

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

J-P. SERRE

Faisceaux analytiques sur l'espace projectif (suite)

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. n° 19, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A19_0>

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FAISCEAUX ANALYTIQUES SUR L'ESPACE PROJECTIF (Suite)

(Exposé de J.-P. Serre, 17-5-54)

§3. Démonstration des théorèmes fondamentaux.

Nous allons démontrer les théorèmes A et B énoncés au No. 7 de l'exposé précédent. Nous désignerons par (A_r) et (B_r) les propositions suivantes:

(A_r) Si X est un espace projectif complexe de dimension r , et si $\mathfrak{F}$ est un faisceau analytique cohérent sur X , $H^0(X, \mathfrak{F}(n))$ engendre $\mathfrak{F}(n)_x$ pour tout $x \in X$ si n est assez grand.

(B_r) Avec les mêmes hypothèses, $H^q(X, \mathfrak{F}(n)) = 0$ pour $q \geq 1$ si n est assez grand.

Nous allons démontrer (A_r) et (B_r) par récurrence sur r (le cas $r = 0$ étant trivial). De façon plus précise, nous verrons que (A_{r-1}) et $(B_{r-1}) \Rightarrow (A_r)$ et que $(A_r) \Rightarrow (B_r)$.

8. Démonstration de (A_{r-1}) et $(B_{r-1}) \Rightarrow (A_r)$.

On observe d'abord que, si $H^0(X, \mathfrak{F}(n_0))$ engendre $\mathfrak{F}(n_0)_x$ pour un $x \in X$, alors $H^0(X, \mathfrak{F}(n_0 + n))$ engendre $\mathfrak{F}(n_0 + n)_x$ pour tout $n \geq 0$. En effet, supposons que $x \in U_0$, par exemple. L'application:

$$m \rightarrow (z_0/z_1)^n \cdot m \text{ de } {}^i\mathfrak{F} \text{ dans } {}^i\mathfrak{F},$$

commute aux identifications qui définissent respectivement $\mathfrak{F}(n_0)$ et $\mathfrak{F}(n_0 + n)$, donc définit un homomorphisme de faisceaux

$$\varphi: \mathfrak{F}(n_0) \rightarrow \mathfrak{F}(n_0 + n),$$

qui est un isomorphisme au-dessus de U_0 , donc en particulier en x , ce qui démontre évidemment notre affirmation.

D'autre part, si $H^0(X, \mathfrak{F}(n_0))$ engendre $\mathfrak{F}(n_0)_x$, alors $H^0(X, \mathfrak{F}(n_0))$ engendre $\mathfrak{F}(n_0)_y$ pour tout y assez voisin de x , puisque le faisceau $\mathfrak{F}(n_0)$ est cohérent.

Ces deux remarques permettent de montrer, par un raisonnement facile de compacité, que (A_r) est entraînée par la proposition en apparence plus faible que voici:

(A'_r) Pour tout faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ sur X , et tout point $x \in X$, $H^0(X, \mathcal{F}(n))$ engendre $\mathcal{F}(n)_x$ pour n assez grand (i.e., pour $n \geq n_0(\mathcal{F}, x)$).

Nous allons maintenant démontrer (A'_r) .

Soit donc $x \in X$. Quitte à changer de système de coordonnées dans $\mathbb{C}^{r+1}$, nous pouvons supposer que $z_0 = 0$ en x , autrement dit que $x \in E$, E désignant l'hyperplan d'équation $z_0 = 0$.

Considérons de nouveau l'homomorphisme $\varphi: \mathcal{F}(-1) \rightarrow \mathcal{F}$ défini plus haut (sur chaque U_i , c'est la multiplication par z_0/z_i), et soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ le noyau et le conoyau de φ , respectivement. On a donc la suite exacte:

$$0 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F}(-1) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0.$$

D'où, en tenant compte de la Proposition 6, et du fait que $\mathcal{F}(-1)(n)$ est isomorphe à $\mathcal{F}(n-1)$, la suite exacte:

$$0 \rightarrow \mathcal{H}(n) \rightarrow \mathcal{F}(n-1) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}(n) \rightarrow \mathcal{G}(n) \rightarrow 0.$$

Dans cette suite exacte, l'homomorphisme φ est encore donné, sur chaque U_i , par la multiplication par z_0/z_i .

