

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

H. CARTAN

Étude des germes de sous-variétés analytiques

Séminaire Henri Cartan, tome 4 (1951-1952), exp. n° 14, p. 1-18

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1951-1952__4__A14_0

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1951-1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ETUDE DES GERMES DE
SOUS-VARIÉTÉS ANALYTIQUES
(Exposé de H. Cartan, 21-4-52)

1. Le "Nullstellensatz."

Plaçons-nous à l'origine dans l'espace $\mathbb{C}^n$ (coordonnées complexes $x_1, \dots, x_n$). Soit V un germe de sous-variété analytique à l'origine; d'après le th. 2 de 12, V est irréductible si et seulement si l'idéal $\mathfrak{I}(V)$ des fonctions (holomorphes à l'origine) qui s'annulent sur V est premier. On va voir maintenant que tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de l'anneau $\mathcal{H}(x_1, \dots, x_n)$ est l'idéal associé à un germe de variété irréductible (nécessairement unique d'après l'assertion 2), page 3 de 12.

Théorème 1. Soit $V(\mathfrak{p})$ le germe de sous-variété associé à un idéal première $\mathfrak{p}$ de l'anneau $\mathcal{H}(x_1, \dots, x_n)$ (c'est-à-dire l'ensemble des zéros communs aux fonctions de $\mathfrak{p}$). Alors tout élément de $\mathcal{H}(x_1, \dots, x_n)$ qui s'annule sur $V(\mathfrak{p})$ appartient à $\mathfrak{p}$.

(Il en résulte que l'idéal associé à $V(\mathfrak{p})$ est $\mathfrak{p}$.)

Démonstration: désignons par B l'anneau $\mathcal{H}(x_1, \dots, x_n)$, et par A l'anneau quotient $B/\mathfrak{p}$, qui est un anneau d'intégrité. On va définir sur A une structure d'anneau analytique (13, déf. 5): ε se définit d'une manière évidente, puisque, dans B , ε est nul sur les éléments de $\mathfrak{p}$ (on écarte le cas trivial où $\mathfrak{p} = B$). Soient de plus des éléments $b_1, \dots, b_k$ de B , et h une fonction de k arguments, holomorphe au point $\varepsilon(b_1), \dots, \varepsilon(b_k)$; la classe modulo $\mathfrak{p}$ de l'élément $h(b_1, \dots, b_k) \in B$ ne change pas si on remplace les b_i par des b'_i respectivement congrus modulo $\mathfrak{p}$. En effet, c'est vrai si h est un polynôme, et toute fonction h est limite uniforme (dans un voisinage du point $(\varepsilon(b_i))$) de polynômes; l'assertion résulte alors du fait que l'idéal $\mathfrak{p}$ est fermé pour la convergence uniforme dans un voisinage fixe de l'origine (cf. 11, th.5). Ainsi l'on sait, dans l'anneau A , définir $h(a_1, \dots, a_k)$ lorsque

h est une fonction holomorphe au voisinage du point $\varepsilon(a_1), \dots, \varepsilon(a_k)$. Il est immédiat que les conditions (I) de l'exposé 13 (p. 6) sont vérifiées. On a donc bien défini sur A une structure d'anneau analytique.

Cet anneau analytique satisfait aux hypothèses du théorème 3 de 13. En effet, soit V le sous-espace vectoriel de A engendré par les images, dans A , des éléments $x_1, \dots, x_n$ de l'anneau $\mathcal{H}(x_1, \dots, x_n) = B$; le sous-anneau analytique $[V]$ engendré par V est évidemment A tout entier.

Soit $\bar{A}$ la clôture intégrale de A . D'après le th. 3 de 13, la structure analytique de A se prolonge d'une seule manière à $\bar{A}$, et l'anneau analytique $\bar{A}$ est isomorphe à l'anneau $\mathcal{G}$ des fonctions holomorphes sur un germe G d'espace analytique; G est unique à une isomorphie près. On va étudier les rapports existant entre ce germe G et le germe de sous-variété $V(\mathfrak{p})$ défini par l'idéal $\mathfrak{p}$.

