = ds + sd$, et ceci achève la démonstration de la proposition 3 .

3.- Produit tensoriel de complexes élémentaires.

Soient A_i des complexes élémentaires (en nombre fini ou infini). Soit X leur produit tensoriel (limite inductive des produits tensoriels finis), muni de sa structure d'algèbre différentielle graduée à puissances divisées. Pour définir un homomorphisme f de X dans une algèbre K (satisfaisant à toutes les conditions de la proposition 3), il suffit de se donner les images des générateurs des complexes A_i , de manière que soient satisfaites les conditions énoncées dans les trois lignes précédant la proposition 3.

Proposition 3 bis.- Soient f et f' deux tels homomorphismes de X dans K . Supposons que, pour chaque générateur x_i d'un complexe A_i du premier type, $f(x_i)$ et $f'(x_i)$ soient des cycles homologues de K ; et que, pour chaque générateur y_i d'un complexe A_i du second type, $f(y_i)$ et $f'(y_i)$ aient même image dans $H(K \otimes Z_{h_i})$, en désignant par h_i l'entier tel que $dy_i = h_i x_i$ dans le complexe A_i . Alors les applications f et f' sont homotopes.

En effet, on sait classiquement fabriquer, dans un produit tensoriel, un opérateur d'homotopie lorsqu'on a un opérateur d'homotopie dans chaque facteur tensoriel.

Calcul des cycles dans un produit tensoriel X de complexes élémentaires.- Chaque élément de X est somme de monômes, dont chacun est un produit d'éléments générateurs ou de puissances divisées d'éléments générateurs de degré pair. Si dans un monôme on remplace x_i et y_i par nx_i et ny_i (n entier), le monôme est multiplié par une puissance de n, dont l'exposant $k(i)$ est indépendant de n ; nous dirons que $k(i)$ est le i-ième poids du monôme. L'opérateur différentiel de X conserve évidemment les poids ; on a donc, sur X, une multigraduation définie par les poids, et cette multigraduation passe aux cycles et à l'homologie de X. Il suffit donc de calculer les cycles isobares (ayant un système de poids donné) et les bords des éléments isobares, pour déterminer $H(X)$.

Pour qu'un cycle isobare définisse un élément d'ordre infini de $H(X)$, il faut et il suffit que tous les poids $k(i)$ relatifs aux complexes du second type soient nuls ; autrement dit, c'est un cycle du produit tensoriel X' des complexes du premier type. Tout autre cycle définit, dans $H(X)$, un élément d'ordre fini. D'ailleurs, soit X'' le produit tensoriel des complexes du second type ; on a $X = X' \otimes X''$, et $H(X) = X' \otimes H(X'')$, tous les éléments de $H(X'')$ étant d'ordre fini (sauf les scalaires, de degré 0).

Proposition 4.- Soit X un produit tensoriel de complexes élémentaires, et f un homomorphisme de X dans une algèbre K satisfaisant à toutes les conditions de la proposition 1. Soient x_i et y_i les générateurs du i-ième complexe A_i de X, supposé du second type, avec $dy_i = h_i x_i$. Soit u un cycle isobare de X, dont le poids $k(i)$ soit > 0. Alors l'image $f_*(u)$ de u dans l'homologie $H(K)$ est un élément dont l'ordre divise $(h_i)^{k(i)}$; autrement dit, on a $(h_i)^{k(i)} . f_*(u) = 0$.

Démonstration : définissons un homomorphisme f' de X dans K, en posant $f'(x_i) = h_i f(x_i)$, $f'(y_i) = h_i f(y_i)$, les images des générateurs des autres complexes A_j ($j \neq i$) étant les mêmes pour f' que pour f. Alors l'image de $(h_i)^{k(i)} u$ dans $H(K)$, par f_*, est identique à l'image $f'_*(u)$. On va montrer que cette image est nulle. En effet, $f'(y_i)$ a une image nulle dans $H(K \otimes Z_{h_i})$; d'après la proposition 3 bis, f' est homotope à une application g telle que $g(x_i) = 0$, $g(y_i) = 0$. Et il est clair que $g(u) = 0$. C.Q.F.D.

4.- Les complexes élémentaires attachés à un groupe abélien Π.

Il suffit de dire quels sont leurs générateurs x (premier type), resp. x et y (deuxième type). On se donne une fois pour toutes un entier $n \geqslant 1$.

Complexes du premier type : pour chaque élément $u \in \Pi$, considérons le symbole $\sigma^n u$, qui définit un élément de $H_n(\Pi,n;Z)$ par suspension itérée. Chaque symbole $\sigma^n u$ va être le générateur x d'un complexe du premier type ; on l'affecte du degré n. Ces complexes sont tous des algèbres extérieures si n est impair, des algèbres de polynômes divisées si n est pair. Le produit tensoriel de tous les complexes élémentaires du premier type est donc l'algèbre universelle ayant pour base l'ensemble des éléments de Π, affectés du degré n.

Complexes du deuxième type : rappelons que, pour chaque p premier, on a défini (Exposé n° 9, paragraphe 1) des mots admissibles de hauteur n ; nous les appellerons désormais des p-mots. Nous appliquerons la définition de l'Exposé n°9 aussi dans le cas $p = 2$ (au lieu de la définition des mots admissibles donnée dans l'Exposé n° 10). Les p-mots sont, outre σ^n et $\sigma^{n-1}\varphi_p$, ceux d'une des formes suivantes : $\sigma^k\varphi_p\alpha$, $\sigma^{k+1}\gamma_p\alpha$, où α désigne un p-mot de degré pair, de hauteur $n-k-1$ $(0 \leqslant k \leqslant n-2)$, non nécessairement admissible, mais assujetti aux conditions suivantes : (i) la dernière lettre (à droite) est σ (première espèce) ou φ_p (deuxième espèce) ; (ii) pour chaque lettre φ_p ou γ_p du mot α, le nombre des lettres σ situées à droite est pair.

Les p-mots admissibles se correspondent ainsi par paires ; dans une même paire, les degrés diffèrent de 1. Si on considère la suite $(a_1,\dots,a_i,\dots)$ associée à un p-mot admissible (Exposé n° 9, paragraphe 6), les mots $\sigma^k\varphi_p\alpha$ sont ceux qui correspondent aux suites de hauteur n telles que $a_1 \equiv 1 \pmod{2p-2}$ et $\sum_i a_i > 1$; les mots $\sigma^{k+1}\gamma_p\alpha$ sont ceux qui correspondent aux suites de hauteur n telles que $a_1 \equiv 0 \pmod{2p-2}$ et $\sum_i a_i > 1$.

Pour des raisons qui vont apparaître, nous remplacerons désormais l'écriture $\sigma^{k+1}\gamma_p\alpha$ par l'écriture $\beta_p\sigma^k\varphi_p\alpha$ (β_p est le symbole de l'opérateur de Bockstein). En outre, dans l'écriture d'un mot de deuxième espèce, nous remplacerons la dernière lettre (à droite) φ_p par ψ_p.

De plus, on introduira, pour chaque p premier et chaque f entier $\geqslant 1$, le symbole ψ_{p^f} (cf. paragraphe 1), de hauteur 1 et de degré 2. Et on envisagera les mots de hauteur n de la forme $\sigma^{n-1}\psi_{p^f}$, dont le degré est $n+1$.

Nous pouvons maintenant dire quels complexes élémentaires du deuxième type on va associer au groupe Π. Ce seront :

1) les complexes pour lesquels x s'écrit $\sigma^n u$, et y s'écrit $\sigma^{n-1}\psi_{p^f}u$, où $u \in \Pi$ est tel que $p^f u = 0$ dans Π (notation additive). La différentielle d'un tel complexe sera donnée par

(9) $$d(\sigma^{n-1}\psi_{p^f}u) = (-1)^{n-1}\, p^f(\sigma^n u) \quad .$$

2) les complexes pour lesquels x s'écrit $\beta_p\sigma^k\varphi_p\alpha\, u$, et y s'écrit $\sigma^k\varphi_p\alpha\, u$, où $\sigma^k\varphi_p\alpha$ et $\beta_p\sigma^k\varphi_p\alpha$ sont des p-mots admissibles de hauteur n et de degré stable > 1 ; et où u est un élément de $\Pi/p\Pi$ si les p-mots sont de première espèce, un élément de ${}_p\Pi$ si les p-mots sont de deuxième espèce. La différentielle d'un tel complexe est donnée par

(10) $$d(\sigma^k\varphi_p\alpha\, u) = (-1)^k\, p(\beta_p\sigma^k\alpha\, u) \quad .$$

Bien entendu, on fait cela pour tous les p premiers (y compris $p = 2$). Pour un p donné, les complexes élémentaires du deuxième type seront dits p-primaires.