Examinons les propriétés des faisceaux $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$. Comme φ est évidemment un isomorphisme de $\mathcal{F}(-1)$ sur $\mathcal{F}$ au-dessus de $U = \mathbb{C}E$, on a $\mathcal{H}_y = \mathcal{G}_y = 0$ si $y \notin E$. D'autre part, si $y \in E$, et si f est un élément de $\mathcal{O}_y$ qui induit 0 sur E , on a $f \cdot m = 0$ pour tout $m \in \mathcal{H}_y$ et tout $m \in \mathcal{G}_y$ (en effet, si $y \in U_i$, f est un multiple de z_0/z_i , et notre affirmation résulte de la définition de $\mathcal{H}_y$ et $\mathcal{G}_y$ comme noyau et conoyau de la multiplication par z_0/z_i). Il en résulte que, si l'on note $\mathcal{O}_y(E)$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes sur E au point y , $\mathcal{H}_y$ et $\mathcal{G}_y$ sont des $\mathcal{O}_y(E)$ -modules. Notons $\mathcal{H}^*$ et $\mathcal{G}^*$ les faisceaux induits par $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ sur E ; d'après ce qui précède, ce sont des faisceaux analytiques sur E , et il est facile de voir qu'ils sont cohérents. D'après le Sémi-

naire 50-51, Exposé 17, on a $H^q(X, \mathcal{H}) = H^q(E, \mathcal{H}^*)$, et de même pour $\mathcal{G}$.

Tout ceci s'applique également aux faisceaux $\mathcal{H}(n)$ et $\mathcal{G}(n)$: les faisceaux $\mathcal{H}(n)^*$ et $\mathcal{G}(n)^*$ qu'ils induisent sur E sont analytiques cohérents, et d'ailleurs isomorphes aux faisceaux $\mathcal{H}^*(n)$ et $\mathcal{G}^*(n)$ (comme d'habitude, l'isomorphisme est évident sur chaque U_i , et commute aux identifications sur $U_i \cap U_j$).

On a donc, pour $q \geq 1$,

$$H^q(X, \mathcal{G}(n)) = H^q(E, \mathcal{G}(n)^*) = H^q(E, \mathcal{G}^*(n)) = 0 \text{ pour } n \geq n_0,$$

d'après (B_{r-1}) appliqué au faisceau $\mathcal{G}^*$ sur E .

Résultat identique pour $\mathcal{H}(n)$.

Soit alors $\mathcal{I}_n$ l'image de φ , qui est un sous-faisceau de $\mathcal{F}(n)$. On a les deux suites exactes de faisceaux:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{H}(n) \rightarrow \mathcal{F}(n-1) \rightarrow \mathcal{I}_n \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathcal{I}_n \longrightarrow \mathcal{F}(n) \longrightarrow \mathcal{G}(n) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

d'où les deux suites exactes de cohomologie:

$$\begin{aligned} H^1(X, \mathcal{F}(n-1)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{I}_n) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{H}(n)), \\ H^1(X, \mathcal{I}_n) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}(n)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{G}(n)). \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, $H^1(X, \mathcal{G}(n))$ et $H^2(X, \mathcal{H}(n))$ sont nuls pour $n \geq n_0$, d'où les inégalités:

$$\dim H^1(X, \mathcal{F}(n-1)) \geq \dim H^1(X, \mathcal{I}_n) \geq \dim H^1(X, \mathcal{F}(n)), \quad n \geq n_0.$$

Ces inégalités entraînent que $\dim H^1(X, \mathcal{F}(n))$ est une fonction décroissante de n , pour $n \geq n_0$. Comme $\dim H^1(X, \mathcal{F}(n)) < +\infty$, d'après l'exposé 17, on en conclut que $\dim H^1(X, \mathcal{F}(n))$ est indépendant de n , pour $n \geq n_1$, d'où:

$$\dim H^1(X, \mathcal{F}(n-1)) = \dim H^1(X, \mathcal{I}_n) = \dim H^1(X, \mathcal{F}(n)),$$

$$n \geq n_1.$$

Mais alors l'homomorphisme: $H^1(X, \mathcal{I}_n) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}(n))$ applique un espace de dimension finie sur un espace de même dimension, donc est injectif.

La suite exacte de cohomologie montre alors que:

pour $n \geq n_1$, l'homomorphisme $H^0(X, \mathfrak{F}(n)) \rightarrow H^0(X, \mathfrak{G}(n))$ est surjectif.

Mais on sait que $H^0(X, \mathfrak{G}(n)) = H^0(E, \mathfrak{G}^*(n))$, et, d'après (A_{r-1}) , $H^0(E, \mathfrak{G}^*(n))$ engendre $\mathfrak{G}^*(n)_X = \mathfrak{G}(n)_X$, pour $n \geq n_2$. On peut toujours supposer que $n_2 \geq n_1$. Nous allons voir maintenant que, pour $n \geq n_2$, $H^0(X, \mathfrak{F}(n))$ engendre $\mathfrak{F}(n)_X$, ce qui achèvera de montrer que (A_{r-1}) et $(B_{r-1}) \Rightarrow (A_r)$.

