

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

J-P. SERRE

Fonctions automorphes d'une variable : application du théorème de Riemann-Roch

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. n° 4, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A4_0

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS AUTOMORPHES D'UNE VARIABLE: APPLICATION
DU THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH

(Exposé de J-P. Serre, 21-12-53)

§1. Enoncé du théorème de Riemann-Roch

Soit X une variété analytique complexe de dimension 1 (i.e., une "surface de Riemann"), connexe et compacte. Au point de vue topologique X est une surface orientable, donc son 1er nombre de Betti est pair, soit $2g$. L'entier positif g est dit le genre de X .

Conformément aux définitions générales (cf. exposé 1, Appendice) un diviseur D sur X est un élément du groupe libre admettant comme base l'ensemble des points de X . Autrement dit, on a:

$$D = \sum_{P \in X} n_P \cdot P,$$

où les n_P sont des éléments de $\mathbb{Z}$ nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

Le diviseur D est dit positif si $n_P \geq 0$ pour tout $P \in X$; ainsi le groupe des diviseurs est un groupe ordonné (partiellement).

Le degré du diviseur D est l'entier:

$$\deg(D) = \sum_{P \in X} n_P.$$

Soit P un point de X et soit t_P une uniformisante locale en P , c'est-à-dire une carte locale en P appliquant P sur 0 . Si f est une fonction méromorphe au voisinage de P , on peut définir l'ordre n de f en P : c'est l'unique entier tel que $f = (t_P)^n \cdot g$, où g est holomorphe et non nulle au voisinage de P (si $f = 0$, on prend $n = +\infty$, par convention); l'entier n dépend de P et de f , nous le noterons $o_P(f)$; on a $o_P(f_1 + f_2) \geq \inf(o_P(f_1), o_P(f_2))$ et $o_P(f_1 f_2) = o_P(f_1) + o_P(f_2)$. Si $f \neq 0$, les $o_P(f)$ sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux, et l'expression:

$$(f) = \sum_{P \in X} o_P(f) \cdot P$$

4-1

est un diviseur, appelé le diviseur de f (f étant une fonction méromorphe sur X tout entier, bien entendu). Cette définition est en accord avec la définition générale donnée dans l'exposé 1, Appendice.

Un diviseur de la forme (f) est dit linéairement équivalent à 0 . Les diviseurs linéairement équivalents à 0 forment un sous-groupe du groupe des diviseurs; le groupe quotient est appelé groupe des classes de diviseurs; deux diviseurs D_1 et D_2 sont dits linéairement équivalents (ce que l'on écrira $D_1 \sim D_2$) si $D_1 - D_2$ est linéairement équivalent à 0 , c'est-à-dire si D_1 et D_2 appartiennent à la même classe.

Si $D_1 \sim D_2$, on a $\deg(D_1) = \deg(D_2)$. Il suffit de voir que $\deg(f) = 0$ pour toute fonction méromorphe $f \neq 0$, définie sur X tout entier; or $\deg(f)$ n'est autre que la somme des résidus de la différentielle méromorphe $\omega = df/f$, et la formule $\deg(f) = 0$ résulte alors du théorème des résidus (cf. plus bas). On peut également démontrer que $\deg(f) = 0$ en prouvant tout d'abord (par un raisonnement local classique) que le nombre de points P tels que $f(P) = \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) est localement constant quand λ varie, donc constant (à condition de compter ces points avec leur ordre de multiplicité) et en appliquant ceci à $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$, on trouve bien $\deg(f) = 0$.

On peut donc parler du degré d'une classe de diviseurs.

Si $D = \sum_{P \in X} n_P \cdot P$ est un diviseur, nous noterons $L(D)$ l'espace vectoriel des fonctions méromorphes f telles que $o_P(f) \geq -n_P$ pour tout $P \in X$; pour qu'une fonction $f \neq 0$ appartienne à $L(D)$, il faut et il suffit que le diviseur de f vérifie $(f) \geq -D$, ou encore $(f) + D \geq 0$. Inversement, si D' est un diviseur ≥ 0 linéairement équivalent à D , on peut écrire $D' = (f) + D$, où $f \in L(D)$ est déterminé à un facteur constant près. Si l'on note $\ell(D)$ la dimension de l'espace vectoriel $L(D)$, on voit donc que $\ell(D) \geq 1$ signifie qu'il existe un diviseur $D' \geq 0$, $D' \sim D$; dans ce cas, on a évidemment $\deg(D) \geq 0$.

