Séminaire Henri Cartan

H. Cartan

Quotient d'une variété analytique par un groupe discret d'automorphismes

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. n° 12, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A12_0>

QUOTIENT D'UNE VARIÉTÉ ANALYTIQUE PAR UN GROUPE DISCRET D'AUTOMORPHISMES

(Exposé de H. Cartan, 9-3-1954)

§1. Enoncé du théorème

Soit G un groupe d'automorphismes d'une variété analytique complexe X. Faisons les hypothèses suivantes:

(I) si $x \in X$ et $y \in X$ ne sont pas congrus mod G, il existe un voisinage V de x et un voisinage W de y tels que $(sV) \cap W = \emptyset$ pour tout $s \in G$.

(II) pour tout $x \in X$, le groupe d'isotropie $G(x)$ (formé des $s \in G$ tels que $sx = x$) est fini; et il existe un voisinage V de x (qu'on peut supposer ouvert, et stable pour $G(x)$) tel que les relations

$$s \in G, \quad y \in V \quad \text{et} \quad sy \in V$$

entraînent $s \in G(x)$.

La condition (I) exprime que l'espace-produit X/G est séparé; la condition (II) implique que l'image de V dans X/G est isomorphe au quotient de V par la relation d'équivalence définie par le groupe d'isotropie $G(x)$.

Exemple. soit X un domaine borné de l'espace numérique complexe $\mathbf{C}^n$, et soit G un groupe discret d'automorphismes de X; alors les conditions (I) et (II) sont remplies (cf. Exposé 1, Prop. 3).

Sous les hypothèses (I) et (II), on se propose de définir sur l'espace X/G une structure d'espace analytique normal (cf. Exp. 6, §5).

Or, d'une manière tout à fait générale, soit R une relation d'équivalence dans une variété analytique X (ou, plus généralement encore, dans un espace analytique). On définit comme suit un faisceau $\mathfrak{F}$ sur l'espace-quotient $X/R = Y$: notons p la projection $X \to Y$, et, pour chaque ouvert $U \subset Y$, soit $\mathfrak{F}_U$ l'anneau des fonctions f à valeurs com-

plexes, définies et continues dans U, telles que f∘p soit holomorphe dans l'ouvert $p^{-1}(U) \subset X$. Les $\mathfrak{F}_U$ définissent un sous-faisceau $\mathfrak{F}$ du faisceau des germes de fonctions continues sur Y: l'anneau $\mathfrak{F}_y$ attaché à un point $y \in Y$ est la limite inductive des $\mathfrak{F}_U$ pour les U ouverts contenant y. On notera que $\mathfrak{F}_U$ est l'anneau des sections de $\mathfrak{F}$ au-dessus de U.

Le faisceau $\mathfrak{F}$, sur l'espace-quotient Y = X/R, définit sur cet espace une structure de l'espèce indiquée au §2 de 6. On peut donc se poser la question de savoir si Y, muni de cette structure, est un espace analytique normal.

Explicitons le faisceau $\mathfrak{F}$ dans le cas où la relation d'équivalence R est définie par un groupe G d'automorphismes de X, satisfaisant aux conditions (I) et (II). Soit $y \in Y = X/G$; choisissons un $x \in X$ dont la classe d'équivalence p(x) soit y, et soit V comme dans la condition (II). Soit U l'ouvert de Y, image de V par p; l'application $f \to f \circ p$ définit alors un isomorphisme de $\mathfrak{F}_U$ (anneau des sections de $\mathfrak{F}$ au-dessus de U) sur l'anneau des fonctions holomorphes dans V et invariantes par le groupe d'isotropie G(x). Par suite, l'application $f \to f \circ p$ définit un isomorphisme de l'anneau $\mathfrak{F}_y$ sur le sous-anneau de $\mathcal{O}_x(X)$, formé des germes de fonctions holomorphes en x et invariantes par le groupe G(x).

Théorème 1. Soit X une variété analytique; soit G un groupe d'automorphismes de X, satisfaisant aux conditions (I) et (II). Si, sur l'espace-quotient Y = X/G, on définit le faisceau $\mathfrak{F}$ comme il vient d'être dit, ce faisceau définit sur Y une structure d'espace analytique normal.

