

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

K. STEIN

Un théorème sur le prolongement des ensembles analytiques

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. n° 14, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A14_0>

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN THÉORÈME SUR LE PROLONGEMENT DES ENSEMBLES ANALYTIQUES

Deuxième exposé de K. Stein, 22-3-1954

§4. Montrons comment le lemme fondamental (§1 du précédent exposé) entraîne le Corollaire 1 du théorème. Nous nous plaçons donc au voisinage d'un point $x \in X$ où la dimension r de F est $< k$; quitte à remplacer X par un voisinage de x , on peut supposer que F est de dimension $\leq r < k$ dans tout X . Quant à E , c'est un ensemble analytique dans $X - F$, de dimension k en chacun de ses points. Il s'agit de montrer que l'adhérence $\bar{E}$ de E dans X est un ensemble analytique dans X .

La démonstration se fait par récurrence sur r ; l'assertion est triviale pour $r = -1$ (ce qui signifie que F est vide). Supposons-la démontrée pour les $r < r_0$ (avec $0 \leq r_0 < k$), et montrons-la pour r_0 . Soit F un sous-ensemble analytique de X , de dimension $\leq r_0$ en chacun de ses points; et soit F' l'ensemble des points $p \in F$ au voisinage desquels F est un sous-variété de dimension r_0 ; on sait que F' est un ouvert de F , et que $F - F'$ est un ensemble analytique de dimension $< r_0$ en chacun de ses points. Il suffit de montrer que les points de F' sont ordinaires par rapport à E , car ensuite on appliquera l'hypothèse de récurrence à $F - F'$.

Soit $p \in F'$. Il existe un voisinage ouvert U de p dans X , et une carte locale de U dans laquelle p vient à l'origine et $F' \cap U$ est représenté par un sous-espace vectoriel de dimension $r_0 < k$. D'autre part, $E \cap U$ est un sous-ensemble analytique dans $U - F' \cap U$, de dimension k en chacun de ses points. Par $F' \cap U$ on peut faire passer une sous-variété connexe de dimension k , soit V (contenue dans U) telle que $V - F' \cap U$ coupe E suivant un sous-ensemble analytique de dimension $< k$. Soit E_1 l'intersection de E avec $U - V$; c'est un sous-ensemble analytique de $U - V$, de dimension k en chacun de ses points, et dont l'adhé-

rence $\overline{E}_1$ dans U est égale à $\overline{E} \cap U$. Les points de $V - F' \cap U$ sont évidemment ordinaires par rapport à E_1 ; d'après le lemme fondamental, tous les points de V sont ordinaires. Donc les points de $F' \cap U$ sont ordinaires par rapport à E , ce qu'on voulait démontrer.

Ainsi le Corollaire 1 est démontré.

§5. Nous allons maintenant démontrer le théorème lui-même. Soit F' l'ensemble des points réguliers de dimension k de F (i.e., l'ensemble des points au voisinage desquels F est une sous-variété de dimension k). Soit F'_0 l'ensemble des points de F' qui sont ordinaires par rapport à E . D'après le lemme fondamental, F'_0 est un sous-ensemble ouvert et fermé de F' ; donc F'_0 se compose d'un certain nombre de composantes connexes de F' . Soit F'_1 la réunion des autres composantes connexes de F' . L'adhérence de F'_1 est un sous-ensemble analytique G de F (à savoir la réunion des composantes irréductibles de F dont l'ensemble des points réguliers est une composante connexe de F'_1). Il est clair qu'aucun point de G n'est ordinaire par rapport à E . Le théorème sera démontré si nous prouvons que les points de $F - G$ sont tous ordinaires; en effet, ceci prouvera que l'ensemble des points singuliers essentiels est G ; or G est bien de dimension k en chacun de ses points, puisque c'est une réunion de composantes irréductibles de F dont la dimension est k .