Ces complexes sont des foncteurs covariants de Π : si on a un homomorphisme $\Pi \to \Pi'$ de groupes abéliens, il définit un homomorphisme de chaque complexe élémentaire du premier type (resp. du second type) de Π dans un complexe élémentaire du premier type (resp. du second type) de Π'.

Considérons la bar construction itérée (à coefficients entiers) $\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(Z(\Pi))$, notée $\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(\Pi)$ pour simplifier. Pour chaque complexe élémentaire A attaché au groupe Π, on va définir un homomorphisme $A \to \overline{\mathcal{B}}^{(n)}(\Pi)$, compatible avec toutes les structures (graduation, multiplication, puissances divisées, différentielles), homomorphisme qui sera bien déterminé à une homotopie près. Supposons d'abord que A soit du premier type, donc engendré par un élément x de la forme $\sigma^n u$, avec $u \in \Pi$. Nous envoyons x dans un cycle de $\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(\Pi)$ ayant pour classe d'homologie l'image de u par la suspension itérée $\sigma^n : \Pi \to H_n(\Pi,n;Z)$. Supposons ensuite que A soit du deuxième type, donc engendré par deux éléments x et y tels que $dy = hx$, h entier (une puissance de p au signe près) ; y s'écrit $\sigma^{n-1}\psi_{p^f}u$, resp. $\sigma^k\varphi_p\alpha\, u$, et ceci définit, par composition des opérations indiquées dans cette écriture, un élément bien déterminé de $H_*(\Pi,n;Z_h)$. Choisissons un $y' \in \overline{\mathcal{B}}^{(n)}(\Pi)$ ayant pour image cet élément de $H_*(\Pi,n;Z_h)$; on a $dy' = hx'$. Envoyons l'élément y dans y', et x dans x' ; ceci définit une application $f : A \to \overline{\mathcal{B}}^{(n)}(\Pi)$, compatible avec tout. Il résulte de la proposition 3 (paragraphe 2) que f est unique à une homotopie près.

Pour tout produit tensoriel X de complexes élémentaires attachés au groupe abélien Π, on a donc un homomorphisme unique de l'homologie $H(X)$ dans l'algèbre d'homologie $H_*(\Pi,n;Z)$; cet homomorphisme est naturel vis-à-vis des homomorphismes de groupes abéliens $\Pi \to \Pi'$. Il est compatible avec les structures

multiplicatives, mais peut-être pas avec les puissances divisées (plus exactement, celles-ci n'existent pas, en général, dans $H(X)$). Si X est un produit de complexes p-primaires, l'image, dans $H_*(\Pi,n;Z)$, des éléments de degré >0 de $H(X)$, se compose d'éléments p-primaires, en vertu de la proposition 4.

5.- Etude d'une somme directe de groupes cycliques.

Nous allons faire un calcul (non canonique) de l'algèbre d'homologie $H_*(\Pi,n;Z)$ lorsque Π est de type fini. D'une manière pré-cise, supposons donnés des éléments $u_i \in \Pi$, en nombre fini, jouissant des propriétés suivantes : Π est somme directe des groupes cycliques engendrés par les u_i , et les u_i d'ordre fini ont pour ordre une puissance d'un nombre premier.

Considérons alors, parmi les complexes élémentaires attachés au groupe Π , les suivants :

(i) les complexes du premier type ayant pour générateur x un élément $\sigma^n u_i$, où u_i est un des générateurs précédents, d'ordre infini ;

(ii) pour chaque générateur u_i d'ordre p^f , le complexe du deuxième type dont les générateurs sont $\sigma^n u_i$ et $\sigma^{n-1}\mathcal{P}_{p^f} u_i$;

(iii) pour chaque générateur u_i d'ordre infini ou dont l'ordre est une puissance d'un p premier donné, tous les complexes du deuxième type dont la paire de générateurs est de la forme $\sigma^k\varphi_p\alpha u_i$, $\beta_p\sigma^k\varphi_p\alpha u_i$ (les 2 mots étant de première espèce) ;

(iv) pour chaque générateur u_i dont l'ordre est une puissance d'un p premier donné (soit p^f cet ordre), considérons l'élément $v_i = p^{f-1}u_i$, qui est d'ordre p , et tous les complexes du deuxième type dont la paire de générateurs est de la forme $\sigma^k\varphi_p\alpha v_i$, $\beta_p\sigma^k\varphi_p\alpha v_i$ (les 2 mots étant de deuxième espèce).

Soit X le produit tensoriel de tous les complexes précédents. X est le produit tensoriel des complexes suivants : X_o (produit tensoriel des complexes (i), en nombre fini) ; et, pour chaque p premier, X_p (produit tensoriel des complexes (ii), (iii) et (iv) relatifs à ce p). Soit X'_p le sous-complexe de X_p formé des éléments de degré >0 ; alors X est somme directe des sous-complexes X_o , $X_o \otimes X'_p$, et de tous les produits tensoriels qui contiennent en facteur au moins un X'_p et un X'_q avec $p \neq q$.

D'après la fin du paragraphe 4, on a un homomorphisme unique
$f : H(X) \to H_*(\Pi,n;Z)$,
compatible avec la graduation et la structure multiplicative.

Théorème 1.- L'application $f : H(X) \to H_*(\pi,n;Z)$ est un épimorphisme. D'une façon précise, $H_*(\pi,n;Z)$ est somme directe des images des homomorphismes suivants (induits par f) :

$f_o : X_o \to H_*(\pi,n;Z)$, qui est un isomorphisme sur une sous-algèbre sans torsion ;

pour chaque p premier, $f_p : H(X_o \otimes X'_p) \to H_*(\pi,n;Z)$, qui est un épimorphisme sur la composante p-primaire de $H_*(\pi,n;Z)$; le noyau de f_p se compose de la somme des composantes q-primaires (pour tous les q premiers $\neq p$) de $H(X_o \otimes X'_p) = X_o \otimes H(X'_p)$. De plus, toutes les composantes de X qui sont des produits tensoriels de facteurs contenant au moins un X'_p et un X'_q distincts, ont une homologie dont l'image dans $H_*(\pi,n;Z)$ est nulle.

Démonstration : la dernière assertion est évidente, car d'après la proposition 4, les éléments de l'image sont à la fois p-primaires et q-primaires. Toujours d'après la proposition 4, l'image de f_p se compose d'éléments p-primaires de $H_*(\pi,n;Z)$; on verra tout à l'heure que cette image est exactement la composante p-primaire de $H_*(\pi,n;Z)$.

Montrons d'abord que $f : H(X) \to H_*(\pi,n;Z)$ est un épimorphisme. Soit C le conoyau de f ; c'est un groupe abélien gradué, qui est de type fini dans chaque degré. Pour prouver que $C = 0$, il suffira de montrer que $C \otimes Z_p = 0$ pour chaque p premier (on conviendra de dire qu'un groupe abélien G de type fini est p-nul si $G \otimes Z_p = 0$. Cela signifie que G est somme de groupes q-primaires avec $q \neq p$. Si un tel G est p-nul pour tout p, G est nul).

Soit C_p le conoyau de $H(X_o \otimes X_p) \to H_*(\pi,n;Z)$; il est clair que C est un quotient de C_p ; il suffit donc de montrer que C_p est p-nul. Or l'homomorphisme de $X_o \otimes X_p$ dans la bar construction $\overline{B}^{(n)}(\pi)$ induit un homomorphisme modulo p : $X_o \otimes X_p \otimes Z_p \to \overline{B}^{(n)}(\pi) \otimes Z_p$, d'où un homomorphisme $H(X_o \otimes X_p \otimes Z_p) \to H_*(\pi,n;Z_p)$. Montrons que c'est un isomorphisme. Il suffit d'expliciter le complexe $X_o \otimes X_p \otimes Z_p$, dont la différentielle est nulle : c'est l'algèbre universelle d'un Z_p-espace vectoriel gradué dont on connait une base ; et cette base est justement celle de l'espace vectoriel $M^{(n)}(\pi)$ relatif à l'entier premier p (cf. Exposé n° 9), si l'on observe que $\sigma^{n-1}\psi_{p^f}(u_i) = \sigma^{n-1}\psi_p(p^{f-1}u_i)$ lorsque u_i est d'ordre p^f (cette relation a lieu dans $H_*(\pi,n;Z_p)$, d'après la proposition 2). Le "théorème fondamental" de l'Exposé n° 9 prouve alors l'isomorphisme $X_o \otimes X_p \otimes Z_p \approx H_*(\pi,n;Z_p)$. A vrai dire, cette démonstration n'est pas valable dans le cas où $p = 2$; mais le résultat subsiste ; il suffit de l'établir lorsque le groupe π est cyclique, et ceci est fait dans l'Appendice 1 ci-dessous.