Il existe une application analytique f de G dans $\mathbb{C}^n$, et une seule, telle que, pour tout élément $g \in \mathcal{H}(x_1, \dots, x_n)$ (g est donc une application $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$), la composée $g \circ f: G \rightarrow \mathbb{C}$ soit la fonction, sur le germe G , qui est canoniquement associée à l'élément de A , image de g par l'homomorphisme $B \rightarrow A$. La démonstration est évidente: on trouve les n composantes de f en considérant, sur G , les fonctions associées aux classes, dans A , des fonctions $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}(x_1, \dots, x_n)$; ceci détermine f , et le fait que cette application f satisfait aux conditions voulues résulte du fait que l'isomorphisme de A sur l'anneau $\mathcal{G}$ des fonctions holomorphes sur G , respecte les relations analytiques.

Pour que la fonction $g \in \mathcal{H}(x_1, \dots, x_n)$ appartienne à l'idéal $\mathfrak{p}$, il faut et il suffit qu'elle s'annule sur l'image $f(G)$. En effet, cette dernière condition exprime que $g \circ f = 0$, c'est-à-dire que l'image de g dans $A = B/\mathfrak{p}$ est nulle.

Ce résultat fondamental entraîne d'abord que $f(G) \subset V(\mathfrak{p})$ (il s'agit d'inclusion dans le sens des germes. On verra plus loin que, en fait, $f(G)$ est identique à $V(\mathfrak{p})$; pour le moment, il nous suffit de con-

clure: si g s'annule sur $V(\mathfrak{p})$, a fortiori g s'annule sur $f(G)$, c'est-à-dire appartient à $\mathfrak{p}$. Ceci achève la démonstration du théorème.

Du théorème 1 on déduit un "Nullstellensatz" tout à fait pareil à celui de Hilbert pour les anneaux de polynômes:

Théorème 2 (Nullstellensatz). Soit $\mathfrak{f}$ un idéal de $K(x_1, \dots, x_n)$. Il existe un entier ρ jouissant de la propriété suivante: si une $g \in K(x_1, \dots, x_n)$ s'annule sur la variété $V(\mathfrak{f})$, alors g^ρ appartient à $\mathfrak{f}$.

La démonstration est classique: $\mathfrak{f}$ est intersection d'une famille finie d'idéaux primaires $\mathfrak{f}_\alpha$, puisque $K(x_1, \dots, x_n)$ est un anneau noethérien (11, th. 2). Soit $\mathfrak{p}_\alpha$ l'idéal premier associé à l'idéal primaire $\mathfrak{f}_\alpha$; soit ρ_α un entier tel que $g \in \mathfrak{p}_\alpha$ entraîne $g^{\rho_\alpha} \in \mathfrak{f}_\alpha$. Désignons par ρ le plus grand des ρ_α . Si g s'annule sur $V(\mathfrak{f})$, qui est l'intersection des $V(\mathfrak{f}_\alpha) = V(\mathfrak{p}_\alpha)$, g s'annule sur $V(\mathfrak{p}_\alpha)$, donc (th. 1) $g \in \mathfrak{p}_\alpha$, donc $g^\rho \in \mathfrak{f}_\alpha$, et par suite $g^\rho \in \mathfrak{f}$.

2. Extension aux idéaux d'un anneau de fonctions holomorphes sur un germe d'espace analytique.

Soit, au lieu de l'anneau $K(x_1, \dots, x_n)$, l'anneau A des fonctions holomorphes sur un germe l'espace analytique. D'après 13 (cor. du th. 3, p. 15), A est intégralement clos, et isomorphe à un quotient d'un anneau $K(x_1, \dots, x_n)$ par un idéal premier $\mathfrak{q}$ de cet anneau. Les idéaux de A ont donc la forme $\mathfrak{f}/\mathfrak{q}$, où $\mathfrak{f}$ est un idéal de $K(x_1, \dots, x_n)$ contenant $\mathfrak{q}$; pour que $\mathfrak{f}/\mathfrak{q}$ soit premier, il faut et il suffit que $\mathfrak{f}$ soit premier.