Soit donc $p \in F - G$. Si la dimension de F en p est $< k$, p est un point ordinaire d'après le Corollaire 1 (déjà démontré). Sinon, p est adhérent à une composante connexe de F' ; puisque p n'est pas dans G , p n'est pas adhérent à F'_1 , donc p est adhérent à F'_0 . Au voisinage de p , l'ensemble des points de F non ordinaires est contenu dans $\overline{F'_0} - F'_0$, qui est un ensemble analytique de dimension $< k$ en chacun de ses points. D'après le Corollaire 1, tous ces points sont, en fait, ordinaires. Donc p est ordinaire, et la démonstration est achevée.

APPLICATIONS

§6. On appelle cône de sommet $x^{(0)}$ dans $\mathbb{C}^n$ un ensemble qui contient, avec un point $x^{(1)} \neq x^{(0)}$, tous les points de la droite complexe joignant $x^{(0)}$ et $x^{(1)}$, c'est-à-dire tous les points

$$x = x^{(0)} + t(x^{(1)} - x^{(0)}), \text{ où } t \text{ est un nombre complexe arbitraire.}$$

Le Corollaire 1 a pour conséquence:

Proposition 5. Tout cône K dans $\mathbb{C}^n$ qui est analytique en dehors de son sommet est aussi analytique en son sommet.

Il suffit de considérer le cas où K n'est pas réduit à son sommet $x^{(0)}$, donc est l'adhérence de $K - \{x^{(0)}\}$. En tout point $x \in K$ autre que le sommet, K est de dimension ≥ 1 puisque x n'est pas isolé dans K; donc, dans $\mathbb{C}^n - x^{(0)}$, $K - \{x^{(0)}\}$ admet une décomposition

$$K - \{x^{(0)}\} = M^1 \cup \dots \cup M^n,$$

où chaque M^r ($1 \leq r \leq n$) est un ensemble analytique purement r-dimensionnel (éventuellement vide) dans $\mathbb{C}^n - x^{(0)}$; si M^r n'est pas vide, son adhérence $\bar{M}^r = M^r \cup \{x^{(0)}\}$ est un sous-ensemble analytique au point $x^{(0)}$ (d'après le Corollaire 1, appliqué ici dans le cas où F est réduit au point $x^{(0)}$). Donc K est la réunion des cônes $\bar{M}^r$, donc chacun est analytique en son sommet.

C.Q.F.D.

Proposition 6 (théorème de CHOW). Tout sous-ensemble analytique E de l'espace projectif complexe P_n est un sous-ensemble algébrique.

Démonstration: P_n est l'espace des sous-espaces vectoriels de dimension 1 de $\mathbb{C}^{n+1}$. Considérant P_n comme quotient de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, on associe à tout sous-ensemble E de P_n son image réciproque dans $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, soit E'. Si E est un ensemble analytique, E' est un ensemble analytique dans $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, de dimension ≥ 1 si E n'est pas vide. D'après la Proposition 5, le cône $E' \cup \{0\}$ est analytique aussi en son sommet 0. Il reste donc à démontrer que tout cône analytique est un cône algébrique.

Soit K un cône analytique (en son sommet). Au voisinage de 0, K est défini par un système fini d'équations $f_j(x_0, \dots, x_n) = 0$, où les f_j sont holomorphes au voisinage de l'origine. Soit

$$f_j = \sum_{i \geq 0} P_j^i$$

le développement de f_j en série de polynômes homogènes (P_j^i étant homogène de degré i). On va montrer que tous les P_j^i sont nuls sur le cône K . En effet, si $x = (x_0, \dots, x_n) \in K$, on a, pour tout nombre complexe t tel que $|t| < 1$:

$$f_j(tx) = \sum_{i \geq 0} t^i P_j^i(x) = 0,$$

ce qui implique que tous les coefficients $P_j^i(x)$ sont nuls. Ainsi, au voisinage de 0, le cône K est défini par l'annulation de tous les polynômes P_j^i ; mais puisque l'anneau des séries convergentes est noethérien, il suffit d'annuler un nombre fini parmi ces polynômes, pour définir K . Le cône K est donc bien algébrique.

Corollaire. Le théorème de Chow vaut aussi dans un produit $P_{n_1} \times \dots \times P_{n_r}$ d'espaces projectifs complexes.