Ainsi, l'application $X_o \otimes X_p \to \overline{B}^{(n)}(\pi)$ induit un <u>isomorphisme</u> des homologies modulo p. Il s'ensuit (Appendice 2 ci-dessous) que <u>le noyau et le conoyau de</u> $H(X_o \otimes X_p) \to H_*(\pi,n;Z)$ sont p-<u>nuls</u>. En particulier, le conoyau C_p est p-nul ; et par suite, d'après une remarque déjà faite, C est p-nul pour tout p, donc $C = 0$.

Nous savons maintenant que $f : H(X) \to H_*(\pi,n;Z)$ est un épimorphisme ; donc $H_*(\pi,n;Z)$ est somme des images de f_o et des f_p. Le noyau de $f_o : X_o \to H_*(\pi,n;Z)$ étant contenu dans le noyau de $H(X_o \otimes X_p) \to H_*(\pi,n;Z)$ qui est p-nul, et ceci pour tout p, il s'ensuit que le noyau de f_o est nul. Donc l'image de f_o est sans torsion. Comme, pour chaque p, l'image de f_p est p-primaire, il s'ensuit que cette image est toute la composante p-primaire. Quant au noyau de f_p, qui, on l'a vu, est p-nul, il est nécessairement la somme des composantes q-primaires de $H(X_o \otimes X'_p)$ relatives à tous les q premiers $\neq p$. Ceci achève la démonstration.

On peut considérer que le théorème 1 donne un <u>procédé de calcul</u> de l'algèbre $H_*(\pi,n;Z)$, lorsque π est donné comme somme directe des groupes cycliques d'ordre infini ou primaire. Tout revient à calculer le quotient de $H(X_p)$ par la somme I_p des composantes q-primaires relatives aux $q \neq p$. Ce sera une algèbre graduée à puissances divisées. Dans chaque degré, $H(X_p)/I_p$ est une somme finie de groupes cycliques dont l'ordre est une puissance de p. Pour calculer le nombre et les ordres de ces groupes cycliques, il suffit de calculer $H(X_p)$ (dans le degré considéré) en appliquant la formule de Künneth (puisque X_p est un produit de complexes élémentaires dont on connait déjà l'homologie), puis d'enlever les composantes q-primaires pour $q \neq p$. Il revient au même de réduire d'abord l'homologie de chaque complexe élémentaire à sa composante p-primaire, puis d'appliquer la "formule de Künneth" comme si l'on avait à calculer l'homologie d'un produit tensoriel de complexes d'homologie connue (p-primaire).

Ainsi, à chaque complexe élémentaire de la forme

$$E(x,2q-1) \otimes P(y,2q) \text{ , avec } dy = p^f x \text{ ,}$$

on associera une classe d'homologie d'ordre p^f de $H_*(\pi,n;Z)$, dans chacun des degrés $2q-1$, $4q-1$, $6q-1$, ... A chaque complexe élémentaire de la forme $P(x,2q) \otimes E(y,2q+1)$, on associera une classe d'homologie dans **chacun** des degrés $2q$, $4q$, $6q$, ... ; l'<u>ordre</u> de la classe d'homologie de dimension $2kq$ sera égal à la <u>composante</u> p-<u>primaire</u> de kp^f ; ces classes d'homologie sont les γ_k de la classe de degré $2q$, d'ordre p^f.

6.- Détermination des groupes stables $A_q(\Pi) = H_{n+q}(\Pi,n;Z)$, $n > q$.

Supposons Π de type fini, somme directe de groupes cycliques comme dans le paragraphe 5. En appliquant le théorème 1, on voit que, pour $n \geqslant 2$, $H_{n+1}(\Pi,n;Z)$ est nul ; et que, pour $2 \leqslant q < n$, $H_{n+q}(\Pi,n;Z)$ est un groupe de torsion dont la composante p-primaire est somme directe de groupes cycliques d'ordre p , engendrés par les éléments suivants : pour chaque générateur u_i d'ordre infini ou d'ordre p-primaire, les éléments $\delta_p \sigma^k \varphi_p \alpha u_i$, où $\sigma^k \varphi_p \alpha$ est un p-mot admissible de degré stable q+1 et de première espèce ; et, pour chaque générateur u_i d'ordre p-primaire (soit p^f) , les éléments $\delta_p \sigma^k \varphi_p \alpha ({u_i}^{p^{f-1}})$, où $\sigma^k \varphi_p \alpha$ est un p-mot admissible de degré stable q+1 , et de deuxième espèce.

On observera que les p-mots $\delta_p \sigma^k \varphi_p \alpha$ qui interviennent ainsi sont ceux qui correspondent aux suites d'entiers satisfaisant aux conditions (i), (ii), (iii) du théorème 3 de l'Exposé n° 9, et en outre à la condition $a_1 \equiv 0 \pmod{2p-2}$.

On voit alors que $H_{n+q}(\Pi,n;Z)$, pour $2 \leqslant q < n$, a pour composante p-primaire la somme (directe) des images de $\Pi/p\Pi$ par les applications définies par les p-mots admissibles, de première espèce, de degré stable q , tels que $a_1 \equiv 0 \pmod{2p-2}$; et des images de ${}_p\Pi$ par les applications définies par les p-mots admissibles de deuxième espèce, de degré stable q , tels que $a_1 \equiv 0 \pmod{2p-2}$. Toutes ces applications sont linéaires (même pour $p = 2$, quand $q < n$; cf. Appendice 1). Ce résultat, démontré dans le cas où Π est de type fini, vaut aussi dans le cas général, par passage à la limite inductive. D'où :

Théorème 2.- Le groupe stable $A_0(\Pi)$ est canoniquement isomorphe à Π (par la suspension itérée) ; le groupe stable $A_1(\Pi)$ est nul ; enfin, pour $q \geqslant 2$, $A_q(\Pi)$ est un groupe de torsion, dont la composante p-primaire est canoniquement isomorphe à la somme directe de groupes $\Pi/p\Pi$ indexés par les p-mots admissibles de première espèce, de degré stable q , tels que $a_1 \equiv 0 \pmod{2p-2}$, et de groupes ${}_p\Pi$ indexés par les p-mots admissibles de deuxième espèce, de degré stable q , tels que $a_1 \equiv 0 \pmod{2p-2}$.

7.- Le foncteur U(G) .

Soit G un groupe abélien gradué, somme directe de sous-groupes G_n tels que $G_n = 0$ pour $n \leqslant 0$. Dans le cas où G possède une Z-base formée d'éléments homogènes (de degré > 0), on a déjà défini l'algèbre universelle U(G) : Exposé n° 7, paragraphe 4. On se propose d'étendre cette définition au cas général d'un groupe abélien gradué, non supposé libre.

Théorème 3.- On peut plonger le groupe abélien gradué G dans une algèbre graduée U(G) anticommutative (au sens strict), munie de puissances divisées satisfaisant aux conditions (1), (2), (3), (4') et (5) de l'Exposé n° 7. On peut assujettir ce plongement aux conditions suivantes : si on a une application linéaire $f : G \to A$ de G dans une algèbre graduée A anticommutative (au sens strict) et munie de puissances divisées satisfaisant aux conditions rappelées ci-dessus, et si f conserve les degrés, il existe une application linéaire g et une seule de U(G) dans A, qui prolonge f, conserve les degrés, et soit compatible avec la multiplication et les puissances divisées.

Une telle algèbre U(G) est unique à un isomorphisme près. Si la graduation de G est impaire (i.e : $G_n = 0$ pour n pair), U(G) est l'algèbre extérieure $\Lambda(G)$ (convenablement graduée), qui est ainsi canoniquement munie de puissances divisées. Si G est somme directe $G'+G''$, U(G) est canoniquement isomorphe au produit tensoriel gauche $U(G') \otimes U(G'')$. Si G est p-primaire, U(G) est p-primaire.