Si $D_1 \sim D_2$, $L(D_1)$ est isomorphe à $L(D_2)$, d'où $\ell(D_1) = \ell(D_2)$. Si $\ell(D) > 1$, il existe $D' \sim D$, $D' \geq 0$, et l'on a $\ell(D') = \ell(D)$; or $L(0)$ est

de dimension 1, donc $D' \neq 0$, et $\deg(D) = \deg(D') > 0$. Ainsi, pour que $l(D) > 1$, il est nécessaire (mais non suffisant en général, si $g \neq 0$) que $\deg(D) > 0$.

Sur X , on a la notion de différentielle méromorphe: c'est une forme différentielle ω de degré 1 qui, au voisinage de chaque point $P \in X$, peut s'écrire $\omega = f \cdot dt_P$, où f est méromorphe, et où t_P désigne une uniformisante locale en P . L'ordre de ω en P , $o_P(\omega)$, est égal par définition à $o_P(f)$. Le diviseur (ω) de ω est

$$(\omega) = \sum_{P \in X} o_P(\omega) \cdot P.$$

Le résidu en P de ω est le coefficient de $1/t_P$ dans le développement de f en série de Laurent; on le note $\text{res}_P(\omega)$. Le théorème des résidus affirme que

$$\sum_{P \in X} \text{res}_P(\omega) = 0.$$

(Pour démontrer le théorème des résidus, on peut, par exemple, appliquer la formule de Stokes à ω et au domaine formé en retirant de X des petits disques contenant les pôles de ω . On peut aussi appliquer la formule $\int_X d\omega = 0$, $d\omega$ étant considérée comme une forme à coefficients distributions.)

Si $D = \sum_{P \in X} n_P \cdot P$ est un diviseur, nous noterons $I(D)$ l'espace vectoriel des formes méromorphes ω telles que $o_P(\omega) \geq n_P$ pour tout $P \in X$, et $i(D) = \dim I(D)$. Pour que $\omega \neq 0$ appartienne à $I(D)$ il faut et il suffit que $(\omega) \geq D$. Si $D \sim D'$, $I(D)$ est isomorphe à $I(D')$ et $i(D) = i(D')$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de Riemann-Roch:

THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH. Pour tout diviseur D sur X , on a:

$$(I) \quad l(D) - i(D) = \deg(D) + 1 - g.$$

(Pour la démonstration, voir par exemple:

H. WEYL, Die Idee der Riemannschen Fläche, p. 122;

L. SCHWARTZ, Sur le mémoire de Kodaira, exposé au Sém. Bourbaki, Mai 1950.

La théorie des faisceaux analytiques permet de présenter ces démonstrations sous une forme plus agréable, et surtout mieux adaptée à une généralisation à n variables. Cf. des notes récentes de Kodaira et Spencer aux Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A., 1953.

Lorsque l'on sait déjà que le corps des fonctions méromorphes sur X a le degré de transcendance 1 et sépare les points de X (c'est le cas dans l'application que nous ferons au §2), on peut appliquer les démonstrations algébriques de Riemann-Roch; voir par exemple:

A. WEIL, Zur algebraischen Theorie der algebraischen Funktionen, J. Crelle, 179, 1938, p. 129-133;

C. CHEVALLEY, Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, Math. Surveys, VI (Th. 7, page 33).

Si l'on procède ainsi, il faut en outre montrer que le genre de X (défini de façon purement algébrique) est bien la moitié du 1er nombre de Betti; cela peut se faire en remarquant que le nombre algébrique de zéros d'une différentielle holomorphe est égal à la caractéristique d'Euler-Poincaré de X , d'après un théorème classique de Hopf.)

Nous nous bornerons ici à donner quelques conséquences immédiates du théorème de Riemann-Roch:

a) Il existe une fonction méromorphe non constante sur X .

En effet, si $\deg(D)$ est assez grand, on a $l(D) > 1$, ce qui serait impossible si les seules fonctions méromorphes étaient les constantes.

Il s'ensuit, d'après l'exposé 2, que le corps k des fonctions méromorphes sur X est un corps de fonctions algébriques d'une variable.

b) Il existe une différentielle méromorphe ω non identiquement nulle sur X .

