

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

H. CARTAN

**Points singuliers d'un ensemble analytique notion de
dénominateur universel**

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. n° 9, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A9_0

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

POINTS SINGULIERS D'UN ENSEMBLE ANALYTIQUE
NOTION DE DÉNOMINATEUR UNIVERSEL

(Exposé de H. Cartan, 8-2-1954,
révisé ultérieurement)

§1. Points singuliers d'un ensemble analytique.

Soit V un germe de sous-ensemble analytique à l'origine 0 de $\mathbb{C}^n$. On dit que 0 est un point régulier (ou simple) de V s'il existe un entier k tel que l'algèbre analytique $A(V)$ soit isomorphe à l'algèbre H_k . Il revient au même de dire que le germe V est isomorphe au germe d'espace $\mathbb{C}^k$ à l'origine de $\mathbb{C}^k$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que V soit le germe (à l'origine) d'une sous-variété analytique de dimension k dans $\mathbb{C}^n$. C'est évidemment suffisant; et c'est nécessaire, car si on a deux germes d'isomorphismes $\mathbb{C}^k \rightarrow V$ et $V \rightarrow \mathbb{C}^k$, réciproques l'un de l'autre, ils sont induits par deux germes d'applications holomorphes

$$f: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad g: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^k$$

telles que $g \circ f$ soit l'application identique de $\mathbb{C}^k$; il en résulte que f est de rang k à l'origine, et le théorème des fonctions implicites montre alors que l'image de f , qui est justement V , est un germe de sous-variété de $\mathbb{C}^n$.

Soit maintenant V un germe quelconque d'ensemble analytique à l'origine de $\mathbb{C}^n$. On a vu (Exposé 8, Prop. 5) que l'ensemble des points réguliers de V est un ouvert partout dense; si V est irréductible, l'ouvert des points réguliers est connexe (au sens des germes), cf. Exp. 8,

§2. On se propose maintenant de démontrer le résultat plus précis:

Théorème 1. L'ensemble $S(V)$ des points singuliers (i.e. non réguliers) d'un germe d'ensemble analytique V est un germe d'ensemble analytique.

Ceci entraîne aussitôt:

Corollaire. Etant donné un sous-ensemble analytique V d'une variété analytique complexe X , l'ensemble S des points singuliers de V est un sous-ensemble analytique.

Observons d'abord que si le Théorème 1 est prouvé dans le cas d'un germe irréductible V , on en déduit qu'il est vrai dans le cas d'un germe quelconque, en raisonnant comme suit. Si V est un germe quelconque d'ensemble analytique, V est réunion d'une famille finie de germes irréductibles V^i tels que $V^i \not\subset V^j$ pour $i \neq j$ (cf. Exposé 4, §3). Pour qu'un point $x \in V$ soit régulier, il faut et il suffit que x appartienne à un seul V^i et qu'il soit régulier pour V^i ; donc l'ensemble $S(V)$ des points singuliers de V est la réunion des $S(V^i)$ et des intersections $V^i \cap V^j$ pour $i \neq j$. Si on sait que les $S(V^i)$ sont des germes d'ensemble analytique, on conclut que $S(V)$ est un germe d'ensemble analytique.

Mais, dans le raisonnement précédent, on a admis que les points de $V^i \cap V^j$ (avec $i \neq j$) ne sont pas réguliers pour V . Or ceci n'est évident qu'à condition de savoir qu'en un point x commun à V^i et V^j les germes V_x^i et V_x^j sont tels qu'aucun n'est contenu dans l'autre, tout au moins dès que x est assez voisin de l'origine 0 . Or cette dernière assertion a besoin d'être prouvée. Elle résulte aussitôt du lemme suivant:

Lemme 1. Soient V^1 et V^2 deux germes d'ensemble analytique à l'origine 0 , tels que: 1° V^1 soit irréductible; 2° V^1 ne soit pas contenu dans V^2 . Alors, pour tout x assez voisin de 0 et appartenant à V^1 , le germe V_x^1 n'est pas contenu dans le germe V_x^2 .