En effet, un tel produit Y peut être plongé comme ensemble analytique sans singularité dans un espace projectif P_N de dimension

$$N = (n_1 + 1) \cdots (n_r + 1) - 1.$$

Pour le voir, désignons par $(y_0^i, \dots, y_{n_i}^i)$ un système de coordonnées homogènes pour le i -ième facteur P_{n_i} . Soit d'autre part $(z_{s_1}, \dots, z_{s_r})$, $0 \leq s_i \leq n_i$, un système de coordonnées homogènes dans P_N . L'application Φ qui envoie

$$(y_0^1, \dots, y_{n_1}^1; \dots; y_0^r, \dots, y_{n_r}^r) \text{ en } z_{s_1}, \dots, z_{s_r} = y_{s_1}^1 \cdots y_{s_r}^r$$

est un plongement de $Y = P_{n_1} \times \dots \times P_{n_r}$ dans P_N , dont l'image est une sous-variété sans singularité. Alors si E est un sous-ensemble analytique de

Y , $\Phi(E)$ est un sous-ensemble analytique de P_N , donc est défini par des équations algébriques $Q_j(z_{s_1}, \dots, z_{s_r}) = 0$. Par suite E est défini par les équations algébriques $Q_j(y_{s_1}^1 \cdots y_{s_r}^r) = 0$.

§7. Soient X et X' deux variétés analytiques complexes, et $f: X \rightarrow X'$ une application analytique de X dans X' . Si $x \in X$ et $f(x) = x' \in X'$, l'ensemble $E(x) = f^{-1}(x')$ est un ensemble analytique dans X ; il contient x ; soit $d(x)$ sa dimension au point x . L'ensemble $E(x)$ s'appelle la fibre de f au point x .

Proposition 7. La dimension $d(x)$ de la fibre de x est une fonction semi-continue supérieurement de $x \in X$.

Démonstration: nous devons montrer que tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U tel que, pour tout $y \in U$, on ait $d(y) \leq d(x)$. Supposons que ce soit faux: il existe alors une suite de points $x_n \in U$ qui convergent vers x , telle que $d(x_n) > d(x)$ pour tout n . Soient $E'(x_n)$ une composante irréductible de la fibre $E(x_n)$ dans U , telle que $x_n \in E'(x_n)$, $\dim E'(x_n) = d(x_n)$. On peut supposer que $E(x)$ et les $E'(x_n)$ sont deux à deux disjoints et que les $E'(x_n)$ ont tous la même dimension $d' > d(x)$. Alors la réunion M des $E'(x_n)$ est un ensemble analytique dans $U \setminus E(x)$, purement dimensionnel et de dimension d' . D'après le Corollaire 1, l'adhérence $\bar{M}$ de M dans U est analytique au voisinage de x , puisque $d' > d(x)$. En particulier, M peut être prolongé analytiquement au point x . Or ceci est absurde, car tout voisinage de x rencontre presque tous les $E'(x_n)$.

§8. Soit X une variété analytique complexe de dimension n , et soit F un sous-ensemble analytique dans X , irréductible et de codimension 1. Soit f une fonction holomorphe dans $X - F$. Supposons que tous les points de F soient des points singuliers essentiels de f , c'est-à-dire que f ne soit prolongeable en aucun point de F comme fonction méromor-

phe. (D'après E. E. LEVI on sait que si un point de F est un point singulier essentiel de f , tout point de F est singulier essentiel.) Considérons l'ensemble $E(t)$ défini par l'équation

$$f(x) - t = 0 \quad (x \in X),$$

où t désigne un nombre complexe quelconque. L'ensemble $E(t)$ est analytique et purement $(n-1)$ -dimensionnel dans $X - F$. D'après le Corollaire 2, ou bien tous les points de F sont ordinaires par rapport à $E(t)$, ou bien ils sont tous points singuliers essentiels de l'ensemble $E(t)$.

