

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

H. CARTAN

Normalisation (suite) : théorème d'Oka

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. n° 11, p. 1-16

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A11_0

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NORMALISATION (Suite):

Théorème d'Oka

Exposé de H. CARTAN, 22-2-1954,

réécrit ultérieurement

§1. Enoncé du théorème d'Oka.

Dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$, on considère un sous-ensemble analytique E . Notons $A(E)$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur E : en un point $x \in E$, l'anneau $A_x(E)$ est isomorphe au quotient $\mathcal{O}_x(U)/I_x(E)$, où $\mathcal{O}_x(U)$ est l'anneau des germes (au point x) de fonctions holomorphes dans U , et $I_x(E)$ l'idéal des germes qui s'annulent identiquement sur E . Le faisceau-quotient $\mathcal{O}(U)/I(E)$ induit donc le faisceau $A(E)$ sur le sous-ensemble analytique E , et induit zéro en tout point $x \notin E$.

Soit $\tilde{A}_x(E)$ la clôture intégrale de $A_x(E)$ (c'est 0 si $x \notin E$). La collection des $\tilde{A}_x(E)$, pour $x \in U$, s'organise en un faisceau analytique sur l'espace U , faisceau noté $\tilde{A}(E)$: en effet, si f et g sont deux fonctions holomorphes dans U au voisinage de x , telles que le quotient f/g définisse au point x un élément de $\tilde{A}_x(E)$, ce même quotient définit en tout point y assez voisin de x un élément de $\tilde{A}_y(E)$. Le faisceau $\tilde{A}(E)$ est nul en dehors de E , et peut être considéré à volonté comme un faisceau analytique sur U , ou comme un faisceau analytique sur E .

Le théorème d'Oka s'énonce comme suit:

Théorème 1. Le faisceau $\tilde{A}(E)$ est cohérent.

(Pour la notion de faisceau cohérent, voir Sém. 1951-52, Exposé 18; on utilisera ici les résultats élémentaires sur les faisceaux cohérents, par exemple, le fait que le noyau, l'image, le conoyau d'un morphisme de faisceaux cohérents est un faisceau cohérent.)

La démonstration du théorème 1 occupera tout le présent Exposé. Avant de la commencer, tirons tout de suite une conséquence du théorème d'Oka:

Corollaire du Théorème 1. L'ensemble des points de E où le sous-ensemble analytique E n'est pas normal est un sous-ensemble analytique de E.

Démonstration du Corollaire: soit N cet ensemble. Par définition, $x \in N$ si et seulement si $\tilde{A}_x(E) \neq A_x(E)$. Donc N est l'ensemble des points de U où le faisceau-quotient $\tilde{A}(E)/A(E)$ est $\neq 0$; autrement dit, N est le support du faisceau $\tilde{A}(E)/A(E)$. Il suffit donc de prouver le:

Lemme 1. Le support d'un faisceau cohérent $\mathfrak{F}$ est un sous-ensemble analytique.

Démonstration du Lemme 1: la question étant locale, on peut supposer que $\mathfrak{F}$ est un quotient $\mathcal{O}^q/\mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est un sous-faisceau cohérent de la somme directe $\mathcal{O}^q$ de q exemplaires du faisceau structural $\mathcal{O}$. Montrons, par récurrence sur q, que si $\mathfrak{F}$ est quotient de $\mathcal{O}^q$ par un sous-faisceau cohérent, le support de $\mathfrak{F}$ est un ensemble analytique. C'est évident pour $q = 1$. Supposons-le prouvé pour $q-1$ ($q \geq 2$) et prouvons-le pour q. La suite exacte évidente

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^{q-1} \rightarrow \mathcal{O}^q \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0$$

induit une suite exacte de faisceaux cohérents

$$0 \rightarrow \mathfrak{F}' \rightarrow \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'' \rightarrow 0,$$

où $\mathfrak{F}'$ est un quotient de $\mathcal{O}^{q-1}$ et $\mathfrak{F}''$ un quotient de $\mathcal{O}$. Par l'hypothèse de récurrence, le support de $\mathfrak{F}'$ et le support de $\mathfrak{F}''$ sont des ensembles analytiques; comme le support de $\mathfrak{F}$ est la réunion des supports de $\mathfrak{F}'$ et $\mathfrak{F}''$, c'est un ensemble analytique.

C.Q.F.D.

§2. Réduction du problème.

Soit $a \in E$. Soit u une fonction holomorphe dans U qui soit un dénominateur universel pour E en tout point $x \in E \cap U$; une telle fonction u existe, d'après l'Exposé 9, si on réduit U à un voisinage

assez petit de a . La multiplication par u définit alors, dans U , un homomorphisme de faisceaux analytiques

$$u: \tilde{A}(E) \rightarrow A(E)$$

qui est injectif, et permet donc d'identifier $\tilde{A}(E)$ à un sous-faisceau de $A(E)$. Le Théorème 1 exprime que l'image de l'homomorphisme u est un sous-faisceau cohérent de $A(E)$. Il revient au même de prouver que le conoyau de u est un faisceau cohérent.