Nous supposons que $x \in U_1$, ce qui permet d'identifier $\mathfrak{F}(n)$ à $\mathfrak{F}$ au-dessus de U_1 , et en particulier $\mathfrak{F}(n)_X$ à $\mathfrak{F}_X$. Cette identification transforme, on l'a vu, l'homomorphisme φ en la multiplication par $t_0 = z_0/z_1$: $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$. Donc $\mathfrak{G}(n)_X$ se trouve identifié au quotient de $\mathfrak{F}_X$ par $t_0 \cdot \mathfrak{F}_X$. Soit alors $\mathfrak{D}_X \subset \mathfrak{F}_X$ le sous-module de $\mathfrak{F}_X$ engendré par les éléments de $H^0(X, \mathfrak{F}(n))$, $n \geq n_2$. D'après ce que nous venons de voir, l'image de $\mathfrak{D}_X$ dans $\mathfrak{F}_X/t_0 \cdot \mathfrak{F}_X$ est égale à $\mathfrak{F}_X/t_0 \cdot \mathfrak{F}_X$ tout entier. Autrement dit, $\mathfrak{F}_X = t_0 \cdot \mathfrak{F}_X + \mathfrak{D}_X$; posons $\mathfrak{A}_X = \mathfrak{F}_X/\mathfrak{D}_X$; l'égalité précédente signifie que $\mathfrak{A}_X = t_0 \cdot \mathfrak{A}_X$; appliquant alors le lemme du bas de la page 7-2 (avec $A = \mathcal{O}_X$, $F = \mathfrak{A}_X$, $I =$ idéal engendré par t_0 dans $\mathcal{O}_X$), on voit que $\mathfrak{A}_X = 0$, d'où $\mathfrak{F}_X = \mathfrak{D}_X$, ce qui achève la démonstration.

La démonstration précédente est inspirée d'une démonstration analogue de Kodaira-Spencer (Divisor class groups on algebraic varieties, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1953). Le théorème de finitude de l'Exposé 17 y joue un rôle essentiel.

9. Démonstration de $(A_r) \Rightarrow (B_r)$.

Pour $q > r$, on a $H^q(X, \mathfrak{F}(n)) = 0$ quel que soit n , d'après la Proposition 4 de l'Exposé 18. Nous démontrerons alors (B_r) par récurrence descendante sur q , $q \geq 1$.

D'après (A_r) , il existe un entier m tel que $H^0(X, \mathfrak{F}(m))$ engendre $\mathfrak{F}(m)_X$ pour tout $x \in X$. Soit alors $s_1, \dots, s_p$ une base de l'espace vectoriel $H^0(X, \mathfrak{F}(m))$; à tout système $(f_1, \dots, f_p)$ de p éléments de $\mathcal{O}_X$,

faisons correspondre l'élément $\sum f_i \cdot s_i \in \mathfrak{F}(m)_x$. On obtient ainsi un homomorphisme analytique $\theta : \mathcal{O}^p \rightarrow \mathfrak{F}(m)$, qui est surjectif puisque $s_1, \dots, s_p$ engendrent $\mathfrak{F}(m)_x$ pour tout $x \in X$. Si $\mathcal{Q}$ est le noyau de θ , on a donc une suite exacte:

$$0 \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{O}^p \xrightarrow{\theta} \mathfrak{F}(m) \rightarrow 0.$$

D'où, en appliquant la Proposition 6, une suite exacte:

$$0 \rightarrow \mathcal{Q}(n) \rightarrow \mathcal{O}^p(n) \rightarrow \mathfrak{F}(m+n) \rightarrow 0$$

D'où la suite exacte de cohomologie:

$$H^q(X, \mathcal{O}^p(n)) \rightarrow H^q(X, \mathfrak{F}(m+n)) \rightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{Q}(n)).$$

Or, d'après la Proposition 7 de l'Exposé 18, on a $H^q(X, \mathcal{O}^p(n)) = 0$ pour $n \geq 0$, et d'après l'hypothèse de récurrence descendante sur q , $H^{q+1}(X, \mathcal{Q}(n)) = 0$ pour n assez grand. Donc $H^q(X, \mathfrak{F}(m+n)) = 0$ pour n assez grand, ce qui achève la démonstration des théorèmes fondamentaux.

Note. Il serait très facile de montrer directement que $(B_r) \Rightarrow (A_r)$; malheureusement, cela ne permettrait de simplifier aucune des démonstrations précédentes. La même situation se retrouve dans la théorie des variétés de Stein: le théorème B entraîne trivialement le théorème A.

§4. Faisceaux cohérents d'idéaux.

