

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

J-P. SERRE

Fonctions automorphes

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. n° 20, p. 1-23

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A20_0>

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS AUTOMORPHES

(Exposés de J-P. Serre, 24-5-54 et 14-6-54)

§I. Faisceaux de fonctions automorphes.1. Le faisceau $\mathcal{A}(J)$.

Dans tout ce qui suit, X désigne une variété analytique complexe de dimension complexe s , et G un groupe d'automorphismes de X vérifiant les hypothèses (I) et (II) de l'exposé 12. On note Y l'espace quotient X/G , et π la projection canonique: $X \rightarrow Y$. D'après l'hypothèse (I), Y est séparé; d'ailleurs, on a vu dans l'exposé 12 que Y est un espace analytique normal.

Pour tout $x \in X$ on désigne par $G(x)$ le sous-groupe de G formé des $g \in G$ tels que $g \cdot x = x$; d'après l'hypothèse (II), $G(x)$ est un groupe fini. Plus précisément, l'hypothèse (II) permet de ramener toute question locale sur X et G à une question portant sur un groupe $G(x)$.

Soit $g \rightarrow J_g$ un facteur d'automorphie, au sens de l'Exposé 1. Nous allons attacher à ce facteur un faisceau $\mathcal{A}(J)$ porté par l'espace Y :

Pour tout ouvert $U \subset Y$, soit $\mathcal{A}(J)_U$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\pi^{-1}(U)$ qui sont J -automorphes, c'est-à-dire qui vérifient l'identité:

$$(*) \quad f(g \cdot z) = J_g(z) \cdot f(z) \quad \text{pour tout } z \in \pi^{-1}(U).$$

Si V est un ouvert contenu dans U , on a un homomorphisme évident (la restriction): $\mathcal{A}(J)_U \rightarrow \mathcal{A}(J)_V$; si $W \subset V \subset U$, on a la condition de transitivité habituelle. Donc, la collection des $\mathcal{A}(J)_U$ définit un faisceau, qui est le faisceau $\mathcal{A}(J)$. Un élément de $\mathcal{A}(J)_y$, $y \in Y$, peut être identifié à une fonction holomorphe sur un voisinage saturé de $\pi^{-1}(y)$ qui vérifie la condition (*). Il est clair que $\mathcal{A}(J)_U$ coïncide avec $H^0(U, \mathcal{A}(J))$.

Lorsque $J_g = 1$ quel que soit $g \in G$, le faisceau $\mathcal{A}(J)$ n'est pas autre chose que le faisceau $\mathcal{O}$ des germes de fonctions holomorphes sur Y

(rappelons que, par définition, une fonction holomorphe sur $U \subset Y$ est une fonction holomorphe sur $\pi^{-1}(U)$ qui est invariante par G).

Le produit d'une fonction J -automorphe par une fonction invariante par G étant encore une fonction J -automorphe, on voit que chaque $\mathcal{A}(J)_Y$ est muni d'une structure de $\mathcal{O}_Y$ -module, ce qui définit sur $\mathcal{A}(J)$ une structure de faisceau analytique sur Y .

2. Faisceaux analytiques cohérents sur les espaces analytiques.

Nous venons de définir un faisceau analytique sur l'espace analytique Y . Or, la théorie des faisceaux cohérents peut s'étendre à l'espace Y :

Plus généralement, donnons-nous un espace topologique Y , muni d'un sous-faisceau $\mathcal{O}$ du faisceau des fonctions continues et faisons l'hypothèse que tout $y \in Y$ possède un voisinage ouvert isomorphe à un sous-ensemble analytique E d'un ouvert U d'un espace $\mathbb{C}^k$; nous dirons alors que Y est un espace analytique. Cette définition est plus large que celle de l'Exposé 6, §5, qui revient à exiger que, pour tout $y \in Y$, $\mathcal{O}_y$ soit intégralement clos; un espace analytique vérifiant cette dernière condition est dit normal; par exemple, l'espace $Y = X/G$ du No. 1 est normal.

Soit alors $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}$ -modules sur Y ; on dira que $\mathcal{F}$ est cohérent s'il est localement isomorphe au conoyau d'un homomorphisme analytique $\varphi: \mathcal{O}^p \rightarrow \mathcal{O}^p$. Si Y est plongé, comme sous-ensemble analytique (avec la structure induite), dans une variété analytique complexe U , soit $\mathcal{F}'$ le faisceau sur U qui coïncide avec $\mathcal{F}$ sur Y , et est nul en dehors de Y ; le faisceau $\mathcal{F}'$ est un faisceau analytique sur U , et l'on a:

Lemme 1. Pour que $\mathcal{F}$ soit cohérent sur Y , il faut et il suffit que $\mathcal{F}'$ soit cohérent sur U .

On remarque d'abord que le faisceau $\mathcal{O}'$ est cohérent, puisque c'est le quotient du faisceau $\mathcal{O}(U)$ par le faisceau d'idéaux défini par Y (faisceau qui est cohérent d'après un théorème de Cartan—cf. Sém. 51-52,

Exposé 16). Le lemme se déduit immédiatement de là.

Le Lemme 1 donne un critère commode pour qu'un faisceau $\mathfrak{F}$ sur Y soit cohérent. On en déduit notamment que le noyau, le conoyau et l'image d'un homomorphisme analytique: $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$ sont des faisceaux cohérents si $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ le sont. Bref toutes les propriétés usuelles des faisceaux cohérents sont valables.

3. Cohérence du faisceau $\mathfrak{A}(J)$.

Revenons au faisceau $\mathfrak{A}(J)$ du No. 1. Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant:

Théorème 1. Le faisceau analytique $\mathfrak{A}(J)$ est cohérent.

La question est évidemment locale; il faut démontrer que $\mathfrak{A}(J)$ est cohérent au voisinage de tout point donné $y_0 \in Y$. Soit $x_0 \in X$ avec $\pi(x_0) = y_0$, et soit $V(x_0)$ un voisinage ouvert de x_0 , stable par $G(x_0)$, et vérifiant l'hypothèse (II) de l'Exposé 12, §1 (autrement dit, les relations $g \in G, x \in V(x_0), g \cdot x \in V(x_0)$ entraînent $g \in G(x_0)$).

Ces relations entraînent que $V(x_0)/G(x_0)$ est isomorphe à $\pi(V(x_0)) \subset Y$; d'autre part, il est clair que la restriction de $\mathfrak{A}(J)$ à $\pi(V(x_0))$ est isomorphe au faisceau analogue à $\mathfrak{A}(J)$ défini à partir de $V(x_0)$ et de $G(x_0)$, à la place de X et de G . On est donc ramené à étudier ce dernier faisceau. Utilisant ensuite le Lemme 1 de l'Exposé 12, on voit que l'on est finalement ramené à démontrer le Théorème 1 dans le cas particulier suivant:

X est un espace numérique complexe $\mathbb{C}^S$, et G est un groupe linéaire fini.