Définissons un sous-faisceau $\mathfrak{F}(E, u)$ du faisceau $\mathcal{O}(U)$, comme suit: considérons l'homomorphisme composé

$$(1) \quad \mathcal{O}(U) \rightarrow A(E) \rightarrow A(E)/\text{Im } u ,$$

ou $\mathcal{O}(U) \rightarrow A(E)$ est l'épimorphisme naturel. Par définition, $\mathfrak{F}(E, u)$ est le noyau de (1), et tout revient à prouver que $\mathfrak{F}(E, u)$ est un faisceau cohérent.

Même si u n'est pas un dénominateur universel (c'est-à-dire si u est une fonction holomorphe quelconque dans l'ouvert U), on peut considérer le noyau $\mathfrak{F}(E, u)$ de l'homomorphisme composé

$$(2) \quad \mathcal{O}(U) \rightarrow A(E) \rightarrow \tilde{A}(E)/u\tilde{A}(E) ;$$

il coïncide bien avec $\mathfrak{F}(E, u)$ lorsque u est un dénominateur universel. De plus, si le Théorème 1 est vrai, $\mathfrak{F}(E, u)$ doit être un faisceau cohérent quelle que soit la fonction holomorphe u . En résumé, le Théorème 1 équivaut au suivant:

Théorème 2. Pour toute fonction holomorphe u dans U , le noyau $\mathfrak{F}(E, u)$ de l'homomorphisme composé (2) est un faisceau cohérent.

La cohérence de $\mathfrak{F}(E, u)$ est triviale au voisinage d'un point $a \notin E$; il suffit donc de faire la démonstration au voisinage d'un point $a \in E$. Dans un voisinage convenable de a , E est réunion d'une famille finie de sous-ensembles analytiques E^i dont chacun est irréductible au point a ; on a évidemment

$$\mathfrak{F}(E, u) = \bigcap_i \mathfrak{F}(E^i, u) ,$$

et si l'on sait que chacun des faisceaux $\mathfrak{F}(E^i, u)$ est cohérent, il s'ensuit que $\mathfrak{F}(E, u)$ est cohérent. On peut donc, pour démontrer le Théorème 2, supposer que E est irréductible au point a . De plus, on peut supposer que u n'est pas identiquement nulle sur E , car si u est identiquement nulle sur E on a $\mathfrak{F}(E, u) = \mathfrak{I}(E)$, qui est cohérent (Sém. 1951-52, Exposé 16).

§3. Démonstration du Théorème 2 dans le "cas favorable".

E étant supposé irréductible au point $a \in E$, nous appelons "cas favorable" le cas où l'ensemble S des points singuliers de E est de codimension ≥ 2 dans E au voisinage de a . Soit U un tel voisinage (ouvert) de a .

Observons d'abord que l'anneau $\Gamma(U, \tilde{A}(E))$ des sections de $\tilde{A}(E)$ au-dessus de U s'identifie à l'anneau des sections de $A(E)$ au-dessus de $U \cap \mathcal{C}S$ qui sont bornées au voisinage de tout point de $E \cap U$; cela résulte aussitôt de l'interprétation fonctionnelle de la clôture intégrale donnée au §1 de l'Exposé précédent 10 (Théorème 1). On va montrer que, dans le cas favorable, toute section de $A(E)$ au-dessus de $U \cap \mathcal{C}S$ est automatiquement bornée au voisinage de chaque point de E . En effet, une telle section est une fonction f holomorphe sur la variété analytique complexe $(E - S) \cap U$. Reprenons, au voisinage de a , la description classique d'un germe de sous-ensemble analytique irréductible E (valable si U est un voisinage assez petit de a), déjà utilisée dans l'Exposé 9. Il s'introduit, pour un choix convenable des coordonnées locales $x_1, \dots, x_n$ de la variété ambiante, nulles au point a , un polynôme distingué irréductible $P(x_{k+1})$ de degré p , à coefficients holomorphes en $x_1, \dots, x_k$ au voisinage de l'origine. Soit D l'ensemble analytique formé des points $(x_1, \dots, x_k)$ assez voisins de 0 où $\Delta(x_1, \dots, x_k) \neq 0$, Δ désignant le discriminant du polynôme P . La projection S' de S sur l'espace $\mathbb{C}^k$ des variables $x_1, \dots, x_k$ est contenue dans D . Si $(x_1, \dots, x_k) \notin D$, le polynôme $P(x_{k+1})$ a p racines distinctes, et il leur correspond p valeurs f_i de la fonction f . Ces f_i sont les racines d'un polynôme unitaire $Q(z)$ de degré p , à coefficients holomorphes de $x_1, \dots, x_k$ au

voisinage de 0 dans le complémentaire de D. Or au voisinage d'un point de $D - S'$ ces coefficients restent bornés, donc ils sont encore holomorphes en tout point de $D - S'$ (assez voisin de 0). Par hypothèse, S' est de dimension complexe $\leq k-2$; d'après un théorème classique, les coefficients de Q se prolongent en des fonctions holomorphes aussi aux points de S' , et par suite f satisfait à une équation $Q(f) = 0$, à coefficients holomorphes en $x_1, \dots, x_k$ dans un voisinage de 0 (sans exception). Ceci montre que f est bornée au voisinage de chaque point de $U \cap E$.