On prend $\omega = df$, ou f est méromorphe non constante (on peut aussi appliquer la formule de Riemann-Roch, avec $\deg(D)$ assez petit).

Toute différentielle méromorphe ω' peut alors s'écrire $\omega' = f \cdot \omega$ où f est méromorphe; d'où $(\omega') = (f) + (\omega)$, ce qui montre que les diviseurs des différentielles méromorphes $\neq 0$ forment une seule classe de diviseurs, appelée classe canonique.

c) Si $K = (\omega)$ appartient à la classe canonique, et si D est un diviseur sur X , l'espace $I(D)$ est isomorphe à l'espace $L(K-D)$.

En effet, pour que $\omega' = f \cdot \omega$ appartienne à $I(D)$, il faut et il suffit que $(\omega') = (f) + K \geq D$, c'est-à-dire $(f) \geq -(K-D)$, i.e., $f \in L(K-D)$.

On a donc $i(D) = l(K-D)$, et le théorème de Riemann-Roch peut s'écrire sous la forme équivalente:

$$(II) \quad l(D) - l(K-D) = \deg(D) + 1 - g.$$

d) En faisant $D = 0$ dans (I), on voit que $i(0) = g$: l'espace vectoriel des formes différentielles holomorphes est de dimension g .

On a $l(K) = i(0) = g$, et $i(K) = l(0) = 1$. En faisant $D = K$ dans (I), on trouve donc:

$$\deg(K) = 2g - 2.$$

e) Si $\deg(D) > 2g - 2$, on a $l(D) = \deg(D) + 1 - g$. (III)

En effet, on a alors $\deg(K-D) < 0$, d'où $l(K-D) = 0$ d'après ce qui a été dit plus haut, et on applique la formule (II).

La formule (III) montre donc que, si $\deg(D)$ est "assez grand," $l(D)$ est déterminé par $\deg(D)$, ce qui est très commode dans les applications. Par exemple:

f) Si $\deg(D) > 2g - 1$, pour tout $P \in X$ il existe $D' \sim D$, $D' \geq 0$, avec $P \notin D'$.

(Autrement dit, la série linéaire complète $|D|$, formée des diviseurs positifs D' équivalents à D , n'a pas de points fixes.)

Si n_P est le coefficient de P dans D , l'assertion f) revient à dire qu'il existe $f \in L(D)$ avec $o_P(f) = -n_P$; or, si une telle fonction n'existait pas, on aurait $L(D) = L(D-P)$, d'où $l(D) = l(D-P)$, ce qui est en contradiction avec (III).

g) Soit $f_0, \dots, f_n$ une base de $L(D)$, D étant un diviseur tel que $\deg(D) > 2g$. Pour tout $x \in X$, soit $F(x)$ le point de l'espace pro-
jectif $P_h(\mathbb{C})$ de coordonnées homogènes $f_0(x), \dots, f_h(x)$. L'application
 F est un isomorphisme analytique de X sur une sous-variété sans singu-
larités de $P_h(\mathbb{C})$ et le diviseur D est équivalent à une section hyper-
plane de $F(X)$.

Il est évident que F ne change pas lorsque l'on remplace D par un diviseur équivalent; en particulier on peut supposer (d'après f)) que $D \geq 0$. La fonction constante $f = 1$ appartient à $L(D)$ et peut s'écrire $1 = \sum c_i \cdot f_i$; appliquant à nouveau f) on montre alors que la section de $F(X)$ par l'hyperplan $\sum c_i \cdot X_i = 0$ est $F(D)$.

Soit n_P le coefficient de P dans D ; si $P \neq Q$, il y a $f \in L(D)$ tel que $o_P(f) \geq -n_P + 1$ et $o_Q(f) = -n_Q$ (appliquer f) au diviseur $D - P$); cela signifie qu'il existe un hyperplan de $P_h(\mathbb{C})$ passant par $F(P)$ mais pas par $F(Q)$: donc F est biunivoque.

Enfin, pour tout $P \in X$, il existe $f \in L(D)$ tel que $o_P(f) = -n_P + 1$ (appliquer encore f) à $D - P$); cela signifie qu'il existe un hyperplan de $P_h(\mathbb{C})$ passant par P et ayant une intersection simple avec $F(X)$ en P ; donc tout point de $F(X)$ est simple, et F est bien un isomorphisme analytique.

