H. Cartan

Détermination des algèbres $H_*(\pi, n; Z_2)$ et $H^*(\pi, n; Z_2)$; groupes stables modulo p

Séminaire Henri Cartan, tome 7, nº 1 (1954-1955), exp. nº 10, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_1_A10_0>

DÉTERMINATION DES ALGÈBRES $H_*(\Pi,n;Z_2)$ et $H^*(\Pi,n;Z_2)$; GROUPES STABLES modulo p .

(Exposé de H. CARTAN, 24.1.1955)

1.- Mots admissibles ; opérations correspondantes.

Les mots sont formés avec les deux lettres σ et γ_2 . La hauteur d'un mot α est égale au nombre de lettres σ figurant dans α ; le degré de α se définit par récurrence sur le nombre des lettres de α : le degré du mot vide est 0 , et on pose

$$(1) \qquad \deg(\sigma\alpha) = 1 + \deg(\alpha) \quad , \quad \deg(\gamma_2\alpha) = 2.\deg(\alpha) \quad .$$

La différence entre le degré et la hauteur s'appelle le degré stable.

Un mot admissible est un mot non vide qui commence par σ et qui finit par σ .

Proposition 1.- Soit α un mot admissible de hauteur n ; pour qu'un mot $\beta\alpha$ soit admissible de hauteur n+1 , il faut et il suffit que β ait la forme $\sigma(\gamma_2)^k$, k entier $\geqslant 0$ quelconque. (C'est évident).

Un mot admissible est de première espèce s'il ne se termine pas (à droite) par $\gamma_2\sigma$; de deuxième espèce s'il se termine par $\gamma_2\sigma$. A chaque mot admissible α , de première espèce, on associe une application $f(\alpha) : \Pi/2\Pi \to H_{n+q}(\Pi,n;Z_2)$, où n et q désignent la hauteur et le degré stable de α . La définition de $f(\alpha)$ se fait par récurrence sur la hauteur de α :

si α est de hauteur 1 (donc $\alpha = \sigma$) , $f(\alpha)$ est la suspension $\sigma : \Pi\otimes Z_2 \to H_1(\Pi,1;Z_2)$;

si $\alpha = \sigma(\gamma_2)^k\beta$, le mot admissible β étant de hauteur n et de degré stable q , $f(\alpha)$ est l'application composée

$$\Pi/2\Pi \xrightarrow{f(\beta)} H_{n+q}(\Pi,n;Z_2) \xrightarrow{\sigma\circ\gamma_{2k}} H_{2k(n+q)+1}(\Pi,n;Z_2) \quad ,$$

qui est définie puisque γ_2 est une opération définie sur les éléments de degré $\geqslant 2$; or si $k \geqslant 1$, on a $n+q \geqslant 2$, puisque le mot α est de première espèce.

A chaque mot admissible α , de deuxième espèce, on associe une application $f(\alpha) : {}_2\Pi \to H_{n+q}(\Pi,n;Z_2)$, où n et q désignent la hauteur et le degré stable de α . La définition de $f(\alpha)$ est encore récurrente : $f(\gamma_2\sigma)$ est l'application $\gamma_2\sigma : {}_2\Pi \to H_2(\Pi,1;Z_2)$, qui est définie puisque γ_2 est défini sur l'image de ${}_2\Pi$ par σ (Exposé n° 7, paragraphe 8). La récurrence se fait ensuite d'une manière évidente.

<u>Proposition 2</u>.- <u>Les applications</u> $f(\alpha)$ <u>sont linéaires</u>.

En effet, la suspension σ est linéaire ; de plus, sur les éléments de degré $\geqslant 2$ (et sur les éléments de $H_1(\Pi,1;Z_2)$ situés dans l'image de ${}_2\Pi$ par σ), l'application $\sigma\gamma_{2k}$ est linéaire, en vertu de la formule (3) de l'Exposé n° 7, et du fait que σ s'annule sur les éléments décomposables.

2.- <u>Les algèbres</u> $S(M^{(n)}(\Pi))$.

Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on définit un Z_2-espace vectoriel gradué $M^{(n)}(\Pi)$, comme suit : c'est la somme directe d'autant d'exemplaires de $\Pi/2\Pi$ qu'il y a de mots admissibles de hauteur n et de première espèce, et d'autant d'exemplaires de ${}_2\Pi$ qu'il y a de mots admissibles de hauteur n et de deuxième espèce. Chaque exemplaire de $\Pi/2\Pi$ (resp. de ${}_2\Pi$) est affecté d'un degré égal au degré du mot α qui l'indexe. Les applications linéaires $f(\alpha)$ définies ci-dessus définissent une application linéaire $f^{(n)}$ de l'espace vectoriel $M^{(n)}(\Pi)$ dans $H_*(\Pi,n;Z_2)$, qui conserve le degré.

Appliquons à $f^{(n)}$ le théorème 2 bis de l'Exposé n° 8 ; <u>si</u> <u>$n \geqslant 2$</u> , l'application $f^{(n)}$ se prolonge d'une seule manière en un homomorphisme $g^{(n)} : S(M^{(n)}(\Pi)) \to H_*(\Pi,n;Z_2)$, compatible avec les structures d'algèbres graduées et avec les puissances divisées. Pour $n = 1$, on peut appliquer le théorème si les puissances divisées des éléments de $H_1(\Pi,1;Z_2)$ sont définies, ce qui exige que $\Pi = {}_2\Pi$, ou, ce qui revient au même, $2\Pi = 0$. Dans ce dernier cas, on trouve un homomorphisme $g^{(1)} : S(M^{(1)}(\Pi)) \to H_*(\Pi,1;Z_2)$; observons d'ailleurs que $M^{(1)}(\Pi) = \Pi$, gradué par le degré 1.

<u>Théorème fondamental</u> : <u>si</u> $n \geqslant 2$, <u>l'homomorphisme</u> $g^{(n)}$ <u>est un isomorphisme de l'algèbre</u> $S(M^{(n)}(\Pi))$ <u>sur l'algèbre</u> $H_*(\Pi,n;Z_2)$; <u>si de plus</u> $2\Pi = 0$, $g^{(1)}$ <u>est un isomorphisme de</u> $S(M^{(1)}(\Pi))$ <u>sur</u> $H_*(\Pi,1;Z_2)$.

3.- <u>Démonstration du théorème fondamental</u>.

Le raisonnement est analogue à celui de l'Exposé n° 9, paragraphe 3. Il suffit donc de faire la démonstration lorsque Π est un groupe cyclique, d'ordre infini ou une puissance d'un nombre premier. Si Π est cyclique d'ordre p^f (p premier $\neq 2$), on a vu (Exposé n° 9, paragraphe 3) que $H_*(\Pi,n;Z_2)$ se réduit aux scalaires ; or il en est de même de $S(M^{(n)}(\Pi))$. Il reste donc à examiner le cas où Π est cyclique infini ou d'ordre 2^f .

<u>Lemme 1</u>.- Si Π est cyclique infini ou d'ordre 2^f , il existe un homomorphisme $S(M^{(2)}(\Pi)) \rightarrow \overline{\mathcal{B}}^{(2)}(Z_2(\Pi))$ qui, par passage à l'homologie, donne $g^{(2)}$ qui est un <u>isomorphisme</u>. Si de plus Π est cyclique d'ordre 2 , il existe un homomorphisme $S(M^{(1)}(\Pi)) \rightarrow \overline{\mathcal{B}}^{(1)}(Z_2(\Pi))$, compatible avec les puissances divisées, et qui, par passage à l'homologie, donne $g^{(1)}$ qui est un <u>isomorphisme</u>.