Pour faire la démonstration, on se place au voisinage d'un point $y \in Y$. Cela revient à examiner le cas où le groupe G est fini et laisse fixe un point $a \in X$; et l'on doit étudier l'espace-quotient Y = X/G au voisinage du point $b \in Y$, image de a. On va d'abord prouver:

Lemme 1. On peut choisir les coordonnées locales de X au point a (nulles au point a) de manière que le groupe fini G opère linéairement sur ces coordonnées.

Démonstration: faisons un choix provisoire de coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n$ nulles en a. Ce choix définit sur X, au voisinage de a, une structure d'espace vectoriel. Pour chaque $s \in G$, soit s' la transformation linéaire tangente à s; alors $s'^{-1}s$ est une transformation analytique de X (au voisinage de a), tangente à l'identité. Il en est de même de la transformation

$$\sigma = \frac{1}{r} \sum_{s \in G} s'^{-1}s \qquad (r \text{ désignant l'ordre de } G);$$

un calcul immédiat montre que, pour tout $s \in G$, on a $\sigma s = s'\sigma$. Donc si on prend pour nouvelles coordonnées locales les transformées des anciennes par σ, le groupe G opère linéairement sur ces nouvelles coordonnées locales.

Remarque: cette démonstration est un cas particulier d'une démonstration que l'on peut faire pour tout groupe compact d'automorphismes ayant un point fixe; on utilise alors la mesure de Haar de groupe.

Grâce au Lemme 1, la démonstration du Théorème 1 est remenée au cas où l'espace X est un espace numérique complexe $\mathbf{C}^n$, et le groupe G un groupe linéaire fini; on veut alors étudier l'espace-quotient $\mathbf{C}^n/G$ au voisinage de l'origine. Or nous allons même faire une étude globale de cet espace-quotient, dans les paragraphes suivants. On verra (Th. 4 ci-dessus) que $\mathbf{C}^n/G$ est un espace analytique normal, et ceci achèvera en même temps de prouver le Théorème 1.

§2. Quotient d'un espace numérique $\mathbf{C}^n$ par un groupe linéaire fini G.

Plus généralement, soit K un anneau (commutatif, avec élément unité), et soit G un groupe fini de transformations linéaires de l'espace K^n. On notera $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées dans l'espace K^n, S

l'algèbre des polynômes $K[x_1, \ldots, x_n]$, et S_G la sous-algèbre des polynômes invariants par G.

Proposition 1 ("théorème des invariants"). Si l'anneau K est noethérien (par exemple si K est un corps, ou si K est l'anneau des entiers naturels), il existe un système fini de polynômes invariants $Q_i \in S_G$ (qui l'on peut supposer homogènes), tels que S_G soit engendré (comme K-algèbre) par les Q_i.

On va démontrer une proposition un peu plus générale (au moins en apparence):

Proposition 1 bis. Soit **A** une algèbre sur un anneau noethérien K. Supposons que **A** soit engendrée par un nombre fini d'éléments $x_1, \ldots, x_n$. Soit G un groupe fini d'automorphismes de A (comme K-algèbre), et soit A_G la sous-algèbre des éléments de A invariants par G. Alors A est un A_G-module de type fini, et A_G est engendrée (comme K-algèbre) par un nombre fini d'éléments.

Démonstration: tout élément $a \in A$ est entier sur A_G, car les "fonctions symétriques élémentaires" de a et de ses transformés par G sont dans A_G. En particulier, $x_1, \ldots, x_n$ sont entiers sur A_G; or leurs équations de dépendance intégrale ne font intervenir qu'un nombre fini d'éléments de A_G. Soit B la sous-algèbre qu'ils engendrent. B est noethérienne (quotient d'une algèbre de polynômes sur un anneau noethérien). Puisque A est engendré par les éléments $x_1, \ldots, x_n$, entiers sur B, A est un B-module de type fini (cf. 7, §4). Alors A_G est un sous-B-module de A, donc est aussi un B-module de type fini (puisque B est noethérien). Un système fini de générateurs de B (comme K-algèbre), et un système fini de générateurs de A_G (comme B-module) engendrent A_G comme K-algèbre. Ceci démontre la proposition.