A cause d'un théorème de Chow, $F(X)$ est une courbe algébrique (sans singularités).

§2. Application du théorème de Riemann-Roch aux fonctions automorphes.

Soit Y le disque unité $|z| < 1$ de $\mathbb{C}$, et G un groupe discret d'automorphismes de Y tel que $X = Y/G$ soit compact (nous étudierons un cas plus général dans l'exposé suivant). Nous noterons π la projection canonique $Y \rightarrow X$. Pour tout $y \in Y$ nous noterons G_y le stabilisateur de y dans G , i.e. l'ensemble des $\sigma \in G$ tels que $\sigma(y) = y$.

LEMME. Pour tout $y \in Y$, le groupe G_y est cyclique fini d'ordre e_y , et
il existe une uniformisante locale z_y en y telle que les transformations

$\sigma \in G_y$ soient les transformations $z_y \rightarrow \varepsilon \cdot z_y$ où ε parcourt le groupe des racines e_y -ièmes de l'unité.

Par une transformation homographique, on est ramené au cas particulier où $y = 0$. Or les transformations de G laissant fixe 0 sont de la forme $z \rightarrow e^{2\pi i \varphi} \cdot z$ (appliquer le lemme de Schwarz, par exemple) et d'autre part, forment un sous-groupe fini de G . Le lemme résulte immédiatement de là.

(En fait, le lemme précédent n'est pas spécial au disque unité:

H. Cartan a démontré que tout groupe compact d'automorphismes analytiques d'une variété analytique complexe Y admettant un point fixe 0 est localement, au voisinage de 0 , isomorphe à un groupe linéaire.)

Si x est un point de X , les groupes G_y , $y \in \pi^{-1}(x)$, sont conjugués dans G et ont donc le même ordre, que nous noterons e_x et appellerons l'indice de ramification de x . Si $e_x > 1$, nous dirons que x est ramifié: cela signifie que $x = \pi(y)$ avec $G_y \neq \{e\}$; comme de tels points y sont isolés (à cause du lemme précédent, par exemple), l'ensemble des points ramifiés de X est fini.

Nous allons maintenant munir X d'une structure de variété analytique complexe de dimension 1; pour cela, il suffit de donner, pour tout point $x \in X$, une uniformisante locale en x , t_x , et de vérifier certains axiomes. Si $x = \pi(y)$, $y \in Y$, nous prendrons pour t_x la fonction $(z_y)^{e_y}$, où z_y et e_y ont les propriétés indiquées dans le lemme ci-dessus; cela a un sens, car la fonction $(z_y)^{e_y}$ est évidemment invariante par G_y , donc définit par passage au quotient une fonction sur X , définie au voisinage de x ; pour qu'une fonction f , définie au voisinage de x , soit fonction holomorphe de t_x , il faut et il suffit que $\tilde{f} = f \circ \pi$, définie au voisinage de y , soit holomorphe; ainsi l'anneau $\mathcal{O}_x$ des fonctions holomorphes en x est isomorphe au sous-anneau de $\mathcal{O}_y$ formé des fonctions invariantes par le groupe G_y . Ceci montre en particulier que la structure analytique de X ne dépend pas du choix de z_y ; quant à la vérification des axiomes des variétés analytiques, elle est immédiate.

L'application $\pi: Y \rightarrow X$ est analytique; c'est même localement un isomorphisme en dehors des points ramifiés; s'il n'existe aucun tel point, Y

est le revêtement universel de X , et G est isomorphe au groupe fondamental de X , $\pi_1(X)$.

Si P est un point de X , nous noterons, comme au §1, $o_P(f)$, resp. $o_P(\omega)$, l'ordre en P d'une fonction méromorphe f , resp. d'une différentielle méromorphe ω . D'autre part, soit h une fonction méromorphe sur Y , automorphe de poids quelconque; si $Q' = \sigma \cdot Q$, avec $\sigma \in G$, on a $o_Q(h) = o_{Q'}(h)$; donc $o_Q(h)$ ne dépend que de la projection $\pi(Q)$ de Q dans X , nous pouvons le noter $\tilde{o}_P(h)$, si $P = \pi(Q)$.