Démonstration : la propriété "universelle" de U(G) assure l'unicité de U(G) à un isomorphisme près, en vertu d'un raisonnement classique. Prouvons l'existence de U(G), en exhibant une solution du problème. Ecrivons G comme quotient d'un groupe abélien libre (ayant une base homogène) F ; on a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0 \quad .$$

Considérons l'algèbre universelle U(F), et l'idéal bilatère I engendré par l'image de R et les puissances divisées γ_k des éléments de cette image. Soit U(G) l'algèbre quotient U(F)/I ; elle est graduée, et comme I est stable par les γ_k, U(G) est munie de puissances divisées satisfaisant à toutes les conditions requises. L'application $F \to U(F)$ induit un monomorphisme $G \to U(G)$, qui permet d'identifier G à un sous-groupe gradué de U(G). Supposons donnée une application linéaire $f : G \to A$ comme dans l'énoncé ; soit $\varphi : F \to A$ la composée de $F \to G$ et de f ; d'après le théorème 2 de l'Exposé n° 8, φ se prolonge d'une seule manière en un homomorphisme $\psi : U(F) \to A$ compatible avec toutes les structures. Le noyau de ψ contient I, donc ψ passe au quotient et définit $g : U(G) \to A$ qui prolonge f. L'unicité d'un tel prolongement g est évidente.

Ainsi l'existence et l'unicité de U(G) sont prouvées. Dans le cas où la graduation de G est impaire, la propriété universelle de U(G) prouve l'isomorphisme de U(G) avec l'algèbre extérieure $\Lambda(G)$, à cause de la caractérisation universelle de cette dernière. Si G est une somme directe $G'+G''$, il est évident

que $U(G') \otimes U(G'')$ satisfait à la propriété universelle ; d'où un isomorphisme canonique $U(G') \otimes U(G'') \approx U(G)$. Enfin, si G est p-primaire, la composante p-primaire de $U(G)$ possède la propriété universelle, donc est identique à $U(G)$. Ceci achève la démonstration.

$U(G)$ est un foncteur covariant qui commute évidemment avec les limites inductives.

Considérons la suspension itérée $\sigma^n : \Pi \to H_n(\Pi,n;Z)$, qui est un isomorphisme. D'après la propriété universelle, cette application se prolonge d'une seule manière en un homomorphisme

$$U(\Pi,n) \to H_*(\Pi,n;Z)$$

compatible avec toutes les structures (y compris les puissances divisées). On a noté $U(\Pi,n)$ l'algèbre graduée $U(\Pi)$ lorsque les éléments de Π sont affectés du degré n .

Théorème 4.- Pour tout $n \geqslant 1$, l'application naturelle

$$U(\Pi,n) \longrightarrow H_*(\Pi,n;Z)$$

est un isomorphisme sur la sous-algèbre (à puissances divisées) engendrée par $H_n(\Pi,n;Z) \approx \Pi$.

Démonstration : il suffit de le démontrer quand Π est de type fini, et même, à cause de la formule de Künneth, quand Π est cyclique. La solution est triviale si n est impair. Supposons donc n pair, et Π cyclique. Si Π est cyclique infini, $U(\Pi)$ est l'algèbre des polynômes divisée $S(\Pi)$ à un générateur de degré n , et l'assertion est évidente. Reste seulement le cas où G est cyclique d'ordre p^f , p premier. Soit a le générateur de Π ; $U(\Pi)$ est le groupe abélien engendré par a et les $\gamma_k(a)$ (éléments de l'algèbre à puissances divisées $U(\Pi)$). L'ordre de $\gamma_k(a)$ est une puissance de p , puisque $U(\Pi)$ est p-primaire. De plus, $p^f k\gamma_k(a) = (p^f a)\gamma_{k-1}(a) = 0$. Donc l'ordre de $\gamma_k(a)$ divise la composante p-primaire de $p^f k$.

Soit $a' \in H_*(\Pi,n;Z)$ l'image de a . Le théorème sera démontré si nous prouvons que l'ordre de $\gamma_k(a')$ est égal à la composante p-primaire de $p^f k$; or, d'après le théorème 1 et la fin du paragraphe 5, il en est bien ainsi.

Corollaire : si Π est cyclique d'ordre p^f , et n pair, l'élément $\gamma_k(a)$ de $U(\Pi,n)$ est d'ordre égal à la composante p-primaire de $p^f k$ (a désigne le générateur de Π). Ceci explicite complètement le foncteur $U(G)$.

Remarque : pour n pair, le foncteur $U(\Pi,n)$ est le foncteur $\Gamma(\Pi)$

introduit par Eilenberg-MacLane (Annals of Math. 60, 1954, voir p. 107-110 et 116-119). En particulier, le groupe $U_4(\Pi,2)$ des éléments de degré 4 de $U(\Pi,2)$ n'est autre que le foncteur $\Gamma(\Pi)$ de J.H.C. Whitehead (Annals of Math. 52, 1950, voir p. 60-70). Ce dernier foncteur est la solution d'un problème universel : l'application $x \to \gamma_2(x)$ de Π dans $U_4(\Pi,2)$ est universelle vis-à-vis des applications "quadratiques" de Π dans les groupes abéliens, c'est-à-dire des applications f telles que $f(x+y)-f(x)-f(y)$ soit une fonction bilinéaire de x et y

Notons encore que la caractérisation universelle de $U(\Pi,n)$, pour n pair, fournit une définition de $U(\Pi,n)$ par générateurs et relations : les générateurs sont les symboles $\gamma_k(x)$ (pour $x \in \Pi$, et $k=0,1,2,\ldots$) et leurs produits formels ; les relations sont

$$\begin{cases} \gamma_0(x) = 1 \quad , \quad \gamma_k(x)\,\gamma_h(x) = (k,h)\,\gamma_{k+h}(x) \quad , \\ \gamma_k(x+y) = \sum_{i+j=k} \gamma_i(x)\,\gamma_j(y) \quad . \end{cases}$$

Ces relations entraînent $\gamma_k(0) = 0$ pour $k \geqslant 1$; l'application $x \to \gamma_1(x)$ est l'injection $\Pi \to U(\Pi)$; dans $U(\Pi)$, les puissances divisées sont alors déterminées par les formules (4') et (5) de l'Exposé n° 7.

8.- Calcul de $H_*(\Pi,n;Z)$ dans le cas général.

Le calcul de $H_*(\Pi,n;Z)$ fait au paragraphe 5 n'est pas "naturel", en ce sens qu'il dépend d'une décomposition de Π comme somme directe de groupes cycliques d'ordre infini ou primaire ; de plus, il suppose Π de type fini. On se propose maintenant de donner une description naturelle de $H_*(\Pi,n;Z)$ par générateurs et relations sans hypothèse sur Π ; ceci a déjà été fait pour la sous-algèbre $U(\Pi,n)$ au paragraphe précédent.

Au paragraphe 4, on a associé à un groupe abélien Π (et à un entier $n \geqslant 1$ donné) des complexes élémentaires. Parmi eux, considérons : 1°- les complexes élémentaires du deuxième type, p-primaires (p est un entier premier, donné une fois pour toutes) ; 2°- les complexes élémentaires du premier type, ayant pour générateurs les éléments $\sigma^n u$, où $u \in \Pi$ n'est pas p-primaire. Soit $K_p(\Pi,n)$ le produit tensoriel de tous ces complexes élémentaires ; c'est un foncteur covariant du groupe Π. Il contient le sous-complexe $K_o(\Pi,n)$, produit tensoriel des complexes engendrés par les $\sigma^n u$ ($u \in \Pi$ quelconque) ; $K_o(\Pi,n)$ est aussi un foncteur covariant de Π.

Soit Φ_p l'application canonique (naturelle) $H(K_p(\Pi,n)) \to H_*(\Pi,n;Z)$, telle qu'elle a été définie à la fin du paragraphe 4. L'image de $K_o(\Pi,n)$ par Φ_p

est évidemment la sous-algèbre $U(\pi,n)$ étudiée au paragraphe 7. On se propose, dans ce paragraphe et le suivant, de montrer que l'image de Φ_p est somme (non directe) de $U(\pi,n)$ et de la composante p-primaire de $H_*(\pi,n;Z)$, et aussi d'expliciter le noyau de Φ_p.

Dans ce but, nous introduirons, dans $H(K_p(\pi,n))$, la notion d'équivalence élémentaire ; pour cela, nous aurons à utiliser certaines relations existant dans l'homologie $H_*(\pi,n;Z)$, resp. $H_*(\pi,n;Z_{p^f})$. Il nous faut d'abord faire une liste de ces relations.