<u>Démonstration du lemme 1</u> : il suffit de reprendre le lemme 1 de l'Exposé n° 9, qui est valable aussi pour $p = 2$. Si $\overline{M}^{(1)}$ désigne le Z_2-espace vectoriel, somme directe de $\Pi/2\Pi$ (degré 1) et de $_2\Pi$ (degré 2), on a un homomorphisme de $U(\overline{M}^{(1)})$ dans la bar construction $\overline{\mathcal{B}}^{(1)}(Z_2(\Pi))$, compatible avec les puissances divisées des éléments de degré pair, et qui par passage à l'homologie donne un isomorphisme. Dans le cas particulier où $2\Pi = 0$, donc où Π est cyclique d'ordre 2 , $U(\overline{M}^{(1)})$ s'identifie à $S(M^{(1)})$, et on constate que l'homomorphisme $S(M^{(1)}) \rightarrow \overline{\mathcal{B}}^{(1)}(Z_2(\Pi))$ est alors compatible avec l'opération γ_2 sur l'élément de degré un, donc avec les puissances divisées pour tous les degrés $\geqslant 1$.

Dans le cas où Π est cyclique infini, on a obtenu un homomorphisme de l'algèbre extérieure $E_2(x,1)$ dans $\overline{\mathcal{B}}^{(1)}(Z_2(\Pi))$, qui envoie x dans la suspension du générateur a de Π , et qui, par passage à l'homologie, donne un isomorphisme. Considérons la construction acyclique $E_2(x,1) \otimes P_2(y,2)$, avec $dy = x$; elle définit un homorphisme spécial $P_2(y,2) \longrightarrow \overline{\mathcal{B}}^{(2)}(Z_2(\Pi))$, compatible avec les puissances divisées, et qui, par passage à l'homologie, donne un isomorphisme (cf. théorème 5 de l'Exposé n° 4). Or l'image de y sera $\sigma\sigma a$, et ceci prouve que cet isomorphisme n'est autre que $g^{(2)}$.

Enfin, si Π est cyclique d'ordre 2^f , on a déjà obtenu un homomorphisme de $E_2(x,1) \otimes P_2(y,2)$ (différentielle nulle) dans $\overline{\mathcal{B}}^{(1)}(Z_2(\Pi))$, qui envoie x dans la suspension du générateur a de Π , et y dans la transpotence de $a^{2^{f-1}}$, c'est-à-dire $\gamma_2\sigma(a^{2^{f-1}})$. Cet homomorphisme, compatible avec les puissances divisées, définit un isomorphisme en passant à l'homologie. On va considérer une construction acyclique (A,N,M) , d'algèbre initiale $A = E_2(x,1) \otimes P_2(y,2)$, d'où l'on déduira un homomorphisme spécial $N \rightarrow \overline{\mathcal{B}}^{(2)}(Z_2(\Pi))$, compatible avec toutes les puissances divisées, et qui, par passage à l'homologie, définira un isomorphisme. Pour fabriquer N et M , on observe que A s'écrit

$$E_2(x,1) \otimes E_2(y,2) \otimes E_2(\gamma_2 y,4) \otimes \dots \otimes E_2(\gamma_{2^k} y,2^k) \otimes \dots$$

et par suite on connait une construction acyclique M , d'algèbre initiale A . et dont l'algèbre finale est

$$N = P_2(\sigma x,2) \otimes P_2(\sigma y,3) \otimes P_2(\sigma\gamma_2 y,5) \otimes \dots \otimes P_2(\sigma\gamma_{2^k} y,2^k+1) \otimes \dots .$$

avec différentielle nulle. On a $\sigma x = \sigma\sigma a$, $\sigma\gamma_{2^k} y = \sigma\gamma_{2^{k+1}}\sigma(a^{2^{f-1}})$. Donc l'isomorphisme $N \approx H_*(\Pi,2;Z_2)$ est bien $g^{(2)}$. Et ceci achève la démonstration du lemme 1.

Pour prouver le théorème fondamental, il reste à passer de n à $n+1$, pour $n \geqslant 2$. Pour cela :

<u>Lemme 2</u>.- pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe une <u>construction acyclique</u> (sur le corps Z_2) ayant $S(M^{(n)})$ comme algèbre initiale (avec différentielle nulle), et $S(M^{(n+1)})$ comme algèbre finale (avec différentielle nulle) ; et cette construction satisfait à la condition suivante : les éléments de la base de $M^{(n+1)}$ se déduisent des éléments de la base de $M^{(n)}$ par toutes les opérations $\sigma\gamma_{2^k}$, $k \geqslant 0$.