Proposition 2. Si K est un corps, les points de l'espace-quotient $Y = K^n/G$ sont séparés par les fonctions de S_G (polynômes G-invariants, à coefficients dans K).

Démonstration: soient x' et x'' deux points de K^n, non congrus mod G. Il existe un polynôme Q, égal à 1 en tous les points sx' (où $s \in G$), et à 0 en tous les points sx'' (cf. Appendice). Le produit des transformés de Q par G est un polynôme invariant, égal à 1 en x' et à 0 en x''. D'où la proposition.

Proposition 3. Soient toujours K un corps, et G un groupe fini d'automorphismes linéaires de K^n. Soit donné un point $x \in K^n$, et soit $G(x)$ le groupe d'isotropie de x. Alors, pour tout entier $N > 0$, et tout polynôme P invariant par $G(x)$, il existe un polynôme Q invariant par G, tel que $Q - P$ soit d'ordre $\geq N$ au point x.

Démonstration: soit $H = G/G(x)$ l'ensemble des classes à gauche $s \cdot G(x)$. Tout $\sigma \in H$ définit un point transformé σx, et ces points sont tous distincts. Soit R un polynôme tel que $R - 1$ soit d'ordre $\geq N$ au point x, et que R soit d'ordre $\geq N$ aux points σx distincts de x (cf. Appendice). Le produit $\overline{R}$ des transformés de R par le sous-groupe $G(x)$ jouit des mêmes propriétés. Soit alors donné un polynôme P, invariant $G(x)$; le produit $P\overline{R}$ est invariant par $G(x)$, et $P\overline{R} - P$ est d'ordre $\geq N$ au point x. Considérons les transformés de $P\overline{R}$ par les $\sigma \in H$ (autres que la classe de l'identité); ils sont d'ordre $\geq N$ au point x. Alors la somme de tous les transformés de $P\overline{R}$ par H est un polynôme Q, invariant par G, et $Q - P$ est d'ordre $\geq N$ au point x.

§3. Quotient d'un espace numérique $\mathbf{C}^n$ par un groupe linéaire fini G (Suite).

Soit encore, plus généralement, un corps K (commutatif) que, dans tout ce paragraphe, nous supposerons valué, complet, non discret. On note toujours S l'algèbre des polynômes $K[x_1, \ldots, x_n]$, et S_G la sous-algèbre des éléments G-invariants de S. Soit H l'algèbre des séries convergentes en $x_1, \ldots, x_n$ (à coefficients dans K), et soit H_G la sous-algèbre des éléments G-invariants de H.

Théorème 2. *H est un H_G-module de type fini. De plus, soit $\{Q_i\}$ un système fini de polynômes homogènes, invariants par G, qui engendre la K-algèbre S_G (cf. Prop. 1). Alors H_G est la "sous-algèbre analytique" engendrée par les Q_i.*

Cette dernière assertion exprime que toute $f(x_1, \ldots, x_n)$ analytique à l'origine, et G-invariante, peut s'écrire comme une fonction composée $F(Q_1, \ldots, Q_p)$, où $F(y_1, \ldots, y_p)$ est une fonction analytique au voisinage de l'origine. (Pour la notion de sous-algèbre analytique, voir l'Exposé 7, §4.)

Démonstration: soit B la sous-algèbre analytique engendrée par les Q_i. On a les inclusions évidentes $S_G \subset B \subset H_G$. Or H est analytiquement engendré par les fonctions coordonnées $x_1, \ldots, x_n$, qui sont des éléments entiers sur S_G, donc entiers sur B; d'après l'Exposé 7 (coroll. du Th. 1), H est un B-module de type fini: de plus B est fermé dans H, lorsqu'on munit l'anneau analytique H de la topologie définie par les puissances de son idéal maximal. (Exposé 7, Prop. 8.) Ceci implique d'abord que H est un module de type fini sur H_G. D'autre part, S_G est dense dans H_G (pour la topologie de H): car si on écrit le développement d'une $f \in H_G$ en série de polynômes homogènes, ces polynômes sont G-invariants. A fortiori, B est dense dans H_G pour la topologie de H; et puisque B est fermé dans H, on a $B = H_G$, ce qui achève la démonstration.