Notons que, si G opère sans points fixes sur X , ce qui précède montre que $\mathfrak{A}(J)$ est localement isomorphe à $\mathbb{C}$, donc a fortiori cohérent.

4. Cohérence du faisceau $\mathfrak{A}(J)$: générateurs.

Nous supposons donc que $X = \mathbb{C}^S$, et que G est un groupe linéaire fini d'ordre n .

Soit S l'algèbre des polynômes $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_s]$, et S^G la sous-algèbre de S formée des polynômes invariants par G . Soit $J_g(z)$ le facteur d'automorphie donné (qui n'est défini que dans un voisinage ouvert V de l'origine dans $\mathbb{C}^n$; nous pouvons évidemment supposer V stable par G). Le faisceau $\mathcal{A}(J)$ est défini sur $\pi(V) = U \subset X/G$, et nous devons montrer qu'il est cohérent sur U .

Si P est un élément de S , nous désignerons par $L(P)$ la fonction:

$$L(P)(z) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} J_g(z)^{-1} \cdot P(g \cdot z) \quad .$$

La fonction $L(P)$ est définie et holomorphe dans V . Si $Q \in S^G$, on a évidemment $L(P \cdot Q) = L(P) \cdot Q$.

On sait que S est un module de type fini sur S^G (cf. Exposé 12, Prop. 1 bis); soit $P_1, \dots, P_k$ un système de générateurs de ce module.

Proposition 1. Les fonctions $L(P_i)$ engendrent le $\mathcal{O}_y$ -module $\mathcal{A}(J)_y$ pour tout $y \in U$.

(Cela a un sens, car il est clair que les $L(P)$ sont des fonctions J -automorphes sur $V = \pi^{-1}(U)$.)

La Proposition 1 va résulter de la suivante, où le facteur d'automorphie J n'intervient plus:

Proposition 2. Soit $y \in Y = X/G$, et soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\pi^{-1}(y)$. On peut écrire f sous la forme:

$$f = \sum_{\alpha} h_{\alpha} \cdot P_{\alpha}, \quad \text{avec } P_{\alpha} \in S, \text{ et } h_{\alpha} \in \mathcal{O}_y \quad .$$

Montrons que la Proposition 2 entraîne la Proposition 1. Soit $y \in U$, et soit $f \in \mathcal{A}(J)_y$; appliquant la Proposition 2 à f , on peut écrire $f = \sum_{\alpha} h_{\alpha} \cdot P_{\alpha}$, comme ci-dessus. Mais chaque P_{α} peut lui-même s'exprimer comme combinaison linéaire des $P_1, \dots, P_k$, à coefficients dans S^G . D'où:

$$f = \sum_{i=1}^{i=k} h_i \cdot P_i, \quad \text{avec } h_i \in \mathcal{O}_y \quad .$$

Appliquons alors à f l'opération L (qui s'étend évidemment à toute fonction holomorphe définie sur un ouvert de V stable par G). On a alors $L(f) = f$ (puisque f est J -automorphe), et $L(h_i \cdot P_i) = h_i \cdot L(P_i)$, puisque h_i est invariante par G . D'où:

$$f = \sum_{i=1}^{i=k} h_i \cdot L(P_i), \quad \text{cqfd.}$$

5. Cohérence du faisceau $\mathcal{A}(J)$: démonstration de la Proposition 2.

Si $x \in X$, soit $\mathcal{O}_x$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes en x ; si $y \in Y = X/G$, soit B_y l'anneau des germes de fonctions holomorphes au voisinage de $\pi^{-1}(y)$; l'anneau B_y est un $\mathcal{O}_y$ -module, puisque $\mathcal{O}_y$ est le sous-anneau de B_y formé des éléments invariants par G . On a:

$$B_y = \sum_{x \in \pi^{-1}(y)} \mathcal{O}_x,$$

cette décomposition en somme directe étant compatible avec la structure de $\mathcal{O}_y$ -module de B_y .

Si $x \in \pi^{-1}(y)$, $\mathcal{O}_y$ est isomorphe au sous-anneau de $\mathcal{O}_x$ formé des éléments invariants par $G(x)$. Il s'ensuit (cf. Exposé 12, Th. 2) que $\mathcal{O}_x$ est un $\mathcal{O}_y$ -module de type fini, donc que B_y est également un $\mathcal{O}_y$ -module de type fini.

Soit C_y le sous- $\mathcal{O}_y$ -module de B_y engendré par les polynômes. La Proposition 2 équivaut à dire que $C_y = B_y$.

Puisque $\mathcal{O}_y$ est un anneau local noethérien, d'idéal maximal I_y (I_y étant l'ensemble des éléments de $\mathcal{O}_y$ nuls en y), on peut munir B_y de la I_y -topologie; rappelons (cf. Exposé 7, §1) que les sous-modules $(I_y)^m \cdot B_y$, $m = 0, 1, \dots$, forment une base des voisinages de 0 dans cette topologie. Evidemment, la I_y -topologie de B_y/C_y est la topologie quotient de la I_y -topologie de B_y ; puisque B_y/C_y est un module de type fini, le théorème de Krull (Exposé 7, Prop. 2) montre que B_y/C_y est séparé, donc que C_y est fermé dans B_y . Tout revient donc à prouver que C_y est dense dans B_y .

Or la topologie de B_y est la topologie produit de celle des $\mathcal{O}_x$, $x \in \pi^{-1}(y)$. Et la I_y -topologie de $\mathcal{O}_x$ coïncide avec la topologie naturelle de l'algèbre locale $\mathcal{O}_x$, d'après la Proposition 7 de l'Exposé 7. Donc, pour prouver que C_y est dense dans B_y , il suffit de prouver ceci:

Si l'on se donne un entier N , et, pour tout $x \in \pi^{-1}(y)$, un polynôme Q_x , il existe un polynôme Q tel que, pour chaque $x \in \pi^{-1}(y)$, $Q - Q_x$ soit d'ordre $\geq N$ en x .

Comme ce dernier énoncé est un cas particulier de celui démontré dans l'Appendice de l'Exposé 12, la démonstration de la Proposition 2 est achevée.

6. Cohérence du faisceau $\mathcal{Q}(J)$: relations.

Les notations étant toujours celles des Nos. 4 et 5, soit U' un ouvert $\subset U$, et $V' = \pi^{-1}(U') \subset V$. Soient $f_1, \dots, f_n$ un nombre fini de fonctions J -automorphes sur V' ; par une relation entre les f_i nous entendons un système $h_1, \dots, h_n$ d'éléments de $\mathcal{O}_y$, $y \in U'$, tel que l'on ait:

$$h_1 \cdot f_1 + \dots + h_n \cdot f_n = 0.$$

Les relations au point y forment évidemment un module sur $\mathcal{O}_y$.