Les ordres o_P et $\tilde{o}_P$ ont des relations étroites:

a) Si f est méromorphe sur X , et si $\tilde{f} = f \circ \pi$ est la fonction automorphe de poids 0 définie par f sur Y , on a:

$$\tilde{o}_P(\tilde{f}) = e_P \cdot o_P(f), \quad e_P = \text{indice de ramification en } P.$$

b) Si ω est une différentielle méromorphe sur X , $\pi^*(\omega)$ est une différentielle sur Y invariante par G , donc (exposé 1, n°3) égale à $g \cdot dz$, où g est automorphe de poids 1, et l'on a:

$$\tilde{o}_P(g) = e_P \cdot o_P(\omega) + e_P - 1.$$

Les propriétés a) et b) se démontrent par un calcul local immédiat. Pour a), on écrit f sous la forme:

$$f = (t_P)^{o_P(f)} \cdot f_1, \quad \text{où } f_1 \text{ est holomorphe } \neq 0 \text{ en } P,$$

d'où:

$$\tilde{f} = (z_Q)^{e_P \cdot o_P(f)} \cdot \tilde{f}_1 \quad (\pi(Q) = P),$$

ce qui montre bien que l'ordre de $\tilde{f}$ en Q est $e_P \cdot o_P(f)$. Démonstration analogue pour b).

Nous choisirons maintenant, une fois pour toutes, une différentielle ω sur X , méromorphe et non identiquement nulle et nous désignerons par g la fonction méromorphe de poids 1 sur Y telle que $\pi^*(\omega) = g \cdot dz$, $\pi^*(\omega)$ désignant, comme ci-dessus, l'image réciproque de la forme ω par l'application π . L'existence d'une telle forme résulte, soit du §1, b) qui est applicable puisque X est compact, soit plus simplement du théorème 4 de l'exposé 1.

La fonction méromorphe g^n , n entier ≥ 0 , est donc de poids n , ce qui montre que toute fonction méromorphe h de poids n est de la forme:

$$h = \tilde{f} \cdot g^n \text{ avec } \tilde{f} = f \circ \pi, \quad f \text{ méromorphe sur } X.$$

Pour que h soit holomorphe, il faut et il suffit que $\tilde{o}_P(h) \geq 0$ pour tout $P \in X$, c'est-à-dire;

$$\tilde{o}_P(\tilde{f}) = e_P \cdot o_P(f) \geq -n \cdot \tilde{o}_P(g) = -n \cdot e_P \cdot o_P(\omega) - n(e_P - 1),$$

ou encore:

$$o_P(f) \geq -n \cdot o_P(\omega) - \left[n \left(1 - \frac{1}{e_P} \right) \right],$$

le symbole $[x]$ désignant la partie entière du nombre x .

Soit $K = \sum o_P(\omega) \cdot P$ le diviseur de ω , et posons:

$$E_n = n \cdot K + \sum_{P \in X} \left[n \left(1 - \frac{1}{e_P} \right) \right] \cdot P,$$

le $\sum$ ne portant d'ailleurs que sur les points ramifiés de X . L'inégalité ci-dessus équivaut alors à la suivante:

$$(f) \geq -E_n, \text{ autrement dit } f \in L(E_n).$$

En résumé:

PROPOSITION 1. Soit D_n l'espace vectoriel des fonctions holomorphes de poids n sur Y . L'application $f \rightarrow \tilde{f} \cdot g^n$ est un isomorphisme de $L(E_n)$ sur D_n .

COROLLAIRE. Si $d_n = \dim D_n$, on a $d_n = l(E_n)$.

La proposition précédente est valable même si X n'est pas compacte (car l'hypothèse que X est compacte n'a pas encore été utilisée); mais dans ce cas il résulte d'un théorème de Behnke-Stein que X est une variété de Stein (au sens du Séminaire 1951-52, exposé 9) et la dimension de $L(E_n)$ est infinie: si l'on veut des propriétés raisonnables il faut donc imposer aux fonctions automorphes certaines conditions à la frontière, cf. exposé 5.

Bornons-nous donc au cas où X est compact. Pour appliquer le théorème de Riemann-Roch au diviseur E_n , nous avons besoin de connaître le

degré de E_n . Mais K étant le diviseur d'une différentielle, on a $\deg(K) = 2g - 2$, g étant le genre de X (§1, d)). Donc :

$$\deg(E_n) = 2n(g - 1) + \sum_{P \in X} \left[n(1 - \frac{1}{e_P}) \right].$$

LEMME. Le nombre $A = 2g - 2 + \sum (1 - \frac{1}{e_P})$ est > 0 .