<u>Démonstration du lemme 2</u> : l'algèbre $S(M^{(n)})$ est le produit tensoriel des algèbres de polynômes/divisées construites sur les éléments de la base de $M^{(n)}$. Le lemme 2 résulte alors de la :

<u>Proposition 3</u>.- <u>Si</u> x <u>est de degré</u> $q \geqslant 1$, <u>il existe une construction acyclique ayant</u> $P_2(x,q)$ <u>comme algèbre initiale</u> (<u>différentielle nulle</u>), <u>et dont l'algèbre finale</u> (<u>différentielle nulle</u>) <u>est le produit tensoriel</u>

$$P_2(\sigma x,q+1) \otimes P_2(\sigma\gamma_2 x,2q+1) \otimes \dots \otimes P_2(\sigma\gamma_{2^k} x,2^k q+1) \dots$$

<u>Démonstration</u> : le raisonnement a déjà été fait plus haut : on considère $P_2(x,q)$ comme le produit tensoriel

$$E_2(x,q) \otimes E_2(\gamma_2 x,2q) \otimes \dots \otimes E_2(\gamma_{2^k} x,2^k q) \otimes \dots$$

d'où suit la conclusion.

Le lemme 2 étant maintenant prouvé, le théorème fondamental s'en déduit par récurrence sur n : on trouve des homomorphismes $S(M^{(n)}(\Pi)) \to \overline{\mathcal{B}}^{(n)}(Z_2(\Pi))$, compatibles avec les puissances divisées ; par passage à l'homologie, ils donnent des isomorphismes (en vertu du théorème 2 de l'Exposé n° 2) ; et l'on voit de proche en proche que ces isomorphismes sont précisément les homomorphismes $g^{(n)}$, car ils coïncident avec $f^{(n)}$ sur la base de $M^{(n)}(\Pi)$.

4.- Structure de l'algèbre de cohomologie $H^*(\Pi, n; Z_2)$.

On raisonne exactement comme dans le cas où p est impair (Exposé n° 9, paragraphe 5) ; mais, compte tenu de la forme particulière du théorème fondamental pour $p = 2$, on trouve :

Théorème 2.- Soit $M'^{(n)}(\Pi)$ le Z_2-espace vectoriel gradué, somme directe d'autant d'exemplaires de $\mathrm{Hom}(\Pi, Z_2)$ qu'il y a de mots admissibles de première espèce et de hauteur n , et d'autant d'exemplaires de $\mathrm{Hom}({}_2\Pi, Z_2)$ qu'il y a de mots admissibles de deuxième espèce et de hauteur n ; chaque sous-espace $\mathrm{Hom}(\Pi, Z_2)$, resp. $\mathrm{Hom}({}_2\Pi, Z_2)$, est affecté d'un degré égal au degré du mot qui l'indexe. L'isomorphisme $g^{(n)}$ du théorème fondamental (valable pour $n \geqslant 2$, et aussi pour $n = 1$ lorsque $2\Pi = 0$) définit, par dualité, un isomorphisme de l'algèbre de cohomologie $H^*(\Pi, n; Z_2)$ sur l'algèbre symétrique $\sum (M'^{(n)}(\Pi))$ (algèbre commutative libre de l'espace vectoriel gradué $M'^{(n)}(\Pi))$.

5.- Schémas décrivant les mots admissibles.

Soit α un mot admissible. Numérotons de gauche à droite, par les entiers $1, 2, \ldots$, celles des lettres de α qui sont égales à γ_2 . Soit α_i la i-ième d'entre elles, et soit a_i le degré du mot β_i obtenu en enlevant du mot α la lettre α_i et toutes celles qui sont à gauche de α_i . Alors le mot $\alpha_i \beta_i$ est de degré $2a_i$, et a_i est la différence des degrés stables des mots $\alpha_i \beta_i$ et β_i ; le degré stable ne change pas par σ .