C.Q.F.D.

Ainsi, dans le cas favorable, on a un isomorphisme naturel

$$\Gamma(U, \tilde{A}(E)) = \Gamma(U \cap [S, A(E)]).$$

Prenons alors un système fini de fonctions holomorphes v_i comme dans le Théorème 3 de l'Exposé 9; quitte à remplacer U par un voisinage ouvert assez petit de a , les v_i sont holomorphes dans U et sont des dénominateurs universels pour E en tout point de $E \cap U$; de plus, $S \cap U$ est défini, dans U , par le système d'équations $v_i(x) = 0$.

Lemme 2. U étant choisi comme ci-dessus, soit $x \in U$; alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'une $f \in \mathcal{O}_x(U)$ soit dans $\mathfrak{F}_x(E, u)$ est que, pour toute v_i , l'image du produit $v_i f$ dans $A_x(E)/uA_x(E)$ soit nulle.

Démonstration du Lemme 2: par définition, $f \in \mathcal{O}_x(U)$ est dans $\mathfrak{F}_x(E, u)$ si et seulement si l'image de f dans $\tilde{A}_x(E)/u\tilde{A}_x(E)$ est nulle. Ceci entraîne que l'image de $v_i f$ dans $A_x(E)/uA_x(E)$ est nulle, puisque la multiplication par v_i envoie $\tilde{A}_x(E)$ dans $A_x(E)$. Réciproquement, supposons que, pour tout i , l'image de $v_i f$ dans $A_x(E)/uA_x(E)$ soit nulle; on a alors $v_i f = u g_i$, où g_i est un germe, au point x , de fonction holomorphe sur E ; en tout point de $E - S$ (assez voisin de x) il existe une v_i qui est $\neq 0$ en ce point, donc le quotient f/u se prolonge par continuité à $E - S$ au voisinage de x . C'est donc une fonction holomorphe sur la variété $E - S$ (au voisinage de x), et elle définit par suite une

section de $\tilde{A}(E)$ au voisinage de x , puisque on est dans le cas favorable. Ainsi, sur E , f est égale au produit par u d'une section de $\tilde{A}(E)$, autrement dit $f \in \mathfrak{F}_x(E, u)$.

C.Q.F.D.

Il est maintenant aisé de voir que, dans le cas favorable, le faisceau $\mathfrak{F}(E, u)$ est cohérent dans U . En effet, chaque v_i définit dans U un homomorphisme de faisceaux cohérents

$$v_i: \mathcal{O}(U) \rightarrow A(E)/uA(E),$$

et, d'après le Lemme 2, $\mathfrak{F}(E, u)$ n'est autre que l'intersection des noyaux de ces homomorphismes; c'est donc un faisceau cohérent.

Sans attendre d'avoir démontré le Théorème 2 dans le cas général, nous pouvons tout de suite prouver le résultat suivant:

Proposition 1. L'ensemble des points où le sous-ensemble analytique E est normal est un ouvert de E .

[Evidemment, ceci est une conséquence du Corollaire 1 du Théorème 1 ci-dessus; mais le Théorème 1 n'est pas encore démontré dans le cas général, tandis que nous sommes en mesure de prouver ici la Proposition 1.]

Démonstration: soit $a \in E$, et supposons E normal en a .

D'après le Théorème 2 de l'Exposé 10, l'ensemble S des points singuliers de E est de codimension ≥ 2 au voisinage de a . Au voisinage de a , nous sommes donc dans le cas favorable, et le Théorème 2 est démontré dans ce cas. Le Théorème 1 est donc aussi prouvé dans un voisinage de a ; dans un tel voisinage, le faisceau $\tilde{A}(E)$ est donc cohérent. Or on a $\tilde{A}_a(E) = A_a(E)$ par hypothèse; il s'ensuit que $\tilde{A}_x(E) = A_x(E)$ pour tout x assez voisin de a . Donc E est normal en tout point assez voisin de a .

C.Q.F.D.

§4. Retour à la normalisation.