(I) si u et $v \in \pi$, et si h est un entier $\geqslant 0$ ou $\leqslant 0$, on a

$$\sigma^n(hu) = h(\sigma^n u) \quad , \quad \sigma^n(u+v) = \sigma^n u + \sigma^n v \quad \text{dans} \quad H_n(\pi,n;Z) \quad .$$

(II) si $u \in \pi$, $w = p^t u$ et $p^f w = 0$, on a

$$\sigma^{n-1}\psi_{p^f}(w) = \sigma^{n-1}\psi_{p^{f+t}}(u) \quad \text{dans} \quad H_{n+1}(\pi,n;Z_{p^f}). \text{ (cf. prop. 2, paragraphe 1).}$$

(III) si u et $v \in \pi$, avec $p^f u = 0$, $p^f v = 0$, et h entier $\geqslant 0$ ou $\leqslant 0$, on a

$$\sigma^{n-1}\psi_{p^f}(hu) = h(\sigma^{n-1}\psi_{p^f}u) \quad , \quad \sigma^{n-1}\psi_{p^f}(u+v) = \sigma^{n-1}\psi_{p^f}(u) + \sigma^{n-1}\psi_{p^f}(v)$$

dans $H_{n+1}(\pi,n;Z_{p^f})$; toutefois, la deuxième de ces relations est en défaut si $n=1$ et $p=2$, auquel cas l'on a

$$(11) \qquad \psi_{2^f}(u+v) = \psi_{2^f}(u) + \psi_{2^f}(v) + 2^{f-1}(\sigma u).(\sigma v) \quad \text{dans} \quad H_2(\pi,1;Z_{2^f}) \quad .$$

Tout cela résulte des relations (4) et (4') du paragraphe 1, et du fait que la suspension σ s'annule sur les éléments décomposables.

(IV) si u et $v \in \pi/p\pi$ (resp. $_p\pi$), et si $\sigma^k\varphi_p\alpha$ est un p-mot admissible de hauteur n et de première espèce (resp. de deuxième espèce), on a, pour tout entier $h \geqslant 0$ ou $\leqslant 0$,

$$\sigma^k\varphi_p\alpha(hu) = h(\sigma^k\varphi_p\alpha u) \quad , \quad \sigma^k\varphi_p\alpha(u+v) = \sigma^k\varphi_p\alpha u + \sigma^k\varphi_p\alpha v$$

dans $H_*(\pi,n;Z_p)$. Toutefois, la deuxième de ces relations est en défaut si $k=0$ et $p=2$, auquel cas l'on a

$$(12) \qquad \varphi_2\alpha(u+v) = \varphi_2\alpha u + \varphi_2\alpha v + (\sigma\alpha u).(\sigma\alpha v) \quad \text{dans} \quad H_*(\pi,n;Z_2) \quad .$$

Pour prouver ces assertions, on montre d'abord, par récurrence sur la hauteur du mot α, que $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$ modulo les éléments décomposables ; puis on

observe que, pour p premier impair, la transpotence φ_p est additive et s'annule sur les éléments décomposables. Pour $p=2$, on a $\varphi_2 = \gamma_2 \sigma$ (Exposé 8, proposition 1), et d'autre part $\sigma\alpha(u+v) = \sigma\alpha u + \sigma\alpha v$; on applique alors γ_2 aux deux membres de cette égalité.

Telle est la liste des relations qu'on aura besoin d'utiliser. Mais pour que (12) soit utilisable, il faut encore exprimer les éléments $\sigma\alpha u$ et $\sigma\alpha v$ de $H_*(\Pi,n;Z_2)$ à l'aide des éléments de la forme $\sigma^h\varphi_2\alpha' w$ et $\beta_2\sigma^h\varphi_2\alpha' w$, images (dans $H_*(\Pi,n;Z_2)$) des générateurs des complexes élémentaires attachés au groupe Π. On a besoin de la relation (5) de l'Exposé n° 8, qui s'écrit ici :

$$(13) \qquad \sigma\gamma_2\alpha' u = \beta_2\varphi_2\alpha' u + (\beta_2\sigma\alpha' u).(\sigma\alpha' u) \quad \text{dans} \quad H_*(\Pi,n;Z_2) ,$$

le mot α' étant supposé de degré pair. On voit alors qu'il faut distinguer trois cas :

Cas (i) : α est de la forme $\sigma^{2k}\varphi_2\alpha'$ $(k \geqslant 0)$. On a

$$(14,i) \qquad \sigma\alpha u = \sigma^{2k+1}\varphi_2\alpha' u .$$

Cas (ii) : α est de la forme $\sigma^{2k}\gamma_2\alpha'$ $(k \geqslant 0)$, et on n'a pas simultanément $k=0$ et α' de la forme $\sigma^{2h}\varphi_2\alpha''$ $(h \geqslant 0)$. On a alors :

$$(14,ii) \qquad \sigma\alpha u = \beta_2\sigma^{2k}\varphi_2\alpha' u .$$

Cas (iii) : α est de la forme $\gamma_2\sigma^{2h}\varphi_2\alpha'$ $(h \geqslant 0)$. Alors :

$$(14,iii) \qquad \sigma\alpha u = \beta_2\varphi_2\sigma^{2h}\varphi_2\alpha' u + (\beta_2\sigma^{2h+1}\varphi_2\alpha' u).(\sigma^{2h+1}\varphi_2\alpha' u)$$

Notons que, dans chacun des cas (i) et (iii), le mot α' peut être vide ; il faut alors remplacer $\varphi_2\alpha'$ par ψ_2, et $\beta_2\sigma^{2h+1}\varphi_2\alpha'$ par σ^{2h+2}.

Nous sommes maintenant en mesure de définir les "équivalences élémentaires" dans l'homologie $H(K_p(\Pi,n))$. Considérons n'importe quel produit tensoriel fini K de complexes élémentaires, muni d'un homomorphisme $f : K \to K_p(\Pi,n)$ défini par les images des générateurs des complexes élémentaires de K ; nous supposons que ces images sont des générateurs des complexes élémentaires de $K_p(\Pi,n)$. On va, suivant des règles qui seront précisées, modifier les images du (ou des) générateur de l'un des complexes élémentaires de K (les nouvelles images n'étant plus nécessairement des générateurs de $K_p(\Pi,n)$) ; on ne change pas les images des autres générateurs de K. On obtiendra ainsi une nouvelle application $g : K \to K_p(\Pi,n)$; l'on dira que le passage de f à g est une opération

élémentaire, et que les images, par f_* et g_*, d'un même élément de $H(K)$, sont des éléments élémentairement équivalents de $H(K_p(\Pi,n)$. Les règles qui permettent le remplacement de f par g sont au nombre de quatre :

Règle (I).- Soit x un générateur d'un complexe du premier type de K ; alors $f(x)$ est de la forme $\sigma^n w$, avec $w \in \Pi$. Supposons que $w = hu$ (h entier ≥ 0 ou ≤ 0, $u \in \Pi$) ; on pose $g(x) = h(\sigma^n u)$, et ceci définit (par convention) une "opération élémentaire". Supposons maintenant que w ait la forme $u+v$, avec u et v dans Π ; on pose $g(x) = \sigma^n u + \sigma^n v$, et ceci définit encore une "opération élémentaire".

Règle (II).- Soit (x,y) un couple de générateurs d'un complexe du deuxième type de K, avec $dy = (-1)^{n-1} p^f x$. Supposons que $f(y)$ ait la forme $\sigma^{n-1} \psi_{p^f}(w)$ avec $w = p^t u$, $u \in \Pi$, et $p^f w = 0$; on a donc $f(x) = \sigma^n w$. On pose $g(y) = \sigma^{n-1} \psi_{p^{f+t}}(u)$ et $g(x) = p^t(\sigma^n u)$. Ceci définit (par convention) une "opération élémentaire".

Règle (II bis).- Soit (x,y) un couple de générateurs d'un complexe du deuxième type de K, avec $dy = (-1)^{n-1} p^{f+t} x$. Supposons que $f(y) = \sigma^{n-1} \psi_{p^{f+t}}(u)$, $f(x) = \sigma^n u$, avec $p^f u = 0$ dans le groupe Π. On pose $g(y) = p^t \sigma^{n-1} \psi_{p^f} u$, $g(x) = \sigma^n u$. Ceci définit (par convention) une "opération élémentaire".

Régle (III).- Soit (x,y) un couple de générateurs d'un complexe du deuxième type de K, avec $dy = (-1)^{n-1} p^f x$. Supposons que $f(y)$ ait la forme $\sigma^{n-1} \psi_{p^f}(w)$ avec $p^f w = 0$, donc $f(x) = \sigma^n w$. Si $w = hu$, h entier et $p^f u = 0$, on pose $g(y) = h(\sigma^{n-1} \psi_{p^f} u)$, $g(x) = h(\sigma^n u)$;

d'où une "opération élémentaire". Si $w = u + v$, avec $p^f u = 0$, $p^f v = 0$, on pose $g(y) = \sigma^{n-1}\psi_{p^f} u + \sigma^{n-1}\psi_{p^f} v$, et $g(x) = \sigma^n u + \sigma^n v$; avec une exception si $n = 1$ et $p = 2$. Dans ce dernier cas, on pose

$g(y) = \psi_{2^f} u + \psi_{2^f} v + 2^{f-1}(\sigma u).(\sigma v)$, $g(x) = \sigma u + \sigma v$.