10. Idéaux de polynômes, et faisceaux d'idéaux.

Soit P un polynôme homogène de degré n en les variables $z_0, \dots, z_r$. Soit $x \in X$, et soit t une forme linéaire en $z_0, \dots, z_r$, non nulle en x . Puisque P/t^n est homogène de degré 0, c'est une fonction rationnelle, holomorphe en x , donc c'est un élément de $\mathcal{O}_x$. Si l'on remplace t par une autre forme linéaire t' jouissant des mêmes propriétés, $P/t'^n = P/t^n \cdot (t^n/t'^n)$, et t^n/t'^n est un élément inversible de $\mathcal{O}_x$. Ainsi l'application $P \rightarrow P/t^n$ fait correspondre à tout polynôme homogène P un élément de $\mathcal{O}_x$, défini à la multiplication près par un élément inversible de $\mathcal{O}_x$. En particulier, si $\mathfrak{F}_x$ est un idéal de $\mathcal{O}_x$, la propriété $P/t^n \in \mathfrak{F}_x$

est indépendante de t . Nous dirons alors, par abus de langage, que P appartient à $\mathfrak{F}_x$. De même, si $P_1, \dots, P_k$ sont des polynômes homogènes de degrés $n_1, \dots, n_k$, l'idéal de $\mathcal{O}_x$ engendré par les $P_1/t^{n_1}, \dots, P_k/t^{n_k}$ ne dépend pas de t ; on dit que c'est l'idéal engendré par les $P_1, \dots, P_k$ en x .

Si $\mathfrak{F} \subset \mathcal{O}$ est un faisceau cohérent d'idéaux sur X , nous dirons qu'un polynôme homogène P appartient à $\mathfrak{F}$ sur X si P appartient à $\mathfrak{F}_x$ pour tout $x \in X$.

Proposition 8. Pour qu'un polynôme homogène P , de degré n , appartienne au faisceau cohérent d'idéaux $\mathfrak{F}$ sur X , il faut et il suffit que P soit une section de $\mathfrak{F}(n)$.

Tout d'abord, puisque $\mathfrak{F} \subset \mathcal{O}$, on a $\mathfrak{F}(n) \subset \mathcal{O}(n)$; or l'on sait qu'une section de $\mathcal{O}(n)$ n'est pas autre chose qu'un polynôme homogène de degré n en $z_0, \dots, z_r$; de façon plus précise, un polynôme homogène P de degré n définit sur chaque U_i une fonction holomorphe $f_i = P/z_i^n$, avec $f_j = (z_i/z_j)^n \cdot f_i$, c'est-à-dire une section de $\mathcal{O}(n)$, et l'on obtient ainsi toutes les sections de $\mathcal{O}(n)$.

Donc les sections de $\mathfrak{F}(n)$ peuvent s'identifier aux sections de $\mathcal{O}(n)$ qui appartiennent à $\mathfrak{F}(n)_x$ pour tout $x \in X$, c'est-à-dire aux polynômes P , homogènes de degré n , tels que $P/z_i^n \in \mathfrak{F}_x$ pour tout $x \in U_i$, ce qui signifie bien que P appartient à $\mathfrak{F}$, au sens défini plus haut.

Proposition 9. Tout faisceau cohérent d'idéaux sur l'espace projectif X est engendré par les polynômes homogènes qui lui appartiennent.

Soit $\mathfrak{F}$ le faisceau d'idéaux en question; d'après le Th. A, il existe un n tel que $H^0(X, \mathfrak{F}(n))$ engendre $\mathfrak{F}(n)_x$ pour tout $x \in X$. D'après ce qui précède, on peut identifier tout élément de $H^0(X, \mathfrak{F}(n))$ à un polynôme homogène P , de degré n , appartenant à $\mathfrak{F}$ sur X . Soit $P_1, \dots, P_k$ une base de l'espace vectoriel de ces polynômes. Si $x \in U_i$, dire que $H^0(X, \mathfrak{F}(n))$ engendre $\mathfrak{F}_x$ équivaut à dire que $P_1/z_i^n, \dots, P_k/z_i^n$ engendrent $\mathfrak{F}_x$, donc $\mathfrak{F}$ est bien engendré par les $P_1, \dots, P_k$, au sens défini plus haut, cqfd.

Corollaire (théorème de Chow). Tout sous-ensemble analytique de X est algébrique.

Soit V ce sous-ensemble, $\mathcal{I}(V)$ le faisceau d'idéaux qu'il définit (et qui est cohérent, d'après un théorème de H. Cartan – cf. Séminaire 51-52, Exposé 16). D'après la Proposition 9, $\mathcal{I}(V)$ est engendré par des polynômes $P_1, \dots, P_k$, ce qui entraîne évidemment que V est le lieu des zéros de ces polynômes, cqfd.