Soit toujours E un ensemble analytique, irréductible en un point $a \in E$. Rappelons que E n'est pas nécessairement irréductible aux

points voisins de a . Soit E' le normalisé de germe E au point a (cf. Exposé 10, §1). E' est le germe, en un point a' , d'un ensemble analytique noté encore E' , muni d'un morphisme $p: E' \rightarrow E$ tel que $p(a') = a$. Puisque p applique le germe de E' en a' sur le germe de E en a , on peut supposer que $p(E') = E$ (on peut en effet réaliser cette condition en restreignant E et E' à des voisinages convenables de a et a'). Le morphisme p est une application propre; pour tout $x \in E$, la fibre $p^{-1}(x)$ est finie, et lorsque x appartient à un ouvert partout dense de E , la fibre $p^{-1}(x)$ se compose d'un seul point de E' . Puisque E' est normal au point a' par hypothèse, E' est normal en chacun de ses points assez voisin de a' (d'après la Proposition 1 ci-dessus). Donc, quitte à restreindre E' et E à des voisinages assez petits de a' et a , on peut supposer que E' est normal en tous ses points. Alors E' , E et p satisfont aux conditions de la proposition suivante:

Proposition 2. Soient E et E' deux ensembles analytiques, et $p: E' \rightarrow E$ un morphisme surjectif et propre. Supposons que E' soit normal en chacun de ses points, et de dimension constante; supposons de plus que la fibre $p^{-1}(x)$ d'un point $x \in E$ soit finie pour tout $x \in E$, et soit réduite à un point lorsque x appartient à un ouvert partout dense de E . Soient alors, pour tout $x \in E$, x'_1 les points de la fibre $p^{-1}(x)$; les images, par p , des germes $E'_{x'_1}$, sont les composantes irréductibles E^i_x du germe E_x de E au point x , et l'application $p: E'_{x'_1} \rightarrow E^i_x$ identifie $E'_{x'_1}$ au normalisé du germe E^i_x .

Démonstration: puisque la fibre de x est finie, on sait (Exposé 8, Corollaire 2 du Théorème 4) que l'image $p(E'_{x'_1})$ est un germe d'ensemble irréductible au point x , de même dimension que E' au point x'_1 . Si $x'_1 \neq x'_j$, on n'a pas $p(E'_{x'_1}) \subset p(E'_{x'_j})$ (inclusion au sens des germes), sinon les deux germes irréductibles $p(E'_{x'_1})$ et $p(E'_{x'_j})$, qui ont même dimension, seraient identiques, et alors l'image réciproque d'un point de E ne serait pas "en général" réduite à un point. Comme par ailleurs le

germe E_x est la réunion des $p(E'_{x_i})$, ceux-ci sont bien les composantes irréductibles de E_x . De plus l'application $p: E'_{x_i} \rightarrow E_x^i$ satisfait aux conditions de la Proposition 1 de l'Exposé 10; elle identifie donc E'_{x_i} au normalisé de E_x^i .

C.Q.F.D.

Proposition 3. Soient $p_1: E'_1 \rightarrow E$ et $p_2: E'_2 \rightarrow E$ deux données satisfaisant aux conditions de la Proposition 2. Alors il existe un isomorphisme $f: E'_1 \rightarrow E'_2$ et un seul, qui rende commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E'_1 & \xrightarrow{f} & E'_2 \\ p_1 \searrow & & \swarrow p_2 \\ & E & \end{array}$$

Démonstration: soit $x' \in E'_1$; d'après la Proposition 2, l'image par p_1 du germe de E'_1 en x' est une composante irréductible E_x^i de E au point $x = p_1(x')$. Toujours d'après la Proposition 2, il existe un unique $y' \in E'_2$ tel que l'image par p_2 du germe de E'_2 en y' soit E_x^i . On doit avoir $f(x') = y'$, ce qui prouve l'unicité de f . En fait, si à chaque $x' \in E'_1$ on associe $y' \in E'_2$ comme ci-dessus, on définit une application $f: E'_1 \rightarrow E'_2$ telle que $p_1 = p_2 \circ f$; il existe dans E'_1 et E'_2 deux ouverts partout denses tels que f soit un isomorphisme de l'un sur l'autre, et ceci entraîne, grâce à la normalité, que f est un isomorphisme de E'_1 sur E'_2 .

Définition: étant donné un ensemble analytique E , de même dimension en chacun de ses points, on appelle normalisation de E un espace analytique normal E' , muni d'un morphisme $p: E' \rightarrow E$ satisfaisant aux conditions de la Proposition 2. En vertu de la Proposition 3, la normalisation de E (si elle existe) est unique "à un isomorphisme près" (isomorphisme qui est unique).

Proposition 4. Tout ensemble analytique E , purement dimensionnel, possède une normalisation E' (muni d'un morphisme $p: E' \rightarrow E$).

Démonstration: pour tout point $a \in E$ en lequel E est irréductible, il existe un ouvert $U \subset E$ contenant a , qui possède une normalisation: on considère le germe normalisé du germe E_a de E au point a , et on raisonne comme ci-dessus. Soit maintenant $a \in E$ un point en lequel E n'est pas irréductible; il existe alors, dans un ouvert convenable $U \subset E$ contenant a , un nombre fini d'ensembles analytiques E^i dont les germes en a sont les composantes irréductibles E_a^i du germe E_a de E en a . Si U est assez petit, on a $\bigcup_i E^i = E \cap U$, et chaque E^i possède un normalisé E'^i , muni d'un morphisme $p^i: E'^i \rightarrow E^i$. Soit E' la somme disjointe des E'^i , munie du morphisme $p: E' \rightarrow E \cap U$ défini par les p^i . Il est immédiat que p satisfait aux conditions de la Proposition 2, donc E' (muni de p) est une normalisation de $E \cap U$.