On obtient encore, par définition, une "opération élémentaire".

Règle (IV).- Soit (x,y) un couple de générateurs d'un complexe du deuxième type de K , avec $dy = (-1)^k px$. Supposons que $f(y)$ ait la forme $\sigma^k \varphi_p \alpha w$, avec $w \in \Pi/p\Pi$ si le p-mot $\sigma^k \varphi_p \alpha$ est de première espèce, et $w \in {}_p\Pi$ si le p-mot $\sigma^k \varphi_p \alpha$ est de deuxième espèce. On a donc

$f(x) = \beta_p \sigma^k \varphi_p \alpha w$.

Supposons alors que $w = hu$ (h entier) , u étant dans le même groupe $\Pi/p\Pi$ (resp. ${}_p\Pi$) que w . On pose

$g(y) = h(\sigma^k \varphi_p \alpha u)$, $g(x) = h(\beta_p \sigma^k \varphi_p \alpha u)$; et ceci définit une "opération élémentaire".

Supposons maintenant que $w = u + v$, u et v étant dans le même groupe que w ; on pose

$$g(y) = \sigma^k \varphi_p \alpha u + \sigma^k \varphi_p \alpha v \quad ,$$

$$g(x) = \beta_p \sigma^k \varphi_p \alpha u + \beta_p \sigma^k \varphi_p \alpha v \quad ,$$

avec une exception si $k = 0$ et $p = 2$. Dans ce dernier cas, on remplace

$f(y) = \varphi_2\alpha(u+v)$ et $f(x) = \beta_2\varphi_2\alpha(u+v)$ par

$$g(y) = \varphi_2\alpha u + \varphi_2\alpha v + (\sigma\alpha u).(\sigma\alpha v) ,$$

$$g(x) = \beta_2\varphi_2\alpha u + \beta_2\varphi_2\alpha v + (\tfrac{1}{2} d\sigma\alpha u).(\sigma\alpha v) - (\tfrac{1}{2} d\sigma\alpha v).(\sigma\alpha u) ,$$

où $\sigma\alpha u$ et $\sigma\alpha v$ sont calculés à l'aide des formules (14,i), (14,ii) ou (14,iii), suivant la forme du mot α . On a donc :

Dans le cas (i) : $\sigma\alpha u = \sigma^{2k+1}\varphi_2\alpha' u$, $\tfrac{1}{2} d\sigma\alpha u = -\beta_2\sigma^{2k+1}\varphi_2\alpha' u$.

Dans le cas (ii) : $\sigma\alpha u = \beta_2\sigma^{2k}\varphi_2\alpha' u$, $\tfrac{1}{2} d\sigma\alpha u = 0$.

Dans le cas (iii) : $\sigma\alpha u = \beta_2\varphi_2\sigma^{2h}\varphi_2\alpha' u + (\beta_2\sigma^{2h+1}\varphi_2\alpha' u).(\sigma^{2h+1}\varphi_2\alpha' u)$,

$\tfrac{1}{2} d\sigma\alpha u = -2\gamma_2(\beta_2\sigma^{2h+1}\varphi_2\alpha' u)$.

Dans ces formules, si α' est vide (cas (i) ou (iii)), il faut remplacer $\varphi_2\alpha'$ par ψ_2 , et $\beta_2\sigma^{2h+1}\varphi_2\alpha'$ par σ^{2h+2} .

Nous donnerons deux exemples, l'un du cas (i), l'autre du cas (iii). Soient u et $v \in {}_2\Pi$; supposons $f(y) = \varphi_2\psi_2(u+v)$, donc $f(x) = \beta_2\varphi_2\psi_2(u+v)$. On prend

$$g(y) = \varphi_2\psi_2 u + \varphi_2\psi_2 v + (\sigma\psi_2 u).(\sigma\psi_2 v) ,$$

$$g(x) = \beta_2\varphi_2\psi_2 u + \beta_2\varphi_2\psi_2 v - (\sigma^2 u).(\sigma\psi_2 v) + (\sigma^2 v).(\sigma\psi_2 u) .$$

Cette dernière formule intervient dans le calcul de $H_5(\Pi,2;Z)$. L'autre exemple est celui où u , $v \in {}_2\Pi$, et $f(y) = \varphi_2\gamma_2\psi_2(u+v)$, $f(x) = \beta_2\varphi_2\gamma_2\psi_2(u+v)$. On prend alors

$$g(y) = \varphi_2\gamma_2\psi_2 u + \varphi_2\gamma_2\psi_2 v + (\beta_2\varphi_2\psi_2 u + (\sigma^2 u)(\sigma\psi_2 u)).(\beta_2\varphi_2\psi_2 v + (\sigma^2 v)(\sigma\psi_2 v)) ,$$

$$g(x) = \beta_2\varphi_2\gamma_2\psi_2 u + \beta_2\varphi_2\gamma_2\psi_2 v - 2\gamma_2(\sigma^2 u)(\sigma^2 v)(\sigma\psi_2 v) + 2\gamma_2(\sigma^2 v)(\sigma^2 u)(\sigma\psi_2 u) - dt ,$$

avec $t = \gamma_2(\sigma^2 u)(\varphi_2\psi_2 v) - \gamma_2(\sigma^2 v)(\varphi_2\psi_2 u)$.

L'avant-dernière formule sert au calcul de $H_9(\Pi,2;Z)$.

Nous avons ainsi énuméré toutes les "opérations élémentaires" et par suite défini les couples d'éléments élémentairement équivalents dans $H(K_p(\Pi,n))$.

9.- Calcul de $H_*(\Pi,n;Z)$ dans le cas général (Suite).

Soit N_p le sous-groupe de $H(K_p(\Pi,n))$ engendré par les différences d'éléments élémentairement équivalents. On voit facilement que N_p est un idéal bilatère ; le quotient $H(K_p(\Pi,n))$ est une algèbre graduée, définie par générateurs et relations.

Théorème 5.- L'image de l'application naturelle

$$\Phi_p : H(K_p(\Pi,n)) \to H_*(\Pi,n;Z)$$

est la somme (non directe) de $U(\Pi,n)$ et de la composante p-primaire de $H_*(\Pi,n;Z)$. Le noyau de Φ_p est l'idéal N_p .

(Ainsi, on a défini une sous-algèbre de $H_*(\Pi,n;Z)$, et donné un mode de calcul de cette sous-algèbre par générateurs et relations).

Démonstration : il suffit de la faire lorsque Π est de type fini. Dans ce cas, écrivons Π comme somme directe de groupes cycliques Π_i d'ordre infini ou primaire, en choisissant des générateurs u_i de ces groupes. A un tel choix on a associé, au paragraphe 5, certains complexes élémentaires. Parmi eux, ceux qui font partie de $K_p(\Pi,n)$ sont les suivants :

1°) les complexes du premier type dont le générateur est $\sigma^n u_i$, u_i étant le générateur d'un groupe cyclique Π_i non p-primaire ; on notera Y_o leur produit tensoriel ;

2°) les complexes p-primaires dont le produit tensoriel a été noté X_p au paragraphe 5.

On notera que le complexe noté X_o au paragraphe 5 est un sous-complexe de Y_o ; et $X_o \otimes X_p$ est un sous-complexe de $Y_o \otimes X_p$, lequel est un sous-complexe de $K_p(\Pi,n)$.

On va définir un projecteur $P : K_p(\Pi,n) \to Y_o \otimes X_p$, compatible avec toutes les structures, et jouissant de la propriété suivante : le noyau de l'application $P_* : H(K_p(\Pi,n)) \to H(Y_o \otimes X_p)$, est contenu dans N_p . Pour définir P , il suffit de dire comment chaque complexe élémentaire de $K_p(\Pi,n)$ est envoyé dans $Y_o \otimes X_p$. Soit d'abord un complexe élémentaire du premier type, de générateur $\sigma^n u$, où $u \in \Pi$ n'est pas p-primaire ; u s'écrit $\sum_i \lambda_i u_i$, les λ_i étant des entiers $\geqslant 0$ ou $\leqslant 0$, et les u_i étant les générateurs des groupes cycliques Π_i . Par un usage répété de la Règle (I) du paragraphe 8, on envoie $\sigma^n u$ dans l'élément $\sum_i \lambda_i (\sigma^n u_i)$ du complexe $Y_o \otimes X_p$; par cette application, les générateurs $\sigma^n u_i$ de $Y_o \otimes X_p$ ne bougent pas.