On définit a_i pour tout $i \geqslant 1$, en convenant que $a_i = 0$ si i est strictement plus grand que le nombre des lettres γ_2 figurant dans α . Un mot qui ne contient que la lettre σ définit donc la suite $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, ...

Théorème 3.- La suite $(a_1, \ldots, a_i, \ldots)$ associée à un mot admissible de hauteur n et de degré stable q satisfait aux conditions :

(ii) $\qquad a_i \geqslant 2a_{i+1}$ pour tout i ,

(iii) $\qquad \sum_i a_i = q$,

(iv) $\qquad 2\, a_1 < n+q$.

(Il n'y a pas lieu d'écrire la condition (i) : a_i est pair ou impair). Réciproquement, étant donnés n et q , toute suite (a_i) satisfaisant à ces conditions est associée à un mot admissible de hauteur n et de degré stable q , et ce mot est unique.

Démonstration : puisque $\deg(\beta_i) \geqslant \deg(\alpha_{i+1}\beta_{i+1})$, on a $a_i \geqslant 2a_{i+1}$. La relation (iii) résulte du fait que a_i est le saut du degré stable. Enfin, si $a_1 \neq 0$, on a $\alpha = \sigma^h \gamma_2 \beta$, avec $\deg(\beta) = a_1$, et $h \geqslant 1$; d'où (iv).

Réciproquement, si des $a_i \geqslant 0$ vérifient (ii) et (iv), posons $h_{i+1} = a_i - 2a_{i+1} \geqslant 0$; h_{i+1} est le nombre des lettres σ qui doivent figurer entre α_i et α_{i+1} dans le mot α cherché. Ceci détermine α , à cela près qu'il reste à déterminer le nombre h_1 des lettres σ venant à gauche de α_1 ; on a $h_1 = n+q-2a_1$, qui est bien $\geqslant 1$ d'après (iv). Le degré stable q du mot α ainsi obtenu satisfait à (iii).

Remarque : la connaissance des entiers h_{i+1} $(i \geqslant 1)$, qui sont $\geqslant 0$, détermine la suite des a_i par la formule

$$a_i = \sum_{j\geq 0} 2^j h_{i+j+1} \quad . \tag{2}$$

Autre remarque : pour que le mot α associé à une suite (a_i) soit de deuxième espèce, il faut et il suffit que le dernier des $a_i \neq 0$ soit égal à 1.

6.- Groupes stables.

Soit p un entier premier. Si $q < (p-1)n$, toute suite (a_i) satisfaisant aux conditions (i), (ii), (iii) du théorème 3 de l'Exposé n° 9 , satisfait aussi à (iv) ; il en est de même pour $p = 2$, en se référant au théorème 2 ci-dessus. Autrement dit, les sous-espaces $M^{(n)}_{n+q}(\Pi)$ des éléments de degré $n+q$ de $M^{(n)}(\Pi)$, pour un q donné (et un p premier donné) sont indépendants de n dès que $n > q/(p-1)$. On les notera $A_q(\Pi;Z_p)$.

Observons de plus que $U_{n+q}(M^{(n)}(\Pi))$ se réduit à $M^{(n)}_{n+q}(\Pi)$ si $n > q$; on a donc des isomorphismes naturels

$$H_{n+q}(\Pi,n;Z_p) \approx A_q(\Pi;Z_p) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant q < n \ .$$

Ces divers isomorphismes se déduisent les uns des autres par la suspension $H_{n+q}(\Pi,n;Z_p) \rightarrow H_{n+q+1}(\Pi,n+1;Z_p)$ (cf. théorème 1 de l'Exposé n° 6). Les Z_p-espaces vectoriels $A_q(\Pi;Z_p)$ sont les groupes stables d'Eilenberg-MacLane. Ils sont décrits par les suites (a_i) qui satisfont à (i), (ii), (iii) ; ceci les détermine entièrement.