Prouvons ce lemme. Il existe un système fini de fonctions f_α holomorphes au voisinage de 0 , dont l'annulation définit V^2 ; donc, en tout point x voisin de 0 , l'annulation des f_α définit le germe V_x^2 . Puisque le germe V^1 est irréductible, il existe un voisinage ouvert U de 0 tel que l'ensemble des points réguliers de V^1 contenu dans U soit connexe. Soit alors x un point de $U \cap V^1$; si le germe V_x^1 était contenu dans le

germe V_x^2 , toutes les f_α s'annuleraient sur le germe V_x^1 , et il en serait donc de même en tout point $y \in V^1$ suffisamment voisin de x . Or il y a de tels y qui sont réguliers et appartiennent à U . Puisque l'ensemble des points réguliers de V^1 contenus dans U est connexe, il s'ensuit (par prolongement analytique) que les f_α s'annulent en tout point régulier de V^1 contenu dans U , donc, à la limite, les f_α s'annulent sur le germe V^1 à l'origine; ceci signifie que le germe V^1 est contenu dans le germe V^2 , contrairement à l'hypothèse. C.Q.F.D.

§2. Démonstration du Théorème 1 dans le cas d'un germe irréductible .

Nous aurons besoin d'un lemme:

Lemme 2. Soit Ψ une famille (non supposée finie) de fonctions holomorphes dans un voisinage ouvert U de l'origine 0 de $\mathbb{C}^n$; alors il existe un voisinage ouvert U' de 0 ($U' \subset U$) et un système fini de $f_i \in \Psi$ jouissant de la propriété suivante: toute $f \in \Psi$ s'écrit, dans U' , sous la forme d'une combinaison linéaire des f_i à coefficients holomorphes dans U' .

(Pour la démonstration voir Séminaire 1951-52, Exposé 11, Th. 2, et Exposé 18, §5, Coroll. 3.)

Ce lemme entraîne aussitôt le suivant:

Lemme 3. Etant donnée une famille de fonctions holomorphes dans une variété analytique complexe X , l'ensemble de leurs zéros communs est un sous-ensemble analytique de X .

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le Théorème 1 dans le cas où le germe V est irréductible (à l'origine 0 de $\mathbb{C}^n$). Reprenons la description du germe V donnée dans l'Exposé 8 (§§1 et 2). En désignant par k la dimension de V , on a un choix des coordonnées $x_1, \dots, x_n$ de l'espace ambiant $\mathbb{C}^n$ tel que $x_1, \dots, x_k$ ne s'annulent simultanément sur V qu'à l'origine. En outre cette description conduit à introduire un polynôme distingué irréductible $P(z)$ (à coefficients holomorphes en

$x_1, \dots, x_k$), et on peut supposer que z est la coordonnée x_{k+1} ; alors les points réguliers de V pour lesquels $x_1, \dots, x_k$ forment un système de coordonnées locales sur V sont exactement ceux où la dérivée $P'(z)$ est $\neq 0$. Bien entendu, on n'obtient pas ainsi tous les points réguliers de V . Toutefois, en tout point régulier de V (voisin de 0), on peut choisir des constantes c_{ij} (arbitrairement petites) telles que les fonctions

$$x_i + \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \quad (1 \leq i \leq k)$$

forment un système de coordonnées locales en ce point.

Cette remarque conduit à introduire nk nouvelles variables y_{ij} ($1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n$), et à poser