Proposition 3. Les relations entre $f_1, \dots, f_n$ sont engendrées localement par un nombre fini d'entre elles.

La question étant locale, nous pouvons supposer U' connexe, puisque X/G est localement connexe.

Si les fonctions $f_1, \dots, f_n$ sont toutes identiquement nulles, la Proposition 3 est évidente. Supposons donc que f_1 , par exemple, ne soit pas identiquement nulle. Considérons la fonction H définie par la formule suivante:

$$H(z) = \prod_{h \in G, h \neq e} f_1(h \cdot z) \quad .$$

La fonction H est holomorphe dans V' , non identiquement nulle, et le produit $f_1 \cdot H$ est invariant par G . Il s'ensuit que H est J^{-1} -

automorphe, donc que les produits $f_2 \cdot H, \dots, f_n \cdot H$ sont aussi invariants par G . Posons alors: $g_1 = f_1 \cdot H, \dots, g_n = f_n \cdot H$. Toute relation entre les f_i :

$$h_1 \cdot f_1 + \dots + h_n \cdot f_n = 0,$$

conduit à une relation entre les g_i :

$$h_1 \cdot g_1 + \dots + h_n \cdot g_n = 0,$$

et réciproquement, puisque H n'est pas identiquement nulle et que U est connexe. Or, on sait que le faisceau des relations entre un nombre fini de fonctions données est cohérent (Th. d'Oka, Sém. 51-52, Exposé 15, qui s'étend immédiatement au cas de l'espace analytique Y). D'où la Proposition 3.

Les Propositions 1 et 3 entraînent évidemment que le faisceau $\mathcal{Q}(J)$ est cohérent, ce qui achève la démonstration du Théorème 1.

7. Complément: équivalence locale des facteurs d'automorphie.

Si l'on veut étudier de plus près la structure locale des faisceaux $\mathcal{Q}(J)$, on est amené à mettre le facteur d'automorphie J sous une forme aussi simple que possible.

La question étant locale, nous pouvons supposer, comme plus haut, que le groupe G est fini, et laisse fixe le point x au voisinage duquel on étudie le faisceau $\mathcal{Q}(J)$.

Deux facteurs d'automorphie J_g et J'_g seront dits équivalents en x s'il existe une fonction $h(z)$, holomorphe et $\neq 0$ au voisinage de x , telle que:

$$J'_g(z) = J_g(z) \cdot h(g \cdot z) \cdot h(z)^{-1} \quad \text{pour } z \text{ voisin de } x.$$

Dans ce cas, si f est J -automorphe, $f \cdot h$ est J' -automorphe, et la correspondance $f \rightarrow f \cdot h$ définit un isomorphisme du faisceau $\mathcal{Q}(J)$ sur le faisceau $\mathcal{Q}(J')$, au voisinage de x .

[Dans le langage de la cohomologie des groupes, l'équivalence peut s'interpréter ainsi: soit $\mathcal{O}_x^*$ le groupe multiplicatif des éléments inver-

sibles de $\mathcal{O}_x$, groupe sur lequel opère G ; un facteur d'automorphie J n'est pas autre chose qu'un 1-cocycle de G à valeurs dans le G -module $\mathcal{O}_x^*$, et deux facteurs J et J' sont équivalents s'ils sont cohomologues. Autrement dit, le groupe des classes de facteurs d'automorphie locaux n'est pas autre chose que $H^1(G, \mathcal{O}_x^*)$.]

D'autre part, rappelons qu'on appelle caractère d'un groupe G un homomorphisme $\varepsilon: G \rightarrow \mathbb{C}^*$ (si l'ordre de G est n , $\varepsilon(g)$ est nécessairement une racine n -ème de l'unité quel que soit $g \in G$). Tout caractère est un facteur d'automorphie particulier.

Théorème 2. Tout facteur d'automorphie J est localement équivalent à un caractère, et à un seul.

Si $J_g(z)$ est un facteur d'automorphie au voisinage de x , l'application $g \mapsto J_g(x)$ est un caractère de G ; deux facteurs d'automorphie équivalents définissent le même caractère, et tout caractère peut être obtenu ainsi. Il nous suffit donc de prouver que, si J_g définit le caractère trivial (identique à 1), J_g est équivalent à 1 au voisinage de x . Or, par hypothèse, $J_g(z)$ est une fonction holomorphe de z qui prend la valeur 1 au point $z = x$; soit $j_g(z) = \log J_g(z)$, le log étant choisi de telle sorte que $j_g(x) = 0$; on a $j_{gg'}(z) = j_g(g'z) + j_{g'}(z)$, comme on le voit aussitôt. Posons:

$$k(z) = \sum_{h \in G} j_h(z) . \quad \text{On a:}$$

$$k(g \cdot z) = \sum_{h \in G} j_h(g \cdot z) = \sum_{h \in G} (j_{hg}(z) - j_g(z)) = k(z) - n \cdot j_g(z) .$$

Si l'on pose alors:

$$h(z) = e^{-k(z)/n} ,$$

on aura $J_g(z) = h(g \cdot z) \cdot h(z)^{-1}$, ce qui montre que J_g est équivalent à 1, cqfd.

[En langage cohomologique: Soit I_X l'idéal maximal de $\mathcal{O}_X$; l'application exponentielle montre que $\mathcal{O}_X^*$ est isomorphe, en tant que G -module, au produit direct de $\mathbb{C}^*$ sur lequel G opère trivialement, et de I_X ; comme I_X est divisible, et que G est fini, on a $H^1(G, I_X) = 0$, d'où $H^1(G, \mathcal{O}_X^*) = H^1(G, \mathbb{C}^*) = \text{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$, cqfd.]

Remarques.

1) Pour une variable, le faisceau $\mathcal{Q}(J)$ est toujours localement isomorphe à $\mathcal{O}$; mais il est facile de donner des exemples à plusieurs variables où $\mathcal{Q}(J)$ n'est pas localement équivalent à $\mathcal{O}$. C'est naturel, puisqu'un diviseur d'une variété normale n'est pas toujours une intersection complète locale.

2) On définit de la même façon que ci-dessus l'équivalence globale de deux facteurs d'automorphie. Le groupe des classes de facteurs d'automorphie est encore isomorphe à $H^1(G, \mathcal{O})$, où $\mathcal{O}$ désigne le groupe multiplicatif des fonctions holomorphes inversibles sur X . Mais ce groupe de cohomologie est beaucoup plus difficile à étudier que dans le cas local; pour donner un exemple, si X est un domaine borné contractile, et si G opère sans points fixes sur X , $Y = X/G$ étant compact, on peut montrer que $H^1(G, \mathcal{O}^*)$ est isomorphe au groupe des classes de diviseurs sur la variété algébrique Y ; on peut également donner des résultats précis lorsque X est le disque unité du plan complexe et que $\hat{X}$ est compact (cf. Petersson, ainsi que Godement, Sémin. Bourbaki, Mars 1954), ou bien encore dans le cas des fonctions abéliennes.