Proposition 4.- Soit b_q (resp. b'_q) le nombre des mots admissibles (resp. des mots admissibles de première espèce) de degré stable q ; c'est la dimension de l'espace vectoriel $A_q(\Pi;Z_p)$ lorsque Π est cyclique d'ordre p^f (resp.

lorsque π est cyclique infini). La série de Poincaré $\vartheta_p(t) = \sum_{q\geqslant 0} b_q t^q$, resp. $\vartheta'_p(t) = \sum_{q\geqslant 0} b'_q t^q$, est donnée par

$$(3) \qquad \vartheta_p(t) = \prod_{k\geqslant 0} \frac{1+t^{2p^k-1}}{1-t^{2p^{k+1}-2}} ,$$

$$(3') \qquad \vartheta'_p(t) = \frac{\vartheta_p(t)}{1+t} = \prod_{k\geqslant 1} \frac{1+t^{2p^k-1}}{1-t^{2p^k-2}} .$$

Ces formules, valables aussi pour $p = 2$, deviennent dans ce cas :

$$\vartheta_2(t) = \prod_{k\geqslant 1} \frac{1}{1-t^{2^k-1}} , \qquad \vartheta'_2(t) = \frac{1}{1-t^2} \cdot \prod_{k\geqslant 2} \frac{1}{1-t^{2^k-1}} .$$

Démonstration : $\vartheta_p(t)$ est la somme des monômes t^q attachés à toutes les suites (a_i) satisfaisant à (i), (ii), (iii). Avec les notations du paragraphe 6 de l'Exposé n° 9, on a

$$q = \sum_{i\geqslant 1} a_i = \sum_{i\geqslant 1} 2(p-1)k_i+u_i = \sum_{i\geqslant 1, j\geqslant 0} 2(p-1)p^j(h_{i+j+1}+u_{i+j+1})+u_i =$$

$$= u_1 + (2p-1)u_2 +\ldots+ (2p^i-1)u_{i+1} +\ldots+ 2(p-1)h_2 + 2(p^2-1)h_3 + \ldots$$

$$+ 2(p^{i+1}-1)h_{i+2} + \ldots$$

Ainsi le monôme t^q attaché à une suite (a_i) définie par $u_1, \ldots$ et $h_2, \ldots$ est égal au produit

$$(4) \qquad t^{u_1}(t^{2p-1})^{u_2}\ldots(t^{2p^i-1})^{u_{i+1}}\ldots(t^{2p-2})^{h_2}\ldots(t^{2p^{i+1}-2})^{h_{i+2}}\ldots$$

Or les u_i $(i\geqslant 1)$ peuvent prendre indépendamment les valeurs 0 et 1 ; et les h_i $(i\geqslant 2)$ peuvent prendre toutes les valeurs entières $\geqslant 0$. Il s'ensuit que la somme de tous les monômes de la forme (4) est donnée par la formule (3). Cette formule, établie en supposant p impair, vaut en fait pour $p = 2$, comme le montre un calcul direct.

Cherchons maintenant la série $\vartheta'_p(t)$ correspondant aux mots admissibles de première espèce. À toute suite (a_i) de première espèce (suite satisfaisant aux conditions (i), (ii), (iii) du théorème 3 de l'Exposé n° 9, et telles que le dernier a_i non nul soit $\geqslant 2p-2$) correspond une suite de deuxième espèce,

obtenue en remplaçant par 1 le premier des a_i nuls de la suite. On en déduit aussitôt que $\sum_{q \geqslant 0} (b'_q t^q + b'_q t^{q+1}) = \sum_q b_q t^q$, autrement dit :
$(1+t)\vartheta'_p(t) = \vartheta_p(t)$. Ceci achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE.

Une partie des résultats de cet exposé a été établie, par une autre méthode, dans l'article :

J.P. SERRE, Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane (Comm. Math. Helv. 27, 1953, p. 198-231).

On y trouve aussi le calcul de la composante 2-primaire de l'homologie à coefficients entiers d'un groupe cyclique, ainsi que des formules donnant les séries de Poincaré des espaces vectoriels $H_*(\Pi, n; Z_2)$ pour Π cyclique.