En effet, soit n un entier, multiple de tous les e_P , et assez grand pour que $d_n \geq 2$ (un tel n existe d'après le théorème 3 de l'exposé 1); comme $\iota(E_n) = d_n \geq 2$, on a $\deg(E_n) > 0$, et puisque n est multiple des e_P , $\deg(E_n) = nA$, d'où $A > 0$.

C.Q.F.D.

(Autre démonstration: on montre que $2\pi A$ est l'aire de X calculée à partir de l'élément d'aire "non-euclidien" de Y .)

Comme application du lemme précédent, montrons que $\deg(E_n) > 2g - 2$ dès que $n \geq 2$:

On a $\deg(E_n) - (2g - 2) = (n - 1)(2g - 2) + \sum \left[n(1 - \frac{1}{e_P}) \right]$. Or on montre aisément que $[n(1 - 1/e_P)] \geq (n - 1)(1 - 1/e_P)$. D'où:

$$\deg(E_n) - (2g - 2) \geq (n - 1)A > 0 \quad \text{si } n \geq 2.$$

On peut donc appliquer la formule III de §1, e), et l'on obtient:

$$d_n = \iota(E_n) = \deg(E_n) + 1 - g \quad \text{si } n \geq 2,$$

d'où en résumé:

PROPOSITION 2. Si $X = Y/G$ est compact et de genre g , on a:

$$d_n = (2n - 1)(g - 1) + \sum_{P \in X} \left[n(1 - \frac{1}{e_P}) \right] \quad \text{si } n \geq 2.$$

(Si $n = 0$, $E_0 = 0$, et $d_0 = 1$; si $n = 1$, $E_1 = K$, et $d_1 = g$.)

On peut donner d'autres applications de la proposition 1; par exemple, on peut chercher dans quel cas on a $\deg(E_n) > 2g$; en appliquant le lemme ci-dessus, on voit que cette condition est réalisée lorsque:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| a) $g = 0$, $n \geq 2$, | c) $g = 2$, $n \geq 3$, |
| b) $g = 1$, $n \geq 6$, | d) $g > 2$, $n \geq 2$. |

Quand il en est ainsi, le §1, g) montre que toute base $f_0, \dots, f_j$ de $L(E_n)$ définit un plongement $F: P \rightarrow (f_0(P), \dots, f_j(P))$ de X sur une courbe sans singularités de l'espace projectif $P_j(\mathbb{C})$. Or les fonctions $f_0, \dots, f_j$ définissent des fonctions holomorphes de poids n , $g_0, \dots, g_j$; l'application $G: Q \rightarrow (g_0(Q), \dots, g_j(Q))$ de Y dans $P_j(\mathbb{C})$ est constante sur les classes suivant G et l'on a $G = F \circ \pi$. En résumé;

Si n est assez grand (les valeurs précises étant indiquées dans a), b), c), d) ci-dessus) toute base $g_0, \dots, g_j$ de l'espace D_n des fonctions holomorphes de poids n définit une application

$$G: Q \rightarrow (g_0(Q), \dots, g_j(Q)) \in P_j(\mathbb{C})$$

qui, par passage au quotient, définit un isomorphisme analytique de $X = Y/G$ sur une courbe sans singularités de l'espace projectif complexe $P_j(\mathbb{C})$, $j = d_n - 1$.

BIBLIOGRAPHIE

- H. PETERSSON, Nombreux articles depuis 1930. Notamment: Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen, II, Math. Annalen, 115, 1938, p. 175-204 (Calcul de d_n au moyen du th. de Riemann-Roch, mais sous des hypothèses bien plus larges que celles du présent exposé et du suivant.)
- H. POINCARÉ, Oeuvres, tome II, p. 169, §6 (on y trouvera notamment la proposition 2).
- A. WEIL, Généralisation des fonctions abéliennes, J. de Maths., 17, 1938, p. 47-87 (Chap. I) ainsi qu'une Note dans Hamb. Abh., Bd. 11.
(Extension du théorème de Riemann-Roch aux diviseurs "matriciels")