Soit maintenant (x,y) un couple de générateurs d'un complexe élémentaire du deuxième type de $K_p(\pi,n)$, avec $y = \sigma^{n-1}\psi_{p^f}u$, $x = \sigma^n u$, et $p^f u = 0$. On a $u = \sum_i \lambda_i u_i$, les λ_i étant entiers, et les u_i étant des générateurs de ceux des π_i qui sont p-primaires. Il faut prendre garde qué l'on n'a peut-être pas $p^f u_i = 0$. Posons $v_i = \lambda_i u_i$; on a $p^f v_i = 0$. Par la Règle (III), on envoie y dans $\sum_i \sigma^{n-1}\psi_{p^f}(v_i)$ et x dans $\sum_i \sigma^n(v_i)$, avec une exception lorsque $n=1$ et $p=2$: dans ce cas on envoie $\psi_{2^f}(v)$ dans

$$\sum_i \psi_{2^f}(v_i) + 2^{f-1} \sum_{i<j} (\sigma v_i).(\sigma v_j) \quad .$$

Cela fait, il reste à utiliser les Règles (II) et (II bis) pour envoyer $\sigma^{n-1}\psi_{p^f}(v_i)$ et $\sigma^n v_i$ dans le sous-complexe X_p.

Soit enfin (x,y) un couple de générateurs d'un complexe du deuxième type de $K_p(\pi,n)$, avec $y = \sigma^k\varphi_p\alpha u$, $x = \beta_p\sigma^k\varphi_p\alpha u$. Si $u \in \pi/p\pi$ (première espèce), on écrit $u = \sum_i \lambda_i u_i$, les u_i étant des générateurs des π_i infinis ou p-primaires, et les entiers λ_i pouvant être supposés compris entre 0 et p-1. Si $u \in {}_p\pi$ (deuxième espèce), on écrit $u = \sum_i \lambda_i(p^{f_i-1}u_i)$, les u_i étant les générateurs des π_i qui sont p-primaires (p^{f_i} désignant l'ordre de u_i); on peut encore supposer les entiers λ_i entre 0 et p-1. Alors, par usage de la Règle (IV), on envoie y dans le complexe X_p, ce qui définit aussi l'image de x.

Ayant ainsi défini $P : K_p(\pi,n) \to Y_o \otimes X_p$, qui est évidemment un projecteur, il est évident que si on prend un élément de $H(K_p(\pi,n))$, on peut passer de cet élément à son image par P par une succession (finie) d'opérations élémentaires. Donc le noyau de $P_* : H(K_p(\pi,n)) \to H(Y_o \otimes Y_p)$, qui est un projecteur, est contenu dans l'idéal N_p défini par les équivalences élémentaires. L'application Φ_p se factorise :

$$H(K_p(\pi,n)) \xrightarrow{P_*} H(Y_o \otimes X_p) \xrightarrow{\Psi_p} H_*(\pi,n;Z) \quad .$$

On sait déjà que l'image de Φ_p contient $U(\pi,n)$; pour démontrer le théorème 5, il suffit de prouver que : 1) l'image de Ψ_p contient la composante p-primaire de de $H_*(\pi,n;Z)$ et est contenue dans la somme de cette composante p-primaire et de $U(\pi,n)$; 2) le noyau de Ψ_p est contenu dans $H(Y_o \otimes X_p) \cap N_p$.

Le point 1) se prouve comme suit ; avec les notations du théorème 1, l'image de Ψ_p contient l'image de $H(X_o \otimes X_p)$ qui (théorème 1) contient la composante

p-primaire de $H_*(\Pi,n;Z)$. De plus, on a $H(Y_o \otimes X_p) = Y_o + Y_o \otimes H(X'_p)$ (somme directe) ; l'image de Y_o est contenue dans $U(\Pi,n)$; l'image de $Y_o \otimes H(X'_p)$ est p-primaire parce que celle de $H(X'_p)$ l'est (théorème 1).

Prouvons le point 2). L'image de Y_o est $U(\Pi',n)$, en notant Π' le sous-groupe de Π , somme des Π_i non p-primaires. La composante p-primaire de $U(\Pi',n)$ est nulle. Le noyau de Ψ_p est donc somme directe des noyaux des deux homomorphismes $Y_o \to U(\Pi',n)$ et $Y_o \otimes H(X'_p) \to H_*(\Pi,n;Z)$. Le noyau de $Y_o \to U(\Pi',n)$ est contenu dans N_p , car les équivalences élémentaires obtenues par la Règle (I) réduisent le sous-groupe de degré de Y_o à son quotient Π' ; donc, en vertu de la caractérisation universelle de $U(\Pi',n)$, $U(\Pi',n)$ est quotient de Y_o par la relation d'équivalence déduite des équivalences élémentaires. D'autre part, $H(X'_p)/(N_p \cap H(X'_p))$ est p-primaire, à cause des règles (III) et (IV), appliquées en prenant $h = p^f$ (resp. $h = p$). Donc le quotient de $Y_o \otimes H(X'_p)$ par l'intersection de $Y_o \otimes H(X'_p)$ avec N_p est p-primaire. D'autre part, la composante p-primaire de $Y_o \otimes H(X'_p)$, qui est la même que celle de $X_o \otimes H(X'_p)$, s'envoie biunivoquement dans $H_*(\Pi,n;Z)$, d'après le théorème 1. Ceci achève la démonstration du théorème 5.

On peut préciser les résultats du théorème 5. Définissons la sous-algèbre $V_p(\Pi,n)$ de $H(K_p(\Pi,n))$ que voici : dans le complexe $K_p(\Pi,n)$, considérons l'idéal engendré par les générateurs de degré $\geqslant n+1$ (et par les puissances divisées de ceux d'entre eux dont le degré est pair). L'algèbre des cycles de $K_p(\Pi,n)$ qui appartiennent à cet idéal a pour image, dans $H(K_p(\Pi,n))$, une sous-algèbre $V_p(\Pi,n)$, et on vérifie facilement que $H(K_p(\Pi,n))$ est somme directe de $K_o(\Pi,n)$ et $V_p(\Pi,n)$. Par les équivalences élémentaires, $V_p(\Pi,n)$ est stable, sauf dans le cas où $n=1$ et $p=2$ (à cause de la règle (III)). Donc l'image de $H(K_p(\Pi,n))$ dans $H_*(\Pi,n;Z)$ est somme directe de $U(\Pi,n)$ et de l'image $W_p(\Pi,n)$ de $V_p(\Pi,n)$; avec le seul cas d'exception $n=1$, $p=2$. Ainsi :

Théorème 6.- Si $n \geqslant 2$, $H_*(\Pi,n;Z)$ est somme directe de $U(\Pi,n)$ et des $W_p(\Pi,n)$ relatives à tous les p-premiers. Si $n=1$, $H_*(\Pi,1;Z)$ est somme directe des $W_p(\Pi,1)$ relatives aux p premiers $\neq 2$, et de l'image de $H(K_2(\Pi,1))$ (cf. théorème 5). Dans tous les cas où intervient $W_p(\Pi,n)$, c'est une algèbre p-primaire, quotient de $V_p(\Pi,n)$ (sous-algèbre de $H(K_p(\Pi,n))$) par l'idéal engendré par les équivalences élémentaires.

APPENDICE 1

Tout ce qui a été fait dans l'Exposé n° 9 pour p premier impair vaudrait aussi pour $p=2$ si les applications $f(\alpha)$ de la proposition 2 étaient linéaires, ce qui n'est pas le cas pour tous les mots α (voir ci-dessous). Mais lorsque le groupe π est cyclique (d'ordre infini ou 2^f) elles sont évidemment linéaires, et par suite le "théorème fondamental" (Exposé n° 9) vaut pour un groupe cyclique : l'algèbre $H_*(\pi,n;Z_2)$ est canoniquement isomorphe à l'algèbre universelle $U(M^{(n)}(\pi))$ (munie de puissances divisées pour les éléments de degré pair).

Dans ce cas, les suites $(a_1,\dots,a_i,\dots)$ associées aux mots admissibles (au sens de l'Exposé n° 9) sont celles qui satisfont aux conditions (i), (ii) et (iii) du théorème 3 (Exposé n° 9), et à la relation

(iv') $\quad 2a_1 \leqslant n+q$ si a_1 impair , $2a_1 < n+q$ si a_1 pair ,

au lieu de (iv) : $2a_1 < n+q$. Il suffit de refaire la démonstration : on doit exprimer que $4k_1 + 2u_1 \leqslant n+q$ si $u_1 = 1$, $4k_1 + 2u_1 < n+q$ si $u_1 = 0$.