Appliquons à l'idéal premier $\mathfrak{q}$ les résultats du n° 1. On trouve une application analytique f du germe G dans l'espace $\mathbb{C}^n$, telle que les fonctions holomorphes sur le germe G soient de la forme $g \circ f$, où $g: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ est un élément de $K(x_1, \dots, x_n)$. Les zéros communs aux éléments de $\mathfrak{f}/\mathfrak{q}$ constituent un germe dans G , qui n'est autre que l'image réciproque f^{-1} du germe de variété $V(\mathfrak{f})$ dans $\mathbb{C}^n$. Pour que

$g \circ f$ s'annule sur le germe de $\mathfrak{f}/\mathfrak{q}$ dans G , il faut et il suffit que g s'annule sur $V(\mathfrak{f})$ dans $\mathbb{C}^n$.

De là il suit que les théorèmes 1 et 2 s'étendent aux idéaux de l'anneau A et aux germes de sous-variétés du germe G .

3. Un lemme sur les idéaux premiers de $K(x_1, \dots, x_n)$.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $K(x_1, \dots, x_n)$. Pour définir le germe $V(\mathfrak{p})$, on procède comme suit: soit S un système fini de générateurs de l'idéal $\mathfrak{p}$. Les éléments g_k de S sont des fonctions holomorphes dans tout un voisinage de l'origine; l'ensemble V des zéros communs à ces fonctions est une sous-variété analytique dans un voisinage de l'origine; $V(\mathfrak{p})$ est alors la classe de V dans la relation d'équivalence (entre parties de $\mathbb{C}^n$) définie par le filtre des voisinages de l'origine. De plus, en chaque point a assez voisin de l'origine 0 , les fonctions de S engendrent un idéal dans l'anneau des fonctions holomorphes au point a ; nous désignerons cet idéal par S_a . Ainsi, $S_0 = \mathfrak{p}$.

Nous utiliserons une proposition, qui sera démontrée seulement dans l'exposé 15 (qui est logiquement indépendant de celui-ci):

Proposition. Si une fonction g , holomorphe au voisinage de l'origine 0 , n'appartient pas à l'idéal premier $\mathfrak{p}$ au point 0 , chaque point a suffisamment voisin de 0 jouit de la propriété suivante: si h est holomorphe au point a , et si hg appartient à l'idéal S_a , alors h appartient à S_a .

Ceci étant admis, on va démontrer le:

Lemme 1. Si une fonction g , holomorphe au voisinage de 0 , n'appartient pas à l'idéal premier $\mathfrak{p}$ à l'origine 0 , l'ensemble des points de V où g est $\neq 0$ est dense dans V , tout au moins dans un voisinage assez petit de l'origine.

On veut montrer que si a est un point de V assez voisin de 0 , et si g est identiquement nulle sur V au voisinage de a , alors g appartient à $\mathfrak{p}$. Or, d'après le th. 2, il existe un entier ρ tel que $g^\rho \in S_a$. Raisonnons par l'absurde: si g n'appartenait pas à $\mathfrak{p}$, on aurait, en appliquant à la fonction $h = g^{\rho-1}$ la proposition ci-dessus, $g^{\rho-1} \in S_a$; par

réurrence, il vient finalement $1 \in S_a$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $a \in V$.

4. Description du germe de sous-variété $V(p)$.

Reprenons l'étude faite au n° 1. A l'anneau $A = K(x_1, \dots, x_n)/p$, on a associé un germe G d'espace analytique et une application analytique f de G dans C^n ; et on a montré que $f(G) \subset V(p)$. On va maintenant prouver que $f(G) = V(p)$; il faut bien préciser ce que cela signifie: G est défini par un espace analytique E et un point privilégié c de cet espace, f est définie dans un voisinage de c , et il s'agit de montrer que l'image de f couvre tous les points de V suffisamment voisins de l'origine.