On va montrer qu'il y a au plus une valeur de t telle que les points de F soient ordinaires par rapport à $E(t)$. S'il y en avait deux, t_1 et t_2 , on obtiendrait une contradiction comme suit: l'adhérence de $E(t_1) \cup E(t_2)$ dans X , c'est-à-dire $\bar{E}(t_1) \cup \bar{E}(t_2)$, est analytique en tout point de X , et ne contient pas F . Il existe donc un point $p \in F$ et un voisinage ouvert U de p qui ne rencontre pas $E(t_1) \cup E(t_2)$. Ceci signifie que f ne prend aucune des valeurs t_1 et t_2 dans U . Mais alors on montre à l'aide de la fonction modulaire, exactement comme dans la démonstration classique du théorème de Picard, que f est prolongeable comme fonction holomorphe au point p , ce qui contredit l'hypothèse.

En particulier, on a le résultat suivant:

Pour tout nombre t sauf peut-être un, l'adhérence de $E(t)$ dans X contient F . En d'autres termes: sauf peut-être pour une valeur exceptionnelle t_0 , qui ne dépend pas du point $p \in F$, tout valeur $t \neq t_0$ est prise par f dans tout voisinage de p , et ceci quel que soit $p \in F$.

C'est une généralisation du théorème de Picard, due à THULLEN (Math. Ann. 11, (1935)).

§9. Dans la démonstration du lemme fondamental, on a utilisé la généralisation du théorème de Rado énoncée aux Propositions 1 et 1 bis. Réciproquement, le Corollaire 1 entraîne les Propositions 1 et 1 bis. Nous ne

donnons pas la démonstration, qui est très facile à condition de faire usage du lemme suivant, qui est intéressant en soi:

Lemme. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue d'un espace analytique normal X dans un espace analytique Y . Pour que f soit une application analytique, il faut et il suffit que le graphe M de f soit un sous-ensemble analytique de $X \times Y$; s'il en est ainsi, M est irréductible en chacun de ses points.

Démonstration: si f est analytique, le graphe M est défini comme l'image réciproque de la diagonale de $Y \times Y$ par l'application analytique

$$(x, y) \rightarrow (f(x), y) \text{ de } X \times Y \text{ dans } Y \times Y.$$

Donc M est un sous-ensemble analytique de $X \times Y$. Réciproquement, supposons que M soit un sous-ensemble analytique de $X \times Y$; l'application de projection $X \times Y \rightarrow X$ induit une application analytique $g: M \rightarrow X$, qui est évidemment un homéomorphisme. Appliquons le Corollaire 3 du Théorème 4 de l'Exposé 8 au germe d'application défini par g en chaque point de M : on voit que g est un isomorphisme d'espaces analytiques, et que M est irréductible en chacun de ses points. Donc l'homéomorphisme réciproque de g , qui est

$$x \rightarrow (x, f(x)) ,$$

est analytique, et ceci prouve que f est analytique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. BEHNKE-K. STEIN, Modification komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete, Math. Ann. 124 (1951), p. 1-16.
- [2] H. CARTAN, Problèmes globaux dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, Proc. Intern. Congr. of Math. vol. 1 (1950), p. 152-164.
- [3] H. CARTAN, Sur une extension d'un théorème de Rado, Math. Ann. 125 (1952), p. 49-50.

- [4] W. L. CHOW, On compact analytic varieties, *Amer. Journ. Math.* 71 (1949), p. 893-914.
- [5] H. KNESEER, Analytische Mannigfaltigkeiten im komplexen projektiven Raum, *Math. Nachr.* 4 (1950-51), p. 382-391.
- [6] T. RADO, Ueber eine nicht fortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit, *Math. Zeitschr.* 20 (1924), p. 1-6.
- [7] R. REMMERT-K. STEIN, Ueber die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen, *Math. Ann.* 126 (1953), p. 263-306.
- [8] W. ROTHSTEIN, Zur Theorie der Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen, *Math. Ann.*, 126 (1953), p. 221-238.
- [9] P. THULLEN, Ueber die wesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen im Raume von n komplexen Veränderlichen, *Math. Ann.*, 111 (1935), p. 137-157.