Mais dans le présent Exposé n° 11, on a utilisé un autre jeu de mots admissibles ; en effet, en ce qui concerne les mots admissibles de degré stable > 1 , et de hauteur n , on a conservé ceux de la forme $\sigma^k\varphi_2\alpha$, mais on a remplacé ceux ceux de la forme $\sigma^{k+1}\gamma_2\alpha$ par $\beta_2\sigma^k\varphi_2\alpha$. En fait, on a $\sigma^{k+1}\gamma_2\alpha = \beta_2\sigma^k\varphi_2\alpha$ pour $k \geqslant 1$, mais pour $k = 0$, on a (cf. la relation (5) de l'Exposé n° 8) :

$$\beta_2\varphi_2\alpha\, u = 6\gamma_2\alpha\, u + (\beta_2\sigma\alpha\, u).(\sigma\alpha\, u) \quad , \quad u \in \pi/2\pi \text{ , resp. } {}_2\pi \quad .$$

Cette formule définit, par récurrence sur le degré, un isomorphisme entre l'algèbre universelle construite avec les mots de l'Exposé n° 9, et l'algèbre universelle construite avec les mots du présent Exposé. Finalement le "théorème fondamental" de l'Exposé n° 9 est valable pour un groupe cyclique si on utilise les applications $f(\alpha)$ relatives aux mots de la forme $\sigma^k\varphi_2\alpha'$ et $\beta_2\sigma^k\varphi_2\alpha'$. Ceci est le résultat dont nous avions eu besoin pour démontrer le théorème 1 ci-dessus.

Observons que les 2-mots admissibles (au sens du présent Exposé n° 11) correspondent aux suites $(a_1,\dots,a_i,\dots)$ qui satisfont à (i), (ii), (iii) et (iv'). En particulier, les mots de la forme $\beta_2\sigma^k\varphi_2\alpha$ correspondent à celles de ces suites pour lesquelles a_1 est pair $\geqslant 2$.

Pour chaque mot $\beta_2\sigma^k\varphi_2\alpha$ de cette catégorie, considérons l'application

$$\delta_2\sigma^k\varphi_2\alpha : \pi/2\pi \to H_*(\pi,n;Z) \text{ , resp. } {}_2\pi \to H_*(\pi,n;Z) \text{ ,}$$

suivant que le mot est de première ou de seconde espèce (i.e : suivant que le dernier $a_i \neq 0$ est $\neq 1$ ou $=1$). Cherchons celles de ces applications qui sont linéaires (pour un groupe π quelconque). Il suffit de se référer aux cas (i), (ii), (iii) du paragraphe 8 ; il y a linéarité dans le cas (ii), pas dans les (i) et (iii). Traduisons en ce qui concerne la suite $(a_1,\dots,a_i,\dots)$ avec a_1 pair $\geqslant 2$: on voit que les seules suites qui définissent une application non linéaire sont les suivantes :

premier cas : a_1 pair , a_2 impair , $2a_1+1 = n+q$;

deuxième cas : a_1 et a_2 pairs, $a_1 = 2a_2$, a_3 impair , $2a_1+1 = n+q$.

Un exemple du premier cas est $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $q = 3$, $n = 2$; un exemple du second cas est $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $q = 7$, $n = 2$. On notera que $q \geqslant n+1$ dans le premier cas, $q \geqslant 3n+1$ dans le second.

En dehors de ces cas, les applications $\delta_2\sigma^k\varphi_2\alpha$ sont linéaires. Ce sont alors des isomorphismes du groupe abélien $\pi/2\pi$ (resp. ${}_2\pi$) sur certains sous-groupes de $H_*(\pi,n;Z)$. La somme $G_2(\pi,n)$ de ces sous-groupes est une somme directe ; c'est un sous-groupe gradué de $H_*(\pi,n;Z)$.

Pour p premier impair, notons $G_p(\pi,n)$ la somme (directe) de tous les sous-groupes de $H_*(\pi,n;Z)$, images biunivoques de $\pi/p\pi$, resp. de ${}_p\pi$, par les applications $\delta_p\sigma^k\varphi_p\alpha$ qui correspondent aux p-mots admissibles de la forme $\beta_2\sigma^k\varphi_p\alpha$. Ces applications correspondent aux suites $(a_1,\dots,a_i,\dots)$ du théorème 3 de l'Exposé n° 9, qui satisfont à (i), (ii), (iii), (iv), et telles en outre que a_1 soit un multiple non nul de $2p-2$. Le groupe $G_p(\pi,n)$ est un groupe gradué, somme directe de sous-groupes $\pi/p\pi$ et ${}_p\pi$.

Théorème 7.- L'homomorphisme naturel

$$U(G_p(\pi,n)) \longrightarrow H_*(\pi,n;Z) \text{ ,}$$

défini par l'injection $G_p(\pi,n) \to H_*(\pi,n;Z)$, est un isomorphisme sur une sous-algèbre p-primaire de $H_*(\pi,n;Z)$. Ceci vaut aussi pour $p=2$.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer ce théorème, en application du théorème 5 et de la caractérisation universelle du foncteur $U(G)$.

APPENDICE 2

Pour démontrer le théorème 1 (paragraphe 5), on a eu besoin du

Lemme.- Soient deux complexes Z-libres A et A', et soit $f : A \to A'$ un homomorphisme de complexes (conservant le degré et compatible avec les opérateurs différentiels) tel que l'application $H(A \otimes Z_p) \to H(A' \otimes Z_p)$ induite par f soit un isomorphisme (pour un p premier). Soient N et C le noyau et le conoyau de $f_* : H(A) \to H(A')$. Alors $N \otimes Z_p = 0$, et la composante p-primaire de C est nulle ; si de plus N est de type fini dans chaque degré, on a $C \otimes Z_p = 0$.

Démonstration : soit A'' le "mapping cylinder" de f (défini au paragraphe 1 de l'Exposé n° 3) ; A'' est Z-libre, et on a deux suites exactes de complexes

$$0 \to A' \to A'' \to A \to 0 \quad , \quad 0 \to A' \otimes Z_p \to A'' \otimes Z_p \to A \otimes Z_p \to 0 \quad .$$

Elles donnent naissance à deux suites exactes d'homologie

$$\ldots \to H(A'') \to H(A) \to H(A') \to H(A'') \to \ldots$$

$$(15) \qquad \ldots \to H(A'' \otimes Z_p) \to H(A \otimes Z_p) \to H(A' \otimes Z_p) \to H(A'' \otimes Z_p) \to \ldots$$

où les homomorphismes médians sont ceux induits par f. La première donne une suite exacte

$$0 \to C \to H(A'') \to N \to 0 \quad ,$$

laquelle définit à son tour une suite exacte

$$(16) \qquad 0 \to \mathrm{Tor}(C,Z_p) \to \mathrm{Tor}(H(A''),Z_p) \to \mathrm{Tor}(N,Z_p) \to C \otimes Z_p \to H(A'') \otimes Z_p \to N \otimes Z_p \to 0 \quad .$$

Rappelons que $\mathrm{Tor}(G,Z_p)$, pour un groupe abélien G, n'est pas autre chose que ${}_pG$, sous-groupe des éléments d'ordre p de G. D'autre part, d'après la "formule de Künneth" appliquée au complexe A'' (qui est Z-libre), on a une suite exacte

$$0 \to H(A'') \otimes Z_p \to H(A'' \otimes Z_p) \to \mathrm{Tor}(H(A''),Z_p) \to 0 \quad .$$

La suite exacte (15), et l'hypothèse de l'énoncé, impliquent que $H(A'' \otimes Z_p) = 0$. Alors $H(A'') \otimes Z_p = 0$ et $\mathrm{Tor}(H(A''),Z_p) = 0$. Portant ceci dans la suite exacte (16) on trouve

$$\mathrm{Tor}(C,Z_p) = 0 \quad , \quad N \otimes Z_p = 0 \quad , \quad \mathrm{Tor}(N,Z_p) \approx C \otimes Z_p \quad .$$

La première condition exprime que la composante p-primaire de C est nulle. Si N est de type fini dans chaque degré, la condition $N \otimes Z_p = 0$ exprime que N est un groupe de torsion sans composante p-primaire ; alors $\mathrm{Tor}(N,Z_p) = 0$, et par suite $C \otimes Z_p = 0$.