Recouvrons alors E avec des ouverts U_α formant un recouvrement localement fini de E , chaque U_α ayant une normalisation $p_\alpha: E'_\alpha \rightarrow U_\alpha$. D'après la Proposition 3, les (E'_α, p_α) se recollent d'une seule manière en un espace normal E' muni d'un morphisme $p: E' \rightarrow E$ qui satisfait aux conditions de la normalisation. Ceci prouve la Proposition 4.

Remarque 1. Soit $p: E' \rightarrow E$ une normalisation de E . Si S désigne le sous-ensemble analytique des points singuliers de E , p induit un isomorphisme de la variété $E' - p^{-1}(S)$ sur la variété $E - S$, et $E' - p^{-1}(S)$ est un ouvert partout dense de E' . De plus, pour tout ouvert $V \subset E$, on a un isomorphisme naturel

$$\Gamma(V, \tilde{A}(E)) = \Gamma(p^{-1}(V), A(E')) ,$$

où $A(E')$ désigne le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur E' . [En effet, on a déjà vu que $\Gamma(V, \tilde{A}(E))$ s'identifie à l'anneau des fonctions holomorphes sur $E - S$ qui sont bornées au voisinage de chaque point de S ; cet anneau s'identifie à l'anneau des fonctions holomorphes sur $E' - p^{-1}(S)$ qui sont bornées au voisinage de tout point de $p^{-1}(S)$, et de telles fonctions se prolongent en fonctions holomorphes sur E' parce que E' est normal.]

Remarque 2. Soit $p: E' \rightarrow E$ une normalisation de E . Les points de E' sont en correspondance biunivoque avec les composantes irréductibles des germes de E en ses différents points. Exercice: la topologie de E' peut être définie comme suit: un sous-ensemble $U' \subset E'$ est ouvert si et seulement s'il existe un ouvert $U \subset E$ tel que U' se compose de toutes les composantes irréductibles des germes de E aux points de U .

§5. Démonstration du Théorème 2 dans le cas général.

Soit toujours $p: E' \rightarrow E$ la normalisation de E , et soit toujours $a \in E$ un point en lequel E est irréductible. Soit $a' = p^{-1}(a)$. Dans un voisinage convenable de a' , E' se réalise comme sous-ensemble analytique d'un ouvert $U' \subset \mathbb{C}^{n'}$, tandis que E est un sous-ensemble analytique dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$. Quitte à rapetisser U' et U , le morphisme $p: E' \rightarrow E$ provient (par définition d'un morphisme) d'une application holomorphe $\varphi: U' \rightarrow U$. Soit à nouveau u une fonction holomorphe dans U comme aux §§2 et 3; il s'agit de prouver que le faisceau $\mathfrak{F}(E, u)$ est cohérent dans U (c'est le Théorème 2 dans le cas général). Soit $u' = u \circ \varphi$, qui est holomorphe dans U' . On sait déjà que le faisceau $\mathfrak{F}(E', u')$ est cohérent, puisque le Théorème 2 est démontré dans le cas favorable. De plus $\mathfrak{F}(E', u')$ n'est autre que le noyau de $\mathcal{O}(U') \rightarrow A(E')/uA(E')$, puisque $\tilde{A}(E') = A(E')$.

Voyons de plus près quelle est la relation entre les faisceaux $\mathfrak{F}(E, u)$ et $\mathfrak{F}(E', u')$.

Lemme 3. Soit V un ouvert contenu dans U , et soit $V' = \varphi^{-1}(V)$; pour que $f \in \Gamma(V, \mathfrak{F}(E, u))$, il faut et il suffit que $f \circ \varphi \in \Gamma(V', \mathfrak{F}(E', u'))$.

Démonstration: notons toujours S l'ensemble des points singuliers de E . Dire que $f \in \Gamma(V, \mathfrak{F}(E, u))$, c'est dire que f est holomorphe dans V et que la restriction de f à $(E-S) \cap V$ s'écrit comme un produit ug , où g est holomorphe sur la variété $(E-S) \cap V$ et est bornée au voisi-

nage de tout point de $E \cap V$. D'après la remarque 1 de la fin du §4, il revient au même de dire que la restriction de $f \circ \varphi$ à $(E' - p^{-1}(S)) \cap V'$ s'écrit comme un produit $u'g'$, où g' est holomorphe sur la variété $(E' - p^{-1}(S)) \cap V'$ et est bornée au voisinage de tout point de $E' \cap V'$; une telle g' est la restriction d'un unique élément de $\Gamma(V', A(E'))$, puisque E' est un espace normal en chacun de ses points. La condition est donc que la restriction de $f \circ \varphi$ à $E' \cap V'$ s'écrive comme un produit $u'g'$, où $g' \in \Gamma(V', A(E'))$. Ceci prouve le Lemme 3.

Nous sommes donc dans la situation suivante: on a deux variétés analytiques complexes X et Y (à savoir U' et U), une application analytique $\varphi: X \rightarrow Y$, un faisceau d'idéaux $\mathfrak{I}$ sur X (à savoir $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}(E', u')$), un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ sur Y (à savoir $\mathcal{I} = \mathfrak{I}(E, u)$), et ces faisceaux sont reliés comme suit: pour tout ouvert $V \subset Y$, l'ensemble $\Gamma(V, \mathcal{I})$ des sections de $\mathcal{I}$ se compose des fonctions holomorphes dans V telles que $f \circ \varphi$ soit dans $\Gamma(\varphi^{-1}(V), \mathfrak{I})$. On voit que la donnée de $\mathfrak{I}$ détermine le faisceau $\mathcal{I}$, que nous appellerons l'image directe (ou simplement l'image) du faisceau $\mathfrak{I}$ par l'application φ . Nous écrirons $\mathcal{I} = \varphi(\mathfrak{I})$.

De plus, dans le cas qui nous intéresse ici, la condition suivante est vérifiée:

(H) le faisceau $\mathfrak{I}$ est cohérent, et si Σ désigne le support de $\mathcal{O}(X)/\mathfrak{I}$ (support qui est un sous-ensemble analytique fermé de X), la restriction de φ à Σ est une application propre $\Sigma \rightarrow Y$. En outre, pour tout $y \in Y$, la fibre $\varphi^{-1}(y)$ ne rencontre Σ qu'en un nombre fini de points.

(Que la condition (H) soit remplie dans le cas qui nous intéresse ici, résulte du fait que Σ est contenu dans le sous-ensemble analytique E' , normalisé de E .)

On observera que le support de $\mathcal{O}(Y)/\mathcal{I}$ a pour adhérence l'image $\varphi(\Sigma)$; mais comme φ est propre, $\varphi(\Sigma)$ est fermée, donc $\varphi(\Sigma)$ est le support du faisceau image $\mathcal{I} = \varphi(\mathfrak{I})$.

On se propose de prouver le:

Théorème 3. Dans la situation précédente, et sous la condition (H), l'image directe $\mathcal{J} = \varphi(\mathcal{I})$ est un faisceau cohérent d'idéaux.

Il est clair que ce Théorème 3 entraînera le Théorème 2 dans le cas général; en effet, $\mathcal{I} = \mathfrak{I}(E', u')$ est cohérent (cas favorable), et le Théorème 3 permet donc de conclure que $\mathcal{J} = \mathfrak{I}(E, u)$ est cohérent.

§6. Démonstration du Théorème 3.

Nous commencerons par trois remarques préliminaires.

Remarque (i): le Théorème 3 vrai dans le cas où $\varphi: X \rightarrow Y$ est un plongement. En effet, dans ce cas on peut identifier la variété X à une sous-variété de Y , φ étant l'inclusion; si $\mathcal{I}$ est un faisceau cohérent sur X , la condition (H) est vérifiée; le faisceau $\mathcal{J}$ sur Y , image de $\mathcal{I}$ par l'inclusion $i: X \rightarrow Y$, est le suivant: les sections de $\mathcal{J}$ sur un ouvert $V \cap Y$ sont les fonctions holomorphes dans V dont la restriction à $V \cap X$ appartient à $\mathcal{I}_X$ pour tout $x \in V \cap X$. Le quotient $\mathcal{O}(Y)/\mathcal{J}$ induit donc $\mathcal{O}(X)/\mathcal{I}$ sur X , et 0 en dehors de X . Il est donc cohérent, et par suite $\mathcal{J}$ est cohérent.

Remarque (ii): on va voir qu'il suffit de prouver le Théorème 3 dans le cas particulier où X est une variété-produit $Z \times Y$ et où φ est la projection $p: Z \times Y \rightarrow Y$. En effet, dans le cas général, $\varphi: X \rightarrow Y$ est composée du plongement

$$i: X \rightarrow X \times Y \text{ défini par } i(x) = (x, \varphi(x))$$

et de la projection $p: X \times Y \rightarrow Y$ définie par $p(x, y) = y$. D'après la remarque (i), le faisceau $\mathcal{I}'$ sur $X \times Y$, image de $\mathcal{I}$ par i , est cohérent. Il est clair que $\mathcal{J} = \varphi(\mathcal{I})$ est l'image de $\mathcal{I}'$ par p ; de plus p et $\mathcal{I}'$ satisfont à la condition (H); la vérification, immédiate, est laissée au lecteur. Ceci justifie la remarque (ii).

Remarque (iii): il suffit aussi de prouver le Théorème 3 dans le cas où X et Y sont des polydisques arbitrairement petits, de centres

respectifs x^0 et y^0 , et où la fibre $\varphi^{-1}(y^0)$ ne rencontre le support Σ de $\mathcal{O}(X)/\mathfrak{I}$ qu'au seul point x^0 .

En effet, tout revient à prouver que le faisceau image $\mathcal{I}$ est cohérent dans un voisinage arbitrairement petit d'un point arbitraire $y^0 \in Y$; on peut donc supposer que Y est un polydisque arbitrairement petit de centre y^0 . En vertu de (H), $\varphi^{-1}(y^0)$ ne rencontre Σ qu'en un nombre fini de points x^k ; soient U^k des polydisques ouverts (dans X), deux à deux disjoints, tels que $x^k \in U^k$. Pour y assez voisin de y^0 , $\varphi^{-1}(y) \cap \Sigma$ est contenu dans la réunion des U^k , parce que la restriction de φ à Σ est propre, par hypothèse. Soit φ^k la restriction de φ à U^k ; on peut choisir les U^k assez petits pour que φ^k applique U^k dans le polydisque Y . Soit $\mathfrak{I}^k$ la restriction du faisceau $\mathfrak{I}$ à U^k . Alors φ^k et $\mathfrak{I}^k$ satisfont à (H). Si on sait prouver que l'image directe $\varphi^k(\mathfrak{I}^k)$ est un faisceau cohérent au voisinage de y^0 , il s'ensuivra que $\varphi(\mathfrak{I})$, qui est l'intersection des $\varphi^k(\mathfrak{I}^k)$, est cohérent. Ceci justifie la remarque (iii).

On peut maintenant combiner les remarques (ii) et (iii). On est ainsi ramené au cas où $X = Z \times Y$, produit de deux polydisques, φ étant la projection $p: Z \times Y \rightarrow Y$; il s'agit de montrer que si $\mathfrak{I}$ est un faisceau cohérent d'idéaux sur $Z \times Y$, satisfaisant à (H) vis-à-vis de p , et si de plus $y^0 \in Y$ est tel que $\varphi^{-1}(y^0)$ coupe le support Σ de $\mathcal{O}(Z \times Y)/\mathfrak{I}$ en un seul point (z^0, y^0) , alors l'image $p(\mathfrak{I})$ est un faisceau cohérent d'idéaux au voisinage du point y^0 . C'est ce qu'on va prouver maintenant.

Soit n la dimension de Z . Il suffit de faire la démonstration pour $n = 1$. En effet, pour n quelconque, le théorème se prouvera par récurrence sur n , comme suit: soit $Z = Z_{n-1} \times Z_1$, où Z_{n-1} est un polydisque de dimension $n-1$, et Z_1 un disque de dimension 1; p se factorise en deux projections

$$Z_{n-1} \times Z_1 \times Y \xrightarrow{p'} Z_1 \times Y \xrightarrow{p''} Y;$$

puisque $\mathfrak{I}$ et $p = p'' \circ p'$ satisfont à (H), il est immédiat que $\mathfrak{I}$ et p'

satisfont à (H); par l'hypothèse de récurrence, $p'(\mathfrak{I})$ est cohérent, et il est immédiat que $p'(\mathfrak{I})$ et p'' satisfont à (H); le théorème étant vrai pour $n = 1$, il s'ensuit que $p''(p'(\mathfrak{I})) = p(\mathfrak{I})$ est cohérent.

C.Q.F.D.

Nous sommes finalement réduits à prouver le résultat pour $n = 1$, c'est-à-dire à examiner la situation suivante: Z est un disque de centre 0 dans le plan d'une variable complexe z ; Y est un polydisque de centre 0 dans $\mathbb{C}^p$; on a, dans $Z \times Y$, un système fini de fonctions holomorphes f_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) nulles à l'origine (qui engendrent un faisceau cohérent d'idéaux $\mathfrak{I}$); on suppose que $\varphi^{-1}(0) = Z \times \{0\}$ ne rencontre le support de $\mathcal{O}(Z \times Y)/\mathfrak{I}$ qu'à l'origine, ce qui signifie que le système d'équations $f_k(z, 0) = 0$ n'a pas d'autre solution que $z = 0$. Alors le faisceau $\mathcal{J}$, image directe de $\mathfrak{I}$ par la projection $(z, y) \rightarrow y$, s'explique comme suit: en chaque point y^0 voisin de 0, l'idéal $\mathcal{J}_{y^0}$ se compose des germes $g(y)$ holomorphes en y^0 tels que, pour tout point (z, y^0) satisfaisant à $|z| \leq r$ (r donné, assez petit), g (considérée comme fonction de z et y , indépendante de z) appartienne à l'idéal engendré par les f_k au point (z, y^0) . Et il s'agit de montrer que les $\mathcal{J}_y$ forment un faisceau cohérent d'idéaux au voisinage de l'origine dans Y . On va le démontrer, en suivant OKA (loc. cit.).