Le Théorème 2 admet un complément important:

Théorème 2 bis. *Supposons qu'on ait associé à chacun des polynômes Q_i du Théorème 1, une fonction $f_i \in H_G$ telle que $f_i - Q_i$ soit d'ordre $> d_i$ à l'origine (d_i désignant le degré de Q_i). Alors l'anneau H_G est analytiquement engendré par les f_i.*

Avant de démontrer ce théorème, donnons une définition:

Définition: un système fini $\{Q_i\}$ $1 \leq i \leq p$ de polynômes homogènes G-invariants, qui engendre l'algèbre S_G, sera dit irréductible si

tout polynôme $P \in K[y_1, \ldots, y_p]$, isobare lorsqu'on affecte chaque variable y_i d'un poids d_i égal au degré de Q_i, et tel que $P(Q_1, \ldots, Q_p) = 0$, est d ordre ≥ 2 (c'est-à-dire ne contient pas de termes de degré un par rapport aux variables y_i).

On va d'abord prouver le:

Lemme 2: tout système fini $\{Q_i\}$ de polynômes homogènes G-invariants, qui engendre l'algèbre S_G, contient un système irréductible de générateurs de S_G.

Démonstration du Lemme 2: par récurrence sur le nombre p des Q_i, l'assertion étant triviale pour $p = 0$. Il suffit de montrer: si S_G est engendré par p polynômes homogènes Q_i, et si le système $\{Q_i\}$ n'est pas irréductible, il contient un système de p-1 polynômes qui engendre S_G. Or, supposons qu'il existe un polynôme isobare $P(y_1, \ldots, y_p)$ tel que $P(Q_1, \ldots, Q_p) = 0$, avec $P(y_1, \ldots, y_p) = \Sigma_i\, a_i y_i + P'$, les constantes a_i n'étant pas toutes nulles, et P' étant d'ordre ≥ 2. Soit d le plus petit des degrés d_i tels que $a_i \neq 0$, et soit I l'ensemble des i tels que $d_i = d$. Si on écrit que, dans le polynôme $P(Q_1, \ldots, Q_p)$, l'ensemble des termes de degré d est nul, on trouve une relation

$$\sum_{i \in I} a_i Q_i + P''(Q_1, \ldots, Q_p) = 0 \ ,$$

où le polynôme P'' ne dépend que des Q_i pour $i \notin I$. Donc l'un des Q_i (pour $i \in I$) s'exprime comme polynôme par rapport aux autres Q_j, et S_G est engendré par $p - 1$ éléments parmi les Q_i.

Le Théorème 2 bis va résulter évidemment du:

Théorème 3. Soit $\{Q_i\}$ un système irréductible de polynômes homogènes, qui engendre l'algèbre S_G des polynômes G-invariants. Supposons qu'on ait associé à chaque Q_i une fonction $f_i \in H_G$ telle que $f_i - Q_i$ soit d'ordre $> d_i$ (d_i = degré de Q_i). Alors, quel que soit le choix des fonctions holomorphes $F_i(y_1, \ldots, y_p)$ telles que

(1) $$f_i = F_i(Q_1, \ldots, Q_p) \qquad \text{(cf. Théorème 2)},$$

la transformation analytique

(2) $$(y_1, \ldots, y_p) \to (F_1(y), \ldots, F_p(y))$$

est inversible au voisinage de l'origine (la transformation réciproque étant aussi analytique).

Démonstration: posons $F_i(y_1, \ldots, y_p) = G_i(y_1, \ldots, y_p) + H_i(y_1, \ldots, y_p)$, la fonction G_i étant linéaire, et H_i d'ordre ≥ 2. Par hypothèse, $F_i(Q_1, \ldots, Q_p) - Q_i$ est d'ordre $> d_i$. Donc l'ensemble des termes de degré $d \leq d_i$, dans

$$G_i(Q_1, \ldots, Q_p) - Q_i + H_i(Q_1, \ldots, Q_p) ,$$

est identiquement nul; il s'ensuit que l'ensemble des termes de poids d dans $G_i(y_1, \ldots, y_p) - y_i$ est nul, sinon le système $\{Q_i\}$ ne serait pas irréductible. Ainsi la forme linéaire $G_i(y_1, \ldots, y_p) - y_i$ ne contient que les variables y_j telles que $d_j > d_i$.

De là il suit que si on range les Q_i dans l'ordre des degrés croissants, la matrice de la transformation linéaire tangente à la transformation (2) est triangulaire, avec 1 dans la diagonale principale. Cette matrice est donc inversible. Un théorème classique affirme alors que la transformation (2) est inversible au voisinage de l'origine, et que la transformation réciproque est analytique. Ceci achève la démonstration.

En rapprochant la Prop. 3 et le Théorème 2 bis, on obtient aussitôt:

Proposition 4. Soit G un groupe fini d'automorphismes linéaires de K^n, et soit $\{Q_i\}$ un système fini de polynômes homogènes G-invariants qui engendre S_G. Soit donné un point $a = (a_1, \ldots, a_n) \in K^n$, et soit $G(a)$ le groupe d'isotropie de a. Toute fonction analytique de $x = (x_1, \ldots, x_n)$ au voisinage de a, invariante par le groupe d'isotropie $G(a)$, s'exprime comme fonction analytique des polynômes $Q_i(x) - Q_i(a)$.

§4. Quotient d'un espace numérique $\mathbf{C}^n$ par un groupe linéaire fini G (Fin).

Supposons désormais que le corps K soit le corps complexe $\mathbf{C}$, et appliquons les résultats précédents. Soit p le nombre des polynômes homogènes Q_i qui engendrent S_G. Considérons l'application φ: $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^p$ définie par

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (Q_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, Q_p(x_1, \ldots, x_n)) \quad (3)$$

Soit I l'idéal des fonctions $f(y_1, \ldots, y_p)$ holomorphes à l'origine de $\mathbf{C}^p$, telles que $f(Q_1, \ldots, Q_p) = 0$ (i.e.: qui s'annulent sur l'image de φ au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^p$). Puisque $Q_1, \ldots, Q_p$ ne s'annulent simultanément qu'à l'origine de $\mathbf{C}^n$ (en vertu de la Prop. 2), l'application φ applique le "germe d'espace" $\mathbf{C}^n$ (à l'origine) sur le germe d'ensemble analytique E_0 défini par l'annulation des fonctions de I (ceci résulte de l'Exposé 8, Coroll. 1 du Th. 4). Or E_0 est algébrique, car l'idéal I est engendré par les polynômes isobares $P(y_1, \ldots, y_p)$ qui en font partie.

En effet, groupons en polynômes isobares les termes du développement de Taylor d'une fonction $f \in I$:

$$f = \sum_k P_k \qquad (P_k \text{ de poids } k).$$

Puisque $f(t^{d_1}y_1, \ldots, t^{d_p}y_p)$ appartient aussi à I, la série $\Sigma_k t^k P_k$ appartient à I quel que soit t complexe; or I est fermé pour la topologie de la convergence simple des coefficients (Sém. 1951-52, Exp.11, Th. 4); on en déduit que tous les P_k appartiennent à I. Réciproquement, si les polynômes isobares P_k appartiennent à I, alors $f \in I$.

Le germe E_0 est stable pour le groupe de transformations

$$(y_1, \ldots, y_p) \to (t^{d_1}y_1, \ldots, t^{d_p}y_p) \quad .$$

Par suite, d'un point de vue global, φ applique l'espace $\mathbf{C}^n$ sur l'ensemble algébrique E tout entier, E désignant l'ensemble des zéros communs aux polynômes de l'idéal I.

Or φ est constante sur les classes d'équivalence mod G; donc φ définit une application continue ψ de l'espace-quotient $\mathbf{C}^n/G = Y$ sur l'ensemble algébrique E. Comme les Q_i séparent les points de $\mathbf{C}^n/G$ (Prop. 2), ψ est biunivoque. C'est donc un homéomorphisme de $Y = \mathbf{C}^n/G$ sur l'ensemble algébrique E. Soit $x \in \mathbf{C}^n$; soit, comme au §1, $\mathfrak{F}_x$ l'anneau des germes holomorphes au point x et invariants par le groupe d'isotropie $G(x)$; ψ transforme $\mathfrak{F}_x$ dans l'anneau des germes induits sur E, au point $\varphi(x)$, par les germes de fonctions holomorphes de l'espace ambiant; cela résulte évidemment de la Prop. 4. Or l'anneau $\mathfrak{F}_x$ est intégralement clos.

En effet, soit, d'une manière générale, un groupe G d'automorphismes d'un anneau d'intégrité A intégralement clos. Le sous-anneau des éléments G-invariants de A est intégralement clos (démonstration triviale).

Donc l'ensemble E est normal en chacun de ses points. Ainsi l'espace-quotient $\mathbf{C}^n/G = Y$, muni du faisceau $\mathfrak{F}$ (tel qu'il a été défini au §1), est un espace analytique normal; et ψ est un isomorphisme de Y sur l'ensemble algébrique normal E, muni de sa structure canonique d'espace analytique général. Nous avons ainsi démontré le théorème suivant:

Théorème 4. L'application φ définie par (3) applique $\mathbf{C}^n$ sur un sous-ensemble algébrique E de l'espace $\mathbf{C}^p$; E est normal en chacun de ses points; c'est l'ensemble des zéros communs aux polynômes isobares $P(y_1, \ldots, y_p)$ tels que $P(Q_1, \ldots, Q_p) = 0$. Par passage au quotient, φ définit un isomorphisme de l'espace-quotient $\mathbf{C}^n/G$ (muni du faisceau $\mathfrak{F}$ défini à la fin du §1) sur l'ensemble algébrique normal E (muni de sa structure canonique d'espace analytique général).

On peut compléter ces résultats:

Théorème 5. Sous les hypothèses précédentes, soit $(f_1, \ldots, f_p)$ un système de fonctions holomorphes à l'origine de $\mathbf{C}^n$, telles que, pour tout i $(1 \leq i \leq p)$, $f_i - Q_i$ soit d'ordre $> d_i$ (d_i = degré de Q_i).

Alors il existe un voisinage ouvert V de l'origine dans $\mathbf{C}^n$ (voisinage qu'on peut supposer stable par G) tel que l'application

(4) $\quad (x_1, \ldots, x_n) \to (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_n))$

définisse, par passage au quotient, un isomorphisme de l'espace V/G (muni de sa structure d'espace analytique normal) sur un sous-ensemble analytique F dans un ouvert $U \subset \mathbf{C}^p$; l'ensemble F est normal en tous ses points.

Démonstration: extrayons du système (Q_i) un système irréductible de générateurs (c'est possible, en vertu du Lemme 2). Supposons par exemple que ce soit $(Q_1, \ldots, Q_q)$, $q \leq p$. Soit E' l'ensemble algébrique normal engendré par $Q_1, \ldots, Q_q$. D'après le Théorème 3, on a, au voisinage de l'origine, une transformation analytique irréductible $(y_i) \to (F_i(y_1, \ldots, y_q))$ telle que $f_i = F_i(Q_1, \ldots, Q_q)$ $(1 \leq i \leq q)$. Elle transforme l'ensemble algébrique E', dans un voisinage de l'origine, en un ensemble analytique normal F'. Quant aux fonctions $f_{q+1}, \ldots, f_p$, elles peuvent s'exprimer comme fonctions holomorphes sur F'; donc $f_1, \ldots, f_p$ engendrent un sous-ensemble analytique normal F, dans un voisinage de l'origine.

§5. Un complément au Théorème 2.

Considérons une série entière

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{i_1, \ldots, i_p \geq 0} a_{i_1 \ldots i_p} (x_1)^{i_1} \cdots (x_p)^{i_p}$$

à coefficients $a_{i_1 \ldots i_p}$ dans un corps valué complet K, non discret. Nous appellerons fonction majorante de f, et noterons $\overline{f}$, la fonction d'une variable réelle $r > 0$

$$\overline{f}(r) = \sum_{i_1, \ldots, i_p \geq 0} |a_{i_1 \ldots i_p}| \, r^{i_1 + \cdots + i_p} .$$

Dire que la série est convergente (dans un voisinage de l'origine), c'est dire que $\overline{f}(r)$ est fini pour $r > 0$ assez petit. On appellera rayon de

convergence de la série f, la borne supérieure des r tels que $\overline{f}(r)$ soit fini.