Reportons-nous à la démonstration du th. 3 de 13. On voit qu'on peut faire sur les variables $x_1, \dots, x_n$ une substitution linéaire de manière à réaliser les conditions suivantes: en notant ξ_i l'image de $x_i \in K(x_1, \dots, x_n)$ dans $A = K(x_1, \dots, x_n)/p$, les éléments $\xi_1, \dots, \xi_p$ constituent la base d'un sous-espace vectoriel de A , qui est à la fois générateur et analytiquement libre, et un autre l'adjonction de ξ_{p+1} au corps des fractions de $K(\xi_1, \dots, \xi_p) \approx K(x_1, \dots, x_p)$ donne le corps des fractions de A . Soit $P(\xi_{p+1}; \xi_1, \dots, \xi_p)$ le polynôme minimal de ξ_{p+1} ; alors l'équation

$$(1) \quad P(x_{p+1}; x_1, \dots, x_p) = 0$$

définit le germe G (qui n'est autre que l'espace des paramètres de la variété principale définie par (1) dans l'espace $(x_1, \dots, x_{p+1})$). Avec ces notations, si y est un point de G , c'est-à-dire une composante irréductible de la variété (1) en l'un de ses points voisins de l'origine, $f(y) \in C^n$ a pour coordonnées les coordonnées $x_1, \dots, x_p, x_{p+1}$ de ce point, et les valeurs en ce point des fonctions $\xi_{p+2}, \dots, \xi_n$ sur le germe défini par (1). On sait (13, prop. 2 page 11) qu'il existe des polynômes $Q_i(x_{p+1})$, à coefficients holomorphes en $x_1, \dots, x_p$, tels que

$$(2) \quad P'(x_{p+1}) \xi_i = Q_i(x_{p+1}) \quad (p+2 \leq i \leq n) \text{ en tout point de } G.$$

Le polynôme $P(x_{p+1}; x_1, \dots, x_p)$ appartient à l'idéal $\mathfrak{p}$, et sa dérivée P' ne lui appartient pas (puisque en général les racines de P sont distinctes, P étant irréductible). En vertu du lemme (n° 3), l'ensemble des points de $V(\mathfrak{p})$ où $P' \neq 0$ est dense dans $V(\mathfrak{p})$, tout au moins dans un voisinage convenable de l'origine. Ainsi, dans un voisinage de l'origine, $V(\mathfrak{p})$ est l'adhérence de l'ensemble des points de $V(\mathfrak{p})$ où $P'(x_{p+1}; x_1, \dots, x_p) \neq 0$. On va montrer que ces points de $V(\mathfrak{p})$ appartiennent à l'image $f(g)$; de là résultera que si U est un voisinage compact du point privilégié de G , $f(U)$, qui est un sous-ensemble fermé de $V(\mathfrak{p})$, et dense au voisinage de 0 dans $V(\mathfrak{p})$, contient tout un voisinage de 0 dans $V(\mathfrak{p})$; ce qu'on voulait démontrer.

Il reste donc seulement à prouver que tout point de $V(\mathfrak{p})$, voisin de 0, et tel que $P'(x_{p+1}; x_1, \dots, x_p) \neq 0$, est l'image par f d'un point de G , voisin de son point privilégié. Or il existe un point de G , et un seul, ayant les coordonnées $x_1, \dots, x_p, x_{p+1}$; en ce point, ξ_i ($p+2 \leq i \leq n$) a pour valeur $Q_i(x_{p+1})/P'(x_{p+1})$; d'autre part, le point considéré de $V(\mathfrak{p})$ possède les mêmes coordonnées $x_1, \dots, x_{p+1}$, et ses coordonnées x_i (pour $i \geq p+2$) annulent $P'(x_{p+1})x_i - Q_i(x_{p+1})$, puisque ces fonctions appartiennent à l'idéal $\mathfrak{p}$. Il en résulte que le point de $V(\mathfrak{p})$ est bien l'image par f du point y de G . Ceci achève la démonstration.

Résumons les résultats obtenus:

Théorème 3. Soit, dans l'espace $(x_1, \dots, x_n)$, une sous-variété analytique V au voisinage de l'origine, passant par l'origine, et irréductible en ce point. On peut faire une substitution linéaire sur les coordonnées $x_1, \dots, x_n$, trouver un polynôme $P(x_{p+1}; x_1, \dots, x_p)$ distingué et irréductible, et des polynômes $Q_i(x_{p+1}; x_1, \dots, x_p)$ de degrés strictement inférieurs au degré de P (pour $p+2 \leq i \leq n$), de manière que V coïncide, dans un voisinage de l'origine, avec l'adhérence de l'ensemble des solutions du système d'équations

$$\begin{aligned} P(x_{p+1}; x_1, \dots, x_p) &= 0, \\ P'(x_{p+1}; x_1, \dots, x_p)x_i &= Q_i(x_{p+1}; x_1, \dots, x_p) \quad (p+2 \leq i \leq n) \end{aligned}$$

pour lesquelles P' est $\neq 0$. (On notera que ce système peut avoir des solutions qui n'appartiennent pas à V .)