On peut supposer par exemple $f_0(z, 0)$ non identiquement nulle en z . Par le théorème de préparation, on peut (quitte à rapetisser Z et Y) remplacer $f_0(z, y)$ par un polynôme distingué en z , à coefficients holomorphes dans Y (soit h son degré), et on peut remplacer $f_1, f_2, \dots$ par des polynômes en z , de degré $\leq h-1$, à coefficients holomorphes dans Y . Pour chaque point $y^0 \in Y$, soit $\mathfrak{P}_{y^0}$ l'ensemble des polynômes en z , de degré $\leq 2h-2$, dont les coefficients sont des germes de fonctions holomorphes sur Y au point y^0 , et qui jouissent de la propriété que, pour tout point (z, y^0) tel que $|z| \leq r$, le polynôme en question appartient à l'idéal engendré par les f_k . Il est clair que $\mathfrak{P}_{y^0}$ est un module sur l'anneau $\mathcal{O}(Y)_{y^0}$, qui est noethérien; c'est donc un module de type fini.

La collection des $\mathcal{L}_y$ définit un faisceau $\mathcal{L}$ de $\mathcal{O}(Y)$ -modules sur Y , et le faisceau-image $\mathcal{F}$ que nous voulons étudier n'est autre que le sous-faisceau de $\mathcal{L}$ formé des polynômes de degré zéro qui sont dans $\mathcal{L}$.

A tout polynôme en z , de degré $\leq 2h-2$, associons le système des coefficients de $z, z^2, \dots, z^{2h-2}$; on définit ainsi un homomorphisme de faisceaux

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}(Y)^{2h-2},$$

dont le noyau est $\mathcal{F}$. Si on montre que le faisceau $\mathcal{L}$ est cohérent, il s'ensuivra que $\mathcal{F}$ est cohérent.

Montrons donc que le faisceau $\mathcal{L}$, sur Y , est cohérent au voisinage de l'origine. Considérons les polynômes suivants en z ;

$$\begin{cases} z^r f_0 & \text{pour } 0 \leq r \leq h-2, \\ z^r f_k & \text{pour } 0 \leq r \leq h-1 \text{ et } k \geq 1. \end{cases}$$

Montrons que, en tout point $y \in Y$ assez voisin de 0 , ces polynômes engendrent le $\mathcal{O}(Y)_y$ -module $\mathcal{L}_y$, ce qui achèvera la démonstration. Supposons y^0 assez voisin de 0 pour que les h racines du polynôme $f_0(z, y^0)$ soient dans $|z| \leq r$. On va utiliser le résultat suivant (cf. Sémin. 1951-52, Exposé 10, Prop. 5): toute fonction holomorphe dans $Z \times Y$ au voisinage du produit P du disque $|z| \leq r$ par le point y^0 s'écrit d'une seule manière sous la forme

$$Af_0 + B,$$

où A et B sont holomorphes au voisinage de P , et B est un polynôme en z de degré $\leq h-1$. Soit alors g un polynôme en z , de degré $\leq 2h-2$, à coefficients dans $\mathcal{O}(Y)_{y^0}$; si $g \in \mathcal{L}_{y^0}$, on a, au voisinage de P ,

$$(1) \quad g = u_0 f_0 + \sum_{k \geq 1} u_k f_k,$$

où les u_i ($i = 0, 1, \dots$) sont holomorphes au voisinage de P (on utilise ici un résultat établi dans le Séminaire 1951-52, Exposé 18, Corollaire 3, à savoir que si une g holomorphe au voisinage d'un polydisque compact appartient, en chaque point du polydisque à l'idéal engendré par les f_k ,

alors g est combinaison linéaire des f_k à coefficients holomorphes au voisinage du polydisque). D'après ce qu'on vient de rappeler d'autre part, on a, pour $k \geq 1$:

$$u_k = A_k f_0 + B_k \quad (B_k: \text{polynôme en } z \text{ de degré } \leq h-1),$$

donc on peut supposer que les u_k (pour $k \geq 1$) sont des polynômes en z de degré $\leq h-1$. S'il en est ainsi, la relation (1) montre que $u_0 f_0$ est un polynôme en z de degré $\leq 2h-2$, donc u_0 est un polynôme de degré $\leq h-2$. Alors la relation (1) exprime que le polynôme g est combinaison linéaire, à coefficients dans $\mathcal{O}(Y)_0$, des polynômes $z^r f_0$ ($0 \leq r \leq h-2$) et $z^r f_k$ ($0 \leq r \leq h-1, k \geq 1$). Ceci achève enfin la démonstration.

Ainsi le Théorème 3 est démontré, et du même coup les théorèmes 1 et 2 sont établis dans le cas le plus général.

BIBLIOGRAPHIE

On a suivi, dans cet exposé, la méthode due à OKA (même référence qu'à la fin de l'Exposé 9).