Proposition 5. Avec les notations du §3, soit $\{Q_i\}, 1 \leq i \leq p$, un système de polynômes homogènes $Q_i(x_1, \ldots, x_n)$, G-invariants, qui engendre l'algèbre S_G des polynômes G-invariants. Il existe un nombre $k > 0$ jouissant de la propriété suivante: pour toute série entière $f(x_1, \ldots, x_n)$, G-invariante, dont le rayon de convergence est $\rho > 0$, il existe une série entière $F(y_1, \ldots, y_p)$ dont le rayon de convergence est $\geq k\rho$, telle que

$$F(Q_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, Q_p(x_1, \ldots, x_n)) = f(x_1, \ldots, x_n) \quad (5)$$

Démonstration: il suffit de montrer l'existence d'un $k > 0$ jouissant de la propriété suivante: si $f(x_1, \ldots, x_n)$ est un polynôme homogène G-invariant tel que $\overline{f}(1) \leq 1$, il existe un polynôme isobare $F(y_1, \ldots, y_p)$ tel que

$$\overline{F}(k) \leq 1, \quad F(Q_1(x), \ldots, Q_p(x)) = f(x) .$$

Pour cela, il suffit de montrer ceci: pour toute suite de polynômes homogènes, G-invariants, $f_1(x), \ldots, f_t(x), \ldots$ satisfaisant à $\overline{f}_t(1) \leq 1$, il existe $k > 0$ et des polynômes isobares $F_1, \ldots, F_t, \ldots$ tels que

$$F_t(Q_1(x), \ldots, Q_p(x)) = f_t(x) \quad \text{pour tout } t,$$

la suite des $\overline{F}_t(k)$ étant bornée.

Or c'est évident si les degrés des f_t sont bornés (car les polynômes homogènes, G-invariants, d'un degré donné, forment un espace vectoriel de dimension finie). On peut donc supposer que le degré de f_t est t. Alors $\Sigma_{t \geq 1} f_t = f$ est une série entière convergente. D'après le Théorème 2, il existe une série convergente $F(y_1, \ldots, y_p)$ satisfaisant à (5). Groupons les termes de F en polynômes isobares de poids t:

$$F = \sum_{t \geq 1} F_t . \quad (6)$$

Observons que $\overline{F} = \Sigma_{t \geq 1} \overline{F}_t$. On a évidemment

$$F_t(Q_1(x), \ldots, Q_p(x)) = f_t(x).$$

Puisque F est une série convergente, il existe $k > 0$ tel que $\Sigma_t \overline{F}_t(k)$ soit fini; donc la suite des $\overline{F}_t(k)$ est bornée.

C.Q.F.D.

Corollaire de la Proposition 5: si la série entière $f(x_1, \ldots, x_n)$, G-invariante, converge pour toutes les valeurs des variables, il existe une série entière $F(y_1, \ldots, y_p)$ qui converge pour toutes les valeurs des variables, et satisfait à (5).

APPENDICE

Soit K un corps (commutatif). Etant donné, dans l'espace K^n, des points $x^i = (x_1^i, \ldots, x_n^i)$ en nombre fini, distincts deux à deux, un entier N, et des polynômes $Q_i(x_1, \ldots, x_n)$ à coefficients dans K, il existe un polynôme $P(x_1, \ldots, x_n)$ à coefficients dans K, tel que, pour chaque i, la différence $P - Q_i$ soit d'ordre $\geq N$ au point x^i.

Démonstration: il suffit de trouver, pour chaque i, un polynôme R_i tel que $R_i - 1$ soit d'ordre $\geq N$ au point x^i, et que R_i soit d'ordre $\geq N$ en chacun des points x^j (pour $j \neq i$). Alors $P = \Sigma_i Q_i R_i$ sera une solution du problème.

Voici comment on peut construire les R_i. Pour tout couple (i, j) tel que $i \neq j$, il existe un polynôme U_{ij} égal à 1 au point x^i, et à 0 au point x^j (prendre une des fonctions coordonnées, multipliée par un coefficient convenable, puis augmentée d'une constante convenable). Le produit U_i des U_{ij} relatifs à tous les $j \neq i$ est égal à 1 au point x^i, à 0 en tout autre point x^j. Alors

$$R_i = 1 - (1 - (U_i)^N)^N$$

répond à la question.