§II. Cas d'un domaine borné.

8. Notations.

Nous nous plaçons maintenant dans les hypothèses des Exposés 1 et 15: X est un domaine borné de $\mathbb{C}^S$, et G un groupe discret d'automorphismes de X tel que $Y = X/G$ soit compact. On sait que les conditions (I) et (II) sont alors vérifiées.

On prend pour facteur d'automorphie J_g le jacobien de $x \rightarrow g \cdot x$. Les puissances (positives ou négatives) de J sont encore des facteurs d'automorphie, et l'on note $\mathcal{Q}_n$ le faisceau $\mathcal{Q}(J^{-n})$. Une section du faisceau $\mathcal{Q}_n$ est donc une forme automorphe de poids n , au sens usuel.

On désignera par q le plus petit entier ≥ 1 tel que $(J_g(x))^q = 1$ pour tous les couples (g, x) tels que $g \cdot x = x$. On a vu dans l'Exposé 15 que, si m est un multiple assez grand de l'entier q , toute base $F_0, \dots, F_r$ de l'espace vectoriel des séries de Poincaré de poids m définit un plongement biunivoque de Y comme sous-variété normale de l'espace projectif $P_r(\mathbb{C})$; on désignera par φ_m ce plongement. Si $x \in X$, et si $\pi(x) = y \in Y$, $\varphi_m(y)$ est donc le point de $P_r(\mathbb{C})$ de coordonnées homogènes $(F_0(x), \dots, F_r(x))$. Dans les Nos. suivants, m désignera toujours un entier ayant les propriétés précédentes.

9. Les faisceaux $\mathcal{Q}_n$.

Considérons Y comme plongé dans $P_r(\mathbb{C})$ au moyen de l'application φ_m ; si $\mathfrak{F}$ est un faisceau cohérent sur Y , soit $\mathfrak{F}'$ le faisceau sur $P_r(\mathbb{C})$ qui coïncide avec $\mathfrak{F}$ sur Y et est nul en dehors de Y ; d'après le Lemme 1, $\mathfrak{F}'$ est cohérent. Le faisceau $\mathfrak{F}'(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, est alors défini par le procédé de l'Exposé 18, No. 6; il est nul en dehors de Y , et sa restriction à Y est un faisceau que nous noterons $\mathfrak{F}(m, n)$ car il dépend non seulement de n , mais aussi de l'entier m choisi. On peut également définir directement $\mathfrak{F}(m; n)$ par le procédé suivant:

Soit V_i l'ensemble des points $x \in X$ tels que $F_i(x) \neq 0$; les V_i sont des ouverts saturés de X qui recouvrent X (cf. Exposé 15); soit $U_i = \pi(V_i)$; les U_i , $0 \leq i \leq r$, forment un recouvrement ouvert de $Y = X/G$. Soit maintenant ${}^i\mathfrak{F}$ la restriction du faisceau $\mathfrak{F}$ à l'ouvert U_i , et soit $m_{ij}^n: {}^i\mathfrak{F} \rightarrow {}^j\mathfrak{F}$ l'isomorphisme donné par la multiplication par F_i^n/F_j^n au dessus de $U_i \cap U_j$. Le faisceau obtenu à partir des faisceaux ${}^i\mathfrak{F}$ par recollement au moyen des isomorphismes m_{ij}^n n'est autre que $\mathfrak{F}(m; n)$, comme on le voit tout de suite.

Sous cette forme on voit que $\mathfrak{F}(m; n)$ est un faisceau cohérent sur Y , et il est bien évident que ce faisceau dépend de m .

On peut appliquer ce qui précède au faisceau $\mathcal{Q}_p$, $p \in \mathbb{Z}$. On a:

Théorème 3. Le faisceau $\mathcal{Q}_p(m; n)$ est isomorphe à $\mathcal{Q}_{p+nm}$.

L'isomorphisme est défini ainsi: soit f une section de $\mathcal{Q}_{p+nm}$ sur un ouvert $U \subset Y$, c'est-à-dire une fonction automorphe de poids $p+nm$ sur $\pi^{-1}(U)$; posons $f_i = f/F_i^n$, qui est une fonction automorphe de poids p sur $\pi^{-1}(U \cap U_i)$, c'est-à-dire une section de $\mathcal{Q}_p$ sur $U \cap U_i$; comme $f_j = (F_i/F_j)^n \cdot f_i$ sur $U \cap U_i \cap U_j$, le système des (f_i) est une section de $\mathcal{Q}_p(m; n)$ sur U . On vérifie immédiatement que l'on a bien défini ainsi un isomorphisme $\theta: \mathcal{Q}_{p+nm} \rightarrow \mathcal{Q}_p(m; n)$.

Corollaire. $H^i(Y, \mathcal{Q}_n) = 0$ pour $i > 0$ et n assez grand.

Cela résulte immédiatement du Théorème B de l'Exposé 18, No. 7, appliqué aux faisceaux $\mathcal{Q}_p$, $1 \leq p \leq m$.

Remarque. Il est très possible que l'on ait, en fait, $H^i(Y, \mathcal{Q}_n) = 0$ pour $i > 0$ dès que $n \geq 2$; c'est en tout cas ce qui se passe dans le cas d'une variable (cf. Exposé 4) et, d'après Kodaira, dans le cas où G opère sans points fixes sur X . Malheureusement, la méthode suivie ici ne semble pas pouvoir donner un résultat aussi précis.

10. Première application du Théorème 3.

Les notations étant toujours celles du No. 8, soit $\mathcal{Q}_{p-m}^{r+1}$ le faisceau somme directe de $r+1$ faisceaux isomorphes au faisceau $\mathcal{Q}_{p-m}$, p étant un entier quelconque.

Une section de $\mathcal{Q}_{p-m}^{r+1}$ sur un ouvert $U \subset Y$ est donc un système de $r+1$ fonctions automorphes de poids $p-m$ sur $\pi^{-1}(U)$, soient $f_0, \dots, f_r$. Posons:

$$\rho(f_0, \dots, f_r) = \sum_{i=0}^{i=r} f_i \cdot F_i;$$

on obtient ainsi une section de $\mathcal{Q}$ au-dessus de U (c'est-à-dire une fonction automorphe de poids p sur $\pi^{-1}(U)$).

On a ainsi défini un homomorphisme ρ du faisceau $\mathcal{A}_{p-m}^{r+1}$ dans le faisceau $\mathcal{A}_p$, homomorphisme qui est analytique. Il est de plus surjectif, du fait que les U_i recouvrent Y .

L'homomorphisme ρ définit des homomorphismes, que nous noterons encore ρ , de $\mathcal{A}_{p-m}^{r+1}(m; n)$ sur $\mathcal{A}_p(m; n)$ ($n \in \mathbb{Z}$ quelconque); si l'on désigne par θ l'isomorphisme $\mathcal{A}_{p+nm} \rightarrow \mathcal{A}_p(m; n)$ du Théorème 3, on vérifie sans difficulté que $\rho \circ \theta = \theta \circ \rho$.

Or, on a le lemme suivant:

Lemme 2. Soient $\mathfrak{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux analytiques cohérents sur $P_r(\mathbb{C})$, et soit ρ un homomorphisme analytique de $\mathfrak{F}$ sur $\mathcal{G}$. Pour tout n assez grand, l'homomorphisme

$$\rho: H^0(P_r(\mathbb{C}), \mathfrak{F}(n)) \rightarrow H^0(P_r(\mathbb{C}), \mathcal{G}(n)) ,$$

défini par ρ , est surjectif.

(Si $\mathfrak{I}$ désigne le noyau de ρ , le lemme résulte de ce que $H^1(P_r(\mathbb{C}), \mathfrak{I}(n)) = 0$ pour n assez grand, d'après le Théorème B.)

En appliquant le Lemme 2 à $\mathfrak{F} = \mathcal{A}_{p-m}^{r+1}$ et $\mathcal{G} = \mathcal{A}_p$, et tenant compte de ce que $\rho \circ \theta = \theta \circ \rho$, on voit que

$$\rho: H^0(Y, \mathcal{A}_{p+(n-1)m}^{r+1}) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{A}_{p+nm})$$

est surjectif, pour n assez grand. En d'autres termes:

Théorème 4. Il existe un entier n_0 tel que toute forme automorphe f de poids $\geq n_0$ puisse s'écrire $f = \sum_{i=0}^{i=r} f_i \cdot F_i$, les f_i étant des formes automorphes.

Autrement dit, toute forme automorphe de poids assez grand appartient à l'idéal engendré par les séries de Poincaré de poids m . D'où (cf. Exposé 1, Prop. 1):

Corollaire 1. Toute forme automorphe de poids assez grand est une série de Poincaré.

Le Théorème 4 entraîne évidemment:

Corollaire 2. L'algèbre graduée M des formes automorphes est un module de type fini sur l'algèbre des polynômes en les F_i .

(On peut prendre pour générateurs de ce module une base de l'espace vectoriel des formes de poids $< n_0$.)

Corollaire 3. L'algèbre M est engendrée par un nombre fini d'éléments.

D'où:

Corollaire 4. Tout idéal de M a un nombre fini de générateurs.

(Dans le cas de 2 variables, ces résultats sont dûs à Hervé, Annales E.N.S., 69, 1952, p. 277-302.)

11. Complément.

Les résultats du No. précédent peuvent être étendus à des faisceaux cohérents quelconques.

De façon plus précise, soit $\mathfrak{F}$ un faisceau analytique cohérent sur l'espace projectif complexe $P_r(\mathbb{C})$; le raisonnement du Théorème 4 montre que, si n est assez grand, toute section f de $\mathfrak{F}(n)$ peut s'écrire $f = \sum_{i=0}^{i=r} f_i \cdot z_i$, où les f_i sont des sections de $\mathfrak{F}(n-1)$. Il s'ensuit que $\sum_{n=n_0}^{\infty} H^0(P_r(\mathbb{C}), \mathfrak{F}(n))$ est un module gradué de type fini sur l'algèbre de polynômes $S = \mathbb{C}[z_0, \dots, z_r]$. On a ainsi attaché à tout faisceau cohérent $\mathfrak{F}$ un S -module gradué de type fini qui le caractérise (comme il résulte tout de suite des Théorèmes A et B); ceci généralise la correspondance entre faisceaux cohérents d'idéaux et idéaux homogènes de polynômes rencontrée dans l'Exposé 19.

12. Dimension de l'espace des formes automorphes de poids n .

Si $\mathfrak{F}$ est un faisceau analytique cohérent sur Y , nous poserons $h^q(Y, \mathfrak{F}) = \dim \cdot H^q(Y, \mathfrak{F})$, et:

$$\chi(Y, \mathfrak{F}) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i h^i(Y, \mathfrak{F}),$$

somme qui est en réalité finie. Si $0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$ est une suite

exacte de faisceaux cohérents, la suite exacte de cohomologie montre que $\chi(\mathcal{B}) = \chi(\mathcal{A}) + \chi(\mathcal{C})$. On en déduit que, plus généralement, si l'on a une suite exacte de faisceaux cohérents:

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{C}_h \rightarrow 0,$$

on a:

$$\chi(Y, \mathcal{C}_0) - \chi(Y, \mathcal{C}_1) + \dots + (-1)^h \chi(Y, \mathcal{C}_h) = 0$$

Mêmes notations et mêmes résultats si l'on a un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ non plus sur Y , mais sur $P_r(\mathbb{C})$.

Proposition 4. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau analytique cohérent sur $P_r(\mathbb{C})$, $\chi(P_r(\mathbb{C}), \mathcal{F}(n))$ est un polynôme en n , de degré $\leq r$.

On raisonne par récurrence sur $r = \dim P_r(\mathbb{C})$, le résultat étant évident pour $r = 0$; utilisant la suite exacte de l'Exposé 19, p. 2, on voit que

$$\begin{aligned} \Delta \chi(P_r(\mathbb{C}), \mathcal{F}(n)) &= \chi(P_r(\mathbb{C}), \mathcal{F}(n)) - \chi(P_r(\mathbb{C}), \mathcal{F}(n-1)) \\ &= \chi(P_{r-1}(\mathbb{C}), \mathcal{G}(n)) - \chi(P_{r-1}(\mathbb{C}), \mathcal{H}(n)), \end{aligned}$$

d'où le résultat, grâce à l'hypothèse de récurrence.

Corollaire. Pour n assez grand, $h^0(P_r(\mathbb{C}), \mathcal{F}(n))$ est un polynôme en n de degré $\leq r$.

En effet, il résulte du Théorème B que $h^0(P_r(\mathbb{C}), \mathcal{F}(n))$ est égal à $\chi(P_r(\mathbb{C}), \mathcal{F}(n))$ pour n assez grand.

On tire tout de suite de la Proposition 4:

Proposition 5. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau analytique cohérent sur Y , $\chi(Y, \mathcal{F}(m; n))$ est un polynôme en n (m étant fixé).

Corollaire. Pour n assez grand, $h^0(Y, \mathcal{F}(m; n))$ est un polynôme en n .

(Il serait facile de montrer que ce polynôme est de degré $\leq s = \dim Y$.)

Nous allons maintenant appliquer la Proposition 5 et son corollaire aux faisceaux $\mathcal{A}_p$.

Nous noterons d_p la dimension de l'espace vectoriel des formes automorphes de poids p ; on a évidemment $d_p = h^0(Y, \mathcal{A}_p)$. Remarquons que $d_0 = 1$ (toute forme automorphe de poids 0 est constante, comme il résulte tout de suite du principe du maximum et de la compacité de Y), et que $d_p = 0$ pour $p < 0$ (car s'il y avait une forme automorphe de dimension < 0 non identiquement nulle, en multipliant une de ses puissances par une forme automorphe de poids opposé, on trouverait une forme automorphe de poids 0 non constante).

Nous poserons $\chi(p) = \chi(Y, \mathcal{A}_p)$. D'après le Corollaire au Théorème 3, on a $\chi(p) = d_p$ pour p assez grand. D'après la Proposition 5 jointe au Théorème 3, $\chi(p+nm)$ est un polynôme en n , pour p et m fixés (m vérifiant toujours les hypothèses du No. 8). Nous allons préciser ce résultat:

Théorème 5. Il existe des polynômes $P_1, \dots, P_q$ vérifiant les propriétés suivantes:

- a) $\chi(n) = P_i(n)$ si $n \equiv i \pmod{q}$,
- b) Les polynômes P_i sont de degré $s = \dim Y$, et ont même terme de plus haut degré $a \cdot n^s / s!$,
- c) Le coefficient a est égal à $\deg \varphi_m(Y) / m^s$, où $\deg \varphi_m(Y)$ désigne le degré de la variété projective $\varphi_m(Y) \subset P_r(\mathbb{C})$.

(Pour la signification de l'entier q , cf. No. 8.)

L'assertion a) peut encore s'écrire:

$$\chi(n) = a \cdot n^s / s! + a_1 \cdot n^{s-1} + \dots + a_s,$$

où, d'après a) et b), les $a_1, \dots, a_s$ ne dépendent que de la classe de $n \pmod{q}$.

On notera que la formule précédente est valable pour tout n (positif ou négatif); mais pour n assez grand, $\chi(n)$ est égal à d_n ; d'où:

Corollaire. $d_n = a \cdot n^s / s! + a_1 \cdot n^{s-1} + \dots + a_s$ pour n assez grand.

Remarques.

1) Pour calculer $\deg \varphi_m(Y)$ on peut procéder ainsi: on prend s combinaisons linéaires génériques de $F_0, \dots, F_r$, soient $G_1, \dots, G_s$, et on compte (mod. G) le nombre de points communs aux sous-ensembles $G_1 = 0, \dots, G_s = 0$ du domaine X .

2) Il est facile de donner des exemples où $a_1, \dots, a_s$ dépendent effectivement de la classe de n mod q : il suffit de faire des produits directs d'exemples à 1 variable.

3) Pour $s = 2$, le Théorème 5 est dû à Hervé (loc. cit.).

13. Démonstration du Théorème 5.

Soit m un multiple de q suffisamment grand (cf. No. 8); on a vu plus haut que $\chi(p+nm)$ est alors un polynôme en n (dépendant de p); appliquant ceci pour $p = 1, \dots, m$, on voit qu'il existe m polynômes $P_1, \dots, P_m$ tels que $\chi(n) = P_i(n)$ si $n \equiv i \pmod{m}$. L'assertion a) du Théorème 5 équivaut à dire que $P_i = P_j$ si $i \equiv j \pmod{q}$.

Soit m' un autre multiple de q , suffisamment grand, et tel que $\text{pgcd}(m, m') = q$; nous pouvons recommencer avec m' ce que nous venons de faire avec m , et il existe donc des polynômes $P'_1, \dots, P'_{m'}$ tels que $\chi(n) = P'_{i'}(n)$ si $n \equiv i' \pmod{m'}$. Supposons que i et i' soient congrus mod q ; puisque $\text{pgcd}(m, m') = q$, il existe une infinité d'entiers qui sont à la fois congrus à $i \pmod{m}$ et à $i' \pmod{m'}$; si n est un tel entier, on a $P_i(n) = \chi(n) = P'_{i'}(n)$, ce qui montre que les polynômes P_i et $P'_{i'}$ sont identiques. Si maintenant $j \equiv i \pmod{q}$, on a de même $P_j = P'_{i'}$, d'où $P_i = P_j$, ce qui achève de démontrer l'assertion a).

Montrons maintenant que deux polynômes P_i et P_j ont même terme de plus haut degré. Choisissons une forme automorphe f , non identiquement nulle, et de poids h congru à $j - i \pmod{q}$ (une telle forme existe, cf. Exposé 1). Si g est une forme automorphe de poids n congru à $i \pmod{q}$,

$f \cdot g$ sera une forme automorphe de poids $n + h$ qui est congru à $j \bmod q$.

D'où $d_{n+h} \geq d_n$, ce qui montre que

$$P_j(n+h) \geq P_i(n) \quad \text{pour } n \text{ assez grand et congru à } i \bmod q.$$

Ceci entraîne évidemment (en faisant tendre n vers $+\infty$) que le terme de plus haut degré de P_i est inférieur à celui de P_j , d'où, en permutant i et j , l'égalité de ces termes.

Pour étudier le terme de plus haut degré des polynômes P_i , on peut donc se borner au cas où $i = q$. Si m est un multiple de q vérifiant les hypothèses du No. 8, on a $d_{nm} = P_q(nm)$ pour n assez grand. Or, on a le résultat suivant:

Lemme 3. Si n est assez grand, toute forme automorphe de poids nm est un polynôme en les F_i .

Démonstration: D'après le Théorème 3, $\mathcal{G}_{nm}$ est isomorphe à $\mathcal{G}_0(m; n)$. Or $\mathcal{G}_0$ n'est pas autre chose que le faisceau $\mathcal{O}$ des germes de fonctions holomorphes sur Y . Vu que φ_m est un plongement de Y dans $P_r(\mathbb{C})$, le faisceau $\mathcal{O}$ est un quotient du faisceau $\mathcal{O}(P_r(\mathbb{C}))$, soit $\mathcal{O}_1$. Appliquant alors le Lemme 2 à $\mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}$, on voit que toute section de $\mathcal{G}_0(m; n)$ est image d'une section de $\mathcal{O}_1(n)$, si n est assez grand; ceci signifie exactement que toute forme automorphe de poids nm est un polynôme homogène de degré n en les F_i .

(Ce raisonnement montre, plus généralement, que la série linéaire découpée sur une variété normale par les formes de degré n assez grand est complète—résultat bien connu.)

Le Lemme 3 montre que, pour n assez grand, $P_q(nm)$ est égal à la dimension de l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré n en les F_i . Si $\mathfrak{a}_m$ désigne l'idéal homogène de $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_r]$ formé des polynômes P tels que $P(F_0, \dots, F_r) = 0$, et si $\chi_{\mathfrak{a}_m}(n)$ désigne le polynôme caractéristique de Hilbert de cet idéal, on a donc:

$$P_q(nm) = \chi_{\mathfrak{a}_m}(n) \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

Or l'idéal $\mathfrak{o}_m$ n'est pas autre chose que l'idéal de la variété $\varphi_m(Y) \subset P_r(C)$; d'après un résultat classique (et élémentaire), son terme de plus haut degré est égal à $\deg \varphi_m(Y) \cdot n^s/s!$, ce qui achève de démontrer les assertions b) et c) du Théorème 5.

14. Compléments divers.

1) On trouvera dans l'article d'Hervé des résultats analogues aux précédents, relatifs à des idéaux de fonctions automorphes. Il serait facile de les retrouver par la méthode suivie ici.

2) Il est possible de déduire le Théorème 5 de résultats généraux sur les faisceaux cohérents, qui précisent la Proposition 4. On définit la dimension s , et le degré d d'un faisceau analytique cohérent $\mathfrak{F}$ sur $P_r(C)$, et l'on montre (en reprenant la démonstration de la Prop. 4) que $\chi(P_r(C), \mathfrak{F}(n))$ est un polynôme en n dont le terme de plus haut degré est égal à $d \cdot n^s/s!$.

3) Les faisceaux $\mathcal{O}_p$ sont en rapport étroit avec certains diviseurs de la variété Y . Bornons-nous au cas où G opère sans points fixes sur X , de telle sorte que Y soit une variété sans singularités. Si D est un diviseur sur Y , notons $\mathcal{L}(D)$ le faisceau défini ainsi: un élément de $\mathcal{L}(D)_y$, $y \in Y$, est un germe de fonction méromorphe au voisinage de y , soit f , tel que $(f) \geq -D$ au voisinage de y ; le faisceau $\mathcal{L}(D)$ est localement isomorphe à $\mathcal{O}$, donc en particulier cohérent. Soit d'autre part K un diviseur "canonique," c'est-à-dire le diviseur d'une forme différentielle méromorphe de degré s sur Y . Le raisonnement de l'Exposé 4 donne alors:

Proposition 6. Le faisceau $\mathcal{O}_p$ est isomorphe au faisceau $\mathcal{L}(pK)$.

D'où notamment $\chi(k) = \chi(Y, \mathcal{L}(kK))$; appliquant alors à la variété algébrique Y les résultats connus sur les $\chi(Y, \mathcal{L}(D))$, on obtient sur $\chi(k)$ des renseignements sensiblement plus précis que ceux donnés par le Théorème 5. Par exemple, le "théorème de dualité" donne:

Corollaire. $\chi(1-k) = (-1)^s \chi(k)$.

En outre, les résultats récents de Hirzebruch permettent d'exprimer les coefficients du polynôme $\chi(n)$ à partir des "classes canoniques" de la variété Y .

Lorsque l'on ne suppose plus que G opère sans points fixes, il faut introduire une notion de "ramification" pour les diviseurs de Y , et l'on peut alors obtenir une proposition analogue à la Proposition 6. Nous n'insisterons pas là-dessus.

§III. Formes E-automorphes.

15. Sous-ensembles analytiques stables par G .

Revenons aux hypothèses du No. 1: soit X une variété analytique complexe de dimension s , et soit G un groupe d'automorphismes de X vérifiant les hypothèses (I) et (II). Considérons un sous-ensemble analytique E de X , stable par G .

Proposition 7. L'ensemble E/G est un sous-ensemble analytique de $Y = X/G$.

La question étant locale, nous pouvons supposer que le groupe G est fini, et que E est défini par l'annulation d'un nombre fini de fonctions holomorphes $f_1, \dots, f_k$. Pour tout $g \in G$, soit f_i^g la fonction définie par:

$$f_i^g(x) = f_i(g \cdot x) \quad 1 \leq i \leq k.$$

Soit r l'ordre de G ; pour chaque indice i , soient $F_i^1, \dots, F_i^r$, les fonctions symétriques élémentaires des r fonctions f_i^g , $g \in G$. On a donc:

$$F_i^1 = \sum_{g \in G} f_i^g, \dots, F_i^r = \prod_{g \in G} f_i^g.$$

Les fonctions F_i^j sont invariantes par G , donc peuvent être considérées comme des fonctions holomorphes sur $Y = X/G$. La Proposition 7 est donc une conséquence du lemme suivant:

Lemme 4. E/G est défini par l'annulation des fonctions F_i^j ,
 $1 \leq i \leq k, \quad 1 \leq j \leq r$.

Il est clair que les F_i^j s'annulent sur E ; inversement, soit $x \in E$ tel que $F_i^j(x) = 0$ quels que soient i et j ; ces équations entraînent $f_i(x) = 0$ pour tout i , d'où $x \in E$, cqfd.

Corollaire. Le faisceau d'idéaux défini par E/G dans Y est cohérent.

16. Formes E-automorphes.

Par une fonction holomorphe sur E nous entendrons une fonction continue à valeurs complexes sur E qui peut localement se prolonger en une fonction holomorphe sur X ; c'est donc une section du faisceau quotient du faisceau $\mathcal{O}(X)$ par le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}(E)$ défini par E .

Donnons-nous d'autre part un facteur d'automorphie $g \rightarrow J_g$ sur X . Une fonction f , holomorphe sur E , sera dite E-automorphe (relativement à J , ou encore E - J -automorphe) si elle vérifie la relation

$$(*) \quad f(g \cdot x) = J_g(x) \cdot f(x) \quad \text{pour tout } x \in E.$$

(Cette notion est due à Hervé.)

On peut également définir le faisceau des germes de formes E -automorphes: si U est un ouvert de $Y = X/G$, on désigne par $\mathcal{Q}(J; E)_U$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $E \cap \pi^{-1}(U)$ qui vérifient la relation (*) pour tout $x \in E \cap \pi^{-1}(U)$; à partir des $\mathcal{Q}(J; E)_U$ on définit le faisceau $\mathcal{Q}(J; E)$ à la manière habituelle. C'est un faisceau analytique sur l'espace Y , nul en dehors de E/G .

Théorème 6. Le faisceau analytique $\mathcal{Q}(J; E)$ est un faisceau analytique cohérent sur l'espace Y .

Avant de démontrer le Théorème 6, remarquons que toute forme automorphe vis-à-vis de J (au sens usuel) définit par restriction à E une forme E -automorphe. D'où un homomorphisme de faisceaux

$$\sigma: \mathcal{Q}(J) \rightarrow \mathcal{Q}(J; E) \quad .$$

Il est clair que σ est un homomorphisme analytique.

Proposition 8. L'homomorphisme σ est surjectif.

La question étant locale, nous pouvons supposer G fini, d'ordre n . Si l'on a $f \in \mathcal{A}(J; E)_Y$, $y \in Y$, il existe une fonction f_1 , holomorphe au voisinage de $\pi^{-1}(y)$, et qui induit f sur E (cela résulte simplement du fait que f est holomorphe sur E). La fonction:

$$L(f_1) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} J_g(x)^{-1} f_1(g \cdot x)$$

appartient alors à $\mathcal{A}(J)_Y$, et induit f sur E , cqfd.

Corollaire 1. Le faisceau $\mathcal{A}(J; E)$ est engendré localement par un nombre fini de ses sections.

En effet, le faisceau $\mathcal{A}(J)$ possède cette propriété d'après le Théorème 1.

La Proposition 8 a une autre conséquence intéressante: prenons pour facteur d'automorphie $J_g = 1$ quel que soit g ; le faisceau $\mathcal{A}(J)$ est alors le faisceau $\mathcal{O}$ des germes de fonctions holomorphes sur Y , et le faisceau $\mathcal{A}(J; E)$ est le faisceau des fonctions holomorphes sur E qui sont invariantes par G , autrement dit, c'est le faisceau $\mathcal{O}(E/G)$ des germes de fonctions holomorphes sur E/G . Le fait que $\sigma: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(E/G)$ soit surjectif signifie alors que le plongement $E/G \rightarrow Y = X/G$ transforme le faisceau $\mathcal{O}(E/G)$ en le faisceau induit par $\mathcal{O}$ sur E/G ; en particulier, puisque E/G est analytique (Prop. 7), on a:

Corollaire 2. Le faisceau $\mathcal{O}(E/G)$ est cohérent sur Y .

17. Démonstration du Théorème 6 (fin).

Vu le Corollaire 1 de la Proposition 8, il nous reste seulement à démontrer que les relations entre un certain nombre de sections $f_1, \dots, f_n$ de $\mathcal{A}(J; E)$ forment un faisceau cohérent (c'est-à-dire sont engendrées localement par un nombre fini d'entre elles). Nous suivrons la même méthode qu'au No. 6.

Nous supposons que les fonctions $f_1, \dots, f_n$ sont holomorphes dans un voisinage ouvert d'un point donné x_0 . En remplaçant X par $V(x_0)$, on peut supposer que le groupe G est fini d'ordre r , laisse le point x_0 fixe, et que $f_1, \dots, f_n$ sont holomorphes dans E tout entier. Nous voulons étudier le faisceau des relations entre les f_i au voisinage de x_0 .

Soit $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k$ la décomposition de E en sous-ensembles analytiques irréductibles au voisinage de x_0 . Soit K l'ensemble des indices i , $1 \leq i \leq k$, tels qu'il existe au moins une des fonctions $f_1, \dots, f_n$ qui ne soit pas identiquement nulle sur E_i ; il existe des scalaires $a_1, \dots, a_n$ tels que $a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$ ne s'annule identiquement sur aucun des E_i , $i \in K$ (il suffit de choisir les a_i en dehors d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$). Posons $f_0 = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$; c'est encore une fonction E -automorphe relativement à J . Soit H la fonction définie par la formule:

$$H(x) = \prod_{h \in G, h \neq e} f_0(h \cdot x).$$

La fonction H est holomorphe sur E , et on vérifie facilement qu'elle est J^{-1} -automorphe sur E . En outre, sa restriction à E_i , $i \in K$, n'est pas identiquement nulle; car sinon, il y aurait $h \in G$ tel que $f_0(h \cdot x)$ soit identiquement nulle pour $x \in E_i$, d'où f_0 identiquement nulle pour $x \in h^{-1} \cdot E_i = E_j$, d'où $f_1, \dots, f_n$ identiquement nulles sur E_j , donc aussi sur E_i , contrairement à la définition de K .

Désignons maintenant par $g_1, \dots, g_n$ les fonctions $f_1 \cdot H, \dots, f_n \cdot H$. Ce sont des fonctions holomorphes sur E et invariantes par G , autrement dit des sections du faisceau $\mathcal{O}(E/G)$.

Toute relation:

$$(1) \quad h_1 \cdot f_1 + \dots + h_n \cdot f_n = 0,$$

où les h_i appartiennent à $\mathcal{O}_y$, entraîne la relation:

$$(2) \quad h_1 \cdot g_1 + \dots + h_n \cdot g_n = 0.$$

La réciproque est vraie: la relation (2) peut en effet s'écrire:

$$(3) \quad [h_1 \cdot f_1 + \dots + h_n \cdot f_n] \cdot H = 0.$$

D'après un résultat connu (cf. Séminaire 51-52, Exposés 14 (page 5) et 16) la relation (3) entraîne que $h_1 \cdot f_1 + \dots + h_n \cdot f_n$ est nul sur E_i pour $i \in K$ (tout au moins pour y assez voisin de $\pi(x_0)$); d'autre part $h_1 \cdot f_1 + \dots + h_n \cdot f_n$ est évidemment nul sur E_i si $i \notin K$. Donc (3) $\Rightarrow$ (1), ce qui montre bien que (1) et (2) sont équivalents.

Mais, d'après le Corollaire 2 à la Proposition 8, le faisceau $\mathcal{O}(E/G)$ est cohérent. Donc le faisceau des relations entre les g_i est cohérent, et comme nous venons de voir qu'il coïncide avec le faisceau des relations entre les f_i , la démonstration du Théorème 6 est achevée.

18. Application au cas d'un domaine borné.

Faisons maintenant sur X, G, J les hypothèses du No. 8: X est un domaine borné de $\mathbb{C}^S$, $Y = X/G$ est compact, J_g est le jacobien en x de l'automorphisme $x \rightarrow g \cdot x$.

Nous noterons $\mathcal{Q}_k(E)$ le faisceau $\mathcal{Q}(J^{-k}; E)$.

Théorème 7. Le faisceau $\mathcal{Q}_p(E)(m; n)$ est isomorphe à $\mathcal{Q}_{p+nm}(E)$.

Ce théorème se démontre exactement comme le Théorème 3.

Corollaire. Toute forme E -automorphe de poids assez grand est la restriction à E d'une forme automorphe sur X .

Appliquant le Lemme 2 à l'homomorphisme surjectif $\mathcal{Q}_p \rightarrow \mathcal{Q}_p(E)$, on voit que $H^0(Y, \mathcal{Q}_p(m; n)) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{Q}_p(E)(m; n)) = H^0(E, \mathcal{Q}_p(E)(m; n))$ est surjectif pour n assez grand. Compte tenu des Théorèmes 3 et 7 (et d'une relation de commutation évidente), ceci signifie que $H^0(Y, \mathcal{Q}_{p+mn}) \rightarrow H^0(E, \mathcal{Q}_{p+mn}(E))$ est surjectif pour n assez grand, d'où le corollaire.

Note. Le résultat précédent avait été obtenu par Hervé (Comptes Rendus, 234, 1952, p. 41-43) lorsque X est le produit direct de deux disques et que E vérifie certaines hypothèses particulières.