$$(1) \quad X_i = x_i + \sum_{j=1}^n y_{ij} x_j \quad (1 \leq i \leq k).$$

De (1) on tire inversement

$$(2) \quad x_i = \sum_{j=1}^k \lambda_{ij} X_j + \sum_{m=k+1}^n \mu_{im} x_m,$$

où les λ_{ij} et les μ_{im} sont des fonctions holomorphes des variables y_{ij} au voisinage de 0. Les formules (1) définissent un germe d'isomorphisme f de $\mathbb{C}^{(k+1)n}$ (coordonnées $x_1, \dots, x_n, y_{ij}$) sur $\mathbb{C}^{(k+1)n}$ (coordonnées $X_1, \dots, X_k, x_{k+1}, \dots, x_n, y_{ij}$). Et les formules (2) définissent l'isomorphisme réciproque g . Alors f induit un isomorphisme du germe-produit $V \times \mathbb{C}^{kn}$ sur un germe d'ensemble analytique W de $\mathbb{C}^{(k+1)n}$; W , comme $V \times \mathbb{C}^{kn}$, est de dimension $k(n+1)$. Et g , suivi de la projection $\mathbb{C}^{(k+1)n} \rightarrow \mathbb{C}^n$ qui, au point $(x_1, \dots, x_n, y_{ij})$, associe le point $(x_1, \dots, x_n)$, définit une projection p du germe W sur le germe V . Puisque V est irréductible, on peut montrer sans peine que $V \times \mathbb{C}^{kn}$ est un germe irréductible dans $\mathbb{C}^{(k+1)n}$, donc W est un germe irréductible.

D'après ce qu'on a vu plus haut, tout point régulier de V (voisin de l'origine) est la projection, par p , d'un point régulier de W (voisin de l'origine) tel que $X_1, \dots, X_k$ et les y_{ij} forment un système de coordonnées locales sur W . Autrement dit, l'ensemble $S(V)$ des points singuliers de V se compose des points $x \in V$ tels que, pour tout point de la fibre $p^{-1}(x)$, les fonctions $X_1, \dots, X_k$ et y_{ij} ne soient pas un système de coordonnées locales pour ce point.

Sur le germe W , les fonctions $X_1, \dots, X_k$ et les y_{ij} sont en nombre égal à la dimension de W et elles ne s'annulent simultanément qu'à l'origine. Il s'ensuit qu'on peut appliquer à W les résultats rappelés, au début de ce paragraphe, pour V . Il s'introduit donc un polynôme distingué irréductible $Q(z)$, à coefficients holomorphes en $X_1, \dots, X_k$ et les y_{ij} ; on peut supposer que z est la coordonnée x_{k+1} ; et les points réguliers de W pour lesquels $X_1, \dots, X_k$ et les y_{ij} forment un système de coordonnées locales sont ceux où le polynôme dérivé

$$Q'(x_{k+1}; X_1, \dots, X_k, y_{ij})$$

est $\neq 0$. Finalement, il résulte de tout ce qui précède que les points singuliers de V sont ceux tels que l'on ait

$$(3) \quad Q'(x_{k+1}; x_i + \sum_j y_{ij} x_j, y_{ij}) = 0$$

quels que soient les nombres y_{ij} voisins de zéro. Ce sont donc, parmi les points de C^n (coordonnées $x_1, \dots, x_n$) ceux qui satisfont à un système infini d'équations holomorphes en $x_1, \dots, x_n$, les premiers membres de ce système étant holomorphes dans un voisinage fixe de l'origine. D'après le Lemme 3, les solutions d'un tel système définissent un germe d'ensemble analytique à l'origine. Et ceci achève la démonstration du Théorème 1.

Remarque: si V est irréductible de dimension k , toutes les composantes irréductibles de $S(V)$ sont de dimension $\leq k-1$, puisque $S(V) \neq V$.

§3. La notion de dénominateur universel

Soit V un germe d'ensemble analytique à l'origine 0 de $\mathbb{C}^n$, et soient V^i ses composantes irréductibles. Notons $A(V)$, resp. $A(V^i)$, l'algèbre des germes de fonctions induites sur V (resp. sur V^i) par les germes de fonctions holomorphes de l'espace ambiant. Soit $\tilde{A}(V)$, resp. $\tilde{A}(V^i)$, la clôture intégrale de $A(V)$, resp. de $A(V^i)$. Les Propositions 5 et 6 de l'Exposé 7 entraînent aussitôt le théorème suivant:

Théorème 2. Les projections $A(V) \rightarrow A(V^i)$ (définies par les in-
clusions $V^i \rightarrow V)$ identifient l'algèbre $\tilde{A}(V)$ au produit des algèbres $\tilde{A}(V^i)$.
L'algèbre $\tilde{A}(V)$ est un module de type fini sur $A(V)$, et c'est un anneau
noethérien.

Puisque la clôture intégrale $\tilde{A}(V)$ est contenue, par définition, dans l'anneau complet des fractions de $A(V)$, tout élément de $\tilde{A}(V)$ peut s'écrire comme une fraction u/v , où u et v sont dans $A(V)$, v étant pas diviseur de zéro dans $A(V)$; cette dernière condition exprime que le germe de fonction de l'espace ambiant qui induit v ne s'annule identiquement sur aucune des composantes irréductibles V^i .

Définition: on appelle dénominateur universel pour le germe d'ensemble analytique V , un élément $v \in A(V)$, non diviseur de zéro, tel que, pour tout $f \in \tilde{A}(V)$, le produit vf soit dans $A(V)$. Autrement dit, on demande que tout élément de $\tilde{A}(V)$ puisse s'écrire sous la forme d'une fraction ayant v pour dénominateur (le numérateur étant, bien entendu, dans $A(V)$).

Proposition 1. Un germe d'ensemble analytique V possède toujours
un dénominateur universel.

Cela résulte immédiatement du fait que $\tilde{A}(V)$ est un module de type fini sur $A(V)$. En effet, soit (f_α) un système fini de générateurs de ce module; on a $f_\alpha = u_\alpha/v_\alpha$, avec u_α et v_α dans $A(V)$, v_α non diviseur de zéro. Alors le produit v des v_α n'est pas diviseur de zéro, et il évi-
dent que c'est un dénominateur universel.

On étudiera plus loin (Théorèmes 3 et 4) les dénominateurs universels d'un germe d'ensemble analytique irréductible. Dès maintenant, on va voir comment la connaissance, pour chaque composante irréductible V^i de V (V non supposé irréductible), d'un dénominateur universel v^i , permet de construire un dénominateur universel pour V . Pour chaque i , il existe une fonction holomorphe g^i de l'espace ambiant qui induit la constante 0 sur chaque germe V^j ($j \neq i$) et n'induit pas zéro sur V^i .

Proposition 2. Avec les notations précédentes, la fonction

$$v = \sum_i g^i v^i$$

est un dénominateur universel pour le germe V .

Démonstration: sur V^i , v induit le même germe de fonction que $g^i v^i$, donc V n'induit pas identiquement 0 sur V^i ; ainsi v n'est pas diviseur de zéro dans $A(V)$. Soit alors $f = (f^i)$ un élément de $\tilde{A}(V) \approx \prod_i \tilde{A}(V^i)$, avec $f^i \in \tilde{A}(V^i)$. On va montrer qu'il existe une ϕ holomorphe dans l'espace ambiant qui, sur chaque V^i , induit la même fonction que vf . Or vf induit sur V^i la même fonction que $g^i v^i f^i$; et $v^i f^i$ est, par hypothèse, induite par une fonction ϕ^i holomorphe dans l'espace ambiant. Donc vf induit sur V^i la même fonction que $g^i \phi^i$, et aussi la même fonction que $\sum_j g^j \phi^j$, puisque g^j induit zéro sur V^i pour $j \neq i$. Posons

$$\phi = \sum_i g^i \phi^i ;$$

ϕ satisfait bien aux conditions exigées.

C.Q.F.D.

§4. Etude des dénominateurs universels d'un germe irréductible.

Soit maintenant V un sous-ensemble analytique dans un voisinage ouvert U de l'origine 0 de C^n , et soit V_0 son germe à l'origine, supposé irréductible. Reprenons la description canonique de V_0 rappelée au §2 de cet Exposé: il s'introduit un polynôme distingué irréductible

$P(z; x_1, \dots, x_k)$. L'Exposé 7 (Corollaire au Lemme 1) montre que le polynôme dérivé $P'(z; x_1, \dots, x_k)$ est un dénominateur universel pour le germe V_0 . Aux points $x \in V$ voisins de 0, le germe V_x n'est plus nécessairement irréductible; toutefois le même corollaire est encore applicable. Ainsi $P'(z)$ est un dénominateur universel en tout point de V suffisamment voisin de l'origine 0, du moment que V est irréductible à l'origine.

Revenons alors au polynôme Q de la fin du §2 ci-dessus. Pour chaque système de valeurs données aux y_{ij} (et voisines de zéro), le polynôme dérivé Q' est un dénominateur universel pour le germe V_x en tout point $x \in V$ suffisamment voisin de l'origine. Compte tenu des résultats de la fin du §2, on peut énoncer:

Théorème 3. Soit V un sous-ensemble analytique d'une variété analytique X , supposé irréductible en l'un de ses points a . Alors il existe un système fini de fonctions v_i , holomorphes au voisinage de a dans X , qui jouissent des propriétés suivantes:

(i) le germe S_a défini, au point a , par l'ensemble S des points singuliers de V , est l'ensemble des points du germe V_a défini par les équations $v_i = 0$;

(ii) chacune des fonctions v_i est un dénominateur universel pour V au point a et en chaque point $x \in V$ suffisamment voisin de a .

On va maintenant prouver le:

Théorème 4. Soit V un sous-ensemble analytique d'une variété analytique X , supposé irréductible en l'un de ses points a , et soit S l'ensemble des points singuliers de V . Si une fonction w holomorphe dans X au voisinage de a s'annule identiquement sur le germe S_a sans s'annuler identiquement sur le germe V_a , il existe un entier $h > 0$ tel que la puissance w^h soit un dénominateur universel pour V au point a et en chaque point $x \in V$ assez voisin de a .

Démonstration: soit I l'idéal (premier) du germe V_a ; I et les fonctions v_i du Théorème 3 engendrent un idéal J , et S_a est le germe

des zéros de l'idéal J , d'après le Théorème 3. En vertu du "Nullstellensatz" (Exp. 8, Théorème 1 et son corollaire), il existe un exposant h tel que $w^h \in J$. On a donc

$$w^h = \sum_i u_i v_i + \varphi_i,$$

les u_i étant holomorphes au voisinage de a dans la variété ambiante X , et φ étant dans l'idéal I . En un point $x \in V$ assez voisin de a , les v_i sont des dénominateurs universels (Théorème 3). Donc si $f \in \tilde{A}(V_X)$, chaque produit $v_i f$ est égal à un élément $g_i \in A(V_X)$; donc on a

$$w^h f = \sum_i u_i g_i \text{ dans l'anneau } \tilde{A}(V_X),$$

et comme $\sum_i u_i g_i \in A(V_X)$, on a bien prouvé que w^h est un dénominateur universel au point x .

Remarque finale: soit, dans une variété analytique complexe X , un sous-ensemble analytique V , et soit $a \in V$. Soient V_a^i les composantes irréductibles du germe V_a . Chaque V_a^i est le germe d'un sous-ensemble analytique V^i dans un voisinage convenable de a ; on peut choisir un voisinage U assez petit de a dans lequel tous les V^i sont définis, leur réunion étant $V \cap U$. Avec les notations de la Proposition 2, supposons que la fonction v^i (holomorphe au voisinage de a) soit un dénominateur universel pour V^i en chacun de ses points suffisamment voisins de a (cf. Théorème 3). Alors la démonstration de la Proposition 2 prouve, en fait, que la fonction

$$v = \sum_i g^i v^i$$

est un dénominateur universel pour l'ensemble V en chaque point de V suffisamment voisin de a .

BIBLIOGRAPHIE

Pour la notion de dénominateur universel, et le Théorème 4, voir K. OKA, Journal Math. Soc. Japan, 3(1951), p. 259-278. Voir notamment l'énoncé du haut de la page 265.

Le lecteur pourra aussi consulter le livre de M. HERVÉ, Several Complex Variables, Local Theory, Oxford Univ. Press 1963; voir Chap. IV, §6.