Ces résultats sont classiques, et souvent invoqués, mais il est difficile d'en trouver une démonstration complète dans la littérature.

Remarque: dans l'ensemble des points de G où $P' \neq 0$, l'application f de G dans $V(\mathfrak{p})$ est biunivoque. En effet, un tel point de G est caractérisé par les valeurs des fonctions $x_1, \dots, x_p, x_{p+1}$.

5. Dimension d'un germe de sous-variété; sa structure topologique.

Définition: on appelle dimension du germe de sous-variété $V(\mathfrak{p})$ la dimension du noyau G qui lui est canoniquement associé. C'est aussi le nombre d'éléments d'un système de l'anneau $K(x_1, \dots, x_n)/\mathfrak{p}$, qui soit analytiquement libre et engendre un sous-anneau analytique tel que tout élément de $K(x_1, \dots, x_n)/\mathfrak{p}$ soit algébrique sur ce sous-anneau.

En tout point de $V(\mathfrak{p})$ où $P' \neq 0$ (avec les notations du th. 3), $V(\mathfrak{p})$ est une variété analytique-complexe (au sens strict) de dimension p , ce qui justifie la terminologie; l'ensemble des points où $P' \neq 0$ est un ouvert partout dense dans $V(\mathfrak{p})$. Ces points sont des points réguliers de la variété $V(\mathfrak{p})$, dans le sens suivant: on peut, en un tel point, choisir les coordonnées locales de l'espace ambiant, de manière que $V(\mathfrak{p})$ devienne une variété linéaire complexe. Il n'est pas très difficile de montrer que, pour tout point régulier de $V(\mathfrak{p})$ assez voisin de l'origine, il existe une manière de représenter $V(\mathfrak{p})$ au voisinage de l'origine (à la manière du th. 3) pour laquelle le P' correspondant est $\neq 0$ au point envisagé. L'ensemble des points irréguliers est donc une sous-variété analytique à l'origine. On va voir que la dimension de cette sous-variété est strictement plus petite que celle de $V(\mathfrak{p})$. En étudiant les composantes irréductibles de la sous-variété des points irréguliers, on retombera sur un processus analogue: chacune de ces composantes a un ensemble de points "réguliers" qui est une véritable variété analytique-complexe de dimension $< p$, et puis il reste l'ensemble des points irréguliers de chaque composante de la sous-variété des points irréguliers de $V(\mathfrak{p})$. Il résulte de là que, au

voisinage de l'origine, $V(\mathfrak{p})$ contient une suite de sous-espaces $V_{k-1}, \dots, V_0$ dont chacun contient le suivant et est fermé dans le précédent, la dimension (topologique) de V_k étant au plus $2k$, et que les $V_k - V_{k-1}$ sont des variétés topologiques de dimension (topologique) $2k$, éventuellement vides.

On a admis que la dimension d'une vraie sous-variété de $V(\mathfrak{p})$ est strictement plus petite que celle de $V(\mathfrak{p})$; plus exactement, que chaque composante irréductible a une dimension strictement inférieure à la dimension de $V(\mathfrak{p})$. Cela résulte du:

Théorème 4. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $K(x_1, \dots, x_n)$, et soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier contenant $\mathfrak{p}$ et $\neq \mathfrak{p}$. La dimension de la variété $V(\mathfrak{q})$ est strictement plus petite que la dimension de $V(\mathfrak{p})$.

En effet, l'anneau $K(x_1, \dots, x_n)/\mathfrak{q}$ est un quotient A' de l'anneau $K(x_1, \dots, x_n)/\mathfrak{p} = A$. Soit V un sous-espace vectoriel générateur et analytiquement libre de l'anneau A ; la dimension d'un tel sous-espace vectoriel est justement la dimension p de $V(\mathