

# SÉMINAIRE HENRI CARTAN

J-P. SERRE

**Fonctions automorphes d'une variable : application du  
théorème de Riemann-Roch (suite)**

*Séminaire Henri Cartan*, tome 6 (1953-1954), exp. n° 5, p. 1-4

[http://www.numdam.org/item?id=SHC\\_1953-1954\\_\\_6\\_\\_A5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A5_0)

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS AUTOMORPHES D'UNE VARIABLE: APPLICATION  
DU THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH (Suite)

(Exposé de J.-P. Serre, 11-1-54)

§3. Cas où  $\hat{X}$  est compact

Conservons les notations du §2, et soit  $G$  un groupe discret d'automorphismes du disque unité  $Y$ . Nous ne supposons plus que  $X = Y/G$  soit compact; le groupe  $G$  peut alors contenir des transformations paraboliques, dont les points doubles (situés sur la circonférence  $C: |z| = 1$ ) sont dits points paraboliques de  $G$ . On sait que l'on peut rajouter ces points à  $Y$  de façon à obtenir un espace  $\hat{Y}$  sur lequel opère le groupe  $G$ , et que l'espace quotient  $\hat{X} = \hat{Y}/G$  est une variété analytique complexe de dimension 1 (cf. exp. 3); nous noterons encore  $\pi: \hat{Y} \rightarrow \hat{X}$  la projection canonique de  $\hat{Y}$  sur  $\hat{X}$ .

Si  $Q \in \hat{Y}$  est un point parabolique de  $G$ , nous noterons  $G_Q$  le sous-groupe de  $G$  formé des  $g \in G$  tels que  $g \cdot Q = Q$ . On sait (exp. 3) que  $G_Q$  est un groupe cyclique infini, engendré par une transformation de la forme:

$$\frac{1}{z' - Q} = \frac{1}{z - Q} + h, \quad h \in \mathbb{C},$$

où  $h$  n'est déterminé qu'au signe près. Soit  $P = \pi(Q) \in \hat{X}$ , et soit  $t_P$  la fonction:

$$t_P = e^{2\pi i/h(z-Q)}.$$

Cette fonction est invariante par  $G_Q$ , donc définit une fonction sur  $\hat{X}$ ; de plus, si le signe de  $h$  est choisi convenablement, on vérifie que  $t_P$  est une uniformisante locale en  $P$ .

Soit  $g$  une fonction automorphe de poids  $n$  sur  $Y$ ; la fonction  $(z-Q)^{2n} \cdot g(z)$  est alors invariante par  $G_Q$  (Rappelons brièvement la démonstration: du fait que  $g$  est de poids  $n$ , on a  $g(z) \cdot dz^n = g(z') \cdot dz'^n$ , et

comme  $dz/(z-Q)^2 = dz'/(z'-Q)^2$ , on en tire bien  $g(z) \cdot (z-Q)^{2n} = g(z') \cdot (z'-Q)^{2n}$ . On peut alors parler de l'ordre au point  $P$  de la fonction  $(z-Q)^{2n} \cdot g(z)$ , si cette fonction est méromorphe (ce que nous supposons); cet ordre ne dépend que de  $g$  et de  $P$ , et sera noté  $\hat{o}_P(g)$ . Si  $g_1$  et  $g_2$  sont deux fonctions automorphes, on a  $\hat{o}_P(g_1 \cdot g_2) = \hat{o}_P(g_1) + \hat{o}_P(g_2)$ . Enfin, si  $n = 1$ , la forme différentielle  $g \cdot dz$  est invariante par  $G$ , donc est de la forme  $\pi^*(\omega)$ , où  $\omega$  est une forme différentielle sur  $X$ ; dire que  $g$  est méromorphe en  $P$  équivaut à dire que  $\omega$  est méromorphe en  $P$ , et l'on a la formule:

$$\hat{o}_P(g) = o_P(\omega) + 1.$$

(En effet, on a  $\omega = \lambda \cdot (z-Q)^2 g(z) \cdot dt_P/t_P$ ,  $\lambda \neq 0$ .)

Nous dirons qu'une fonction automorphe de poids  $n$ , soit  $g$ , est holomorphe en  $P$  si  $\hat{o}_P(g) \geq 0$ , ou, ce qui revient au même, si pour  $Q$  se projetant en  $P$ , la fonction  $(z-Q)^{2n} \cdot g(z)$  est fonction holomorphe de l'uniformisante locale  $t_P$ . Une fonction de poids  $n$  sera dite holomorphe sur  $\hat{Y}$  si elle est holomorphe en tout point de  $Y$  et aussi en tout point parabolique. Nous noterons  $D_n$  l'espace vectoriel formé par ces fonctions, et  $d_n$  la dimension de  $D_n$ . S'il n'y a pas de points paraboliques, ces définitions se réduisent à celles du §2.

Etudions maintenant l'espace  $D_n$ . Comme au §2, nous choisirons une fois pour toutes une fonction  $g$ , méromorphe et de poids 1 sur  $Y$ , non identiquement nulle, et méromorphe en tous les points paraboliques. Une telle fonction existe: il suffit de prendre un quotient de séries de Poincaré (cf. exp. 3). On a  $g \cdot dz = \pi^*(\omega)$ , où  $\omega$  est une différentielle méromorphe sur  $\hat{X}$ .

Toute fonction méromorphe  $h$  de poids  $n$  s'écrit alors:

$$h = \tilde{f} \cdot g^n, \text{ avec } \tilde{f} = f \circ \pi, \text{ } f \text{ méromorphe sur } \hat{X}.$$

Pour que  $h$  soit holomorphe en un point  $P \in X$ , il faut et il suffit (cf. §2) que:

$$o_P(f) \geq -n \cdot o_P(\omega) - \left[ n \left( 1 - \frac{1}{e_P} \right) \right], \quad e_P \text{ indice de ramification en } P.$$

De même pour que  $h$  soit holomorphe en un point parabolique  $P \in \hat{X}$ , il faut et il suffit que;

$$\begin{aligned} \hat{o}_P(\tilde{f}) &\geq -n \cdot \hat{o}_P(g), \quad \text{c'est-à-dire:} \\ o_P(f) &\geq -n \cdot o_P(\omega) - n. \end{aligned}$$

Posons alors  $e_P = \infty$  si  $P$  est un point parabolique de  $\hat{X}$ . On voit que la formule:

$$o_P(f) \geq -n \cdot o_P(\omega) - \left[ n \left( 1 - \frac{1}{e_P} \right) \right] \quad \text{pour tout } P \in \hat{X},$$

est nécessaire et suffisante pour que  $h$  soit holomorphe sur  $\hat{Y}$ .

Soit  $K = (\omega)$  le diviseur de  $\omega$ , et posons:

$$E_n = n \cdot K + \sum_{P \in \hat{X}} \left[ n \left( 1 - \frac{1}{e_P} \right) \right].$$

On a ainsi obtenu une généralisation de la proposition 1 du §2:

PROPOSITION 3. L'application  $f \rightarrow \tilde{f} \cdot g^n$  est un isomorphisme de  $L(E_n)$  sur  $D_n$ .

COROLLAIRE.  $d_n = l(E_n)$ .

Si  $\hat{X}$  n'est pas compacte, le th. de Behnke-Stein déjà cité montre que  $d_n = +\infty$  (et donne d'autres renseignements, bien plus précis).

Nous supposons à partir de maintenant que  $\hat{X}$  est compact. Cette hypothèse est vérifiée dans les cas particuliers les plus importants, par exemple lorsque  $G$  est le groupe modulaire ou un sous-groupe d'indice fini du groupe modulaire.

On peut alors appliquer le théorème de Riemann-Roch au calcul de  $l(E_n)$ . Il faut d'abord montrer que le nombre

$$A = 2g - 2 + \sum \left( 1 - \frac{1}{e_P} \right)$$

est  $> 0$ , ce qui se fait comme au §2 (puisque les séries de Poincaré sont holomorphes sur  $\hat{Y}$ , d'après l'exposé 3). On en tire que  $\deg(E_n) > 2g - 2$  si  $n \geq 2$ , d'où:

PROPOSITION 4. Si  $\hat{X} = \hat{Y}/G$  est compact et de genre  $g$ , on a:

$$d_n = (2n-1)(g-1) + \sum_{P \in \hat{X}} \left[ n \left( 1 - \frac{1}{e_P} \right) \right] \quad \text{si } n \geq 2.$$

Si  $n = 0$ , on a  $E_n = 0$ , d'où  $d_0 = 1$ .

Si  $n = 1$ , on a  $E_n = K + \sum_{P \in \hat{X}-X} P$ ; donc, s'il y a au moins un point parabolique, on a  $\deg(E_1) > 2g-2 = \deg(K)$ , d'où  $d_1 = g-1+r$ ,  $r$  étant le nombre de points paraboliques.

Exemple. On prend pour  $G$  le groupe modulaire  $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $ad-bc = 1$ ,  $a, b, c, d$  entiers, qui opère sur le demi-plan supérieur. On a  $g = 0$ , et les  $e_P$  sont tous nuls, sauf trois d'entre eux, égaux respectivement à  $(2, 3, \infty)$  ("signature" des ramifications). On en déduit la dimension de l'espace des formes modulaires de degré  $2n$ ; on pourra vérifier la formule obtenue en se reportant à l'exposé de Godement au Sémin. Bourbaki, Février 1953.

Autre exemple: le groupe modulaire arithmétique, sous-groupe d'indice 6 du précédent, formé des  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  où  $b$  et  $c$  sont pairs. On a encore  $g = 0$ , et la signature est  $(\infty, \infty, \infty)$ ; c'est le groupe qui donne le revêtement universel de la sphère privée de 3 points et qui conduit au théorème de Picard.

Plus généralement, en imposant des conditions de congruence aux  $a, b, c, d$  on obtient les "groupes de congruence," qui sont des sous-groupes d'indice fini du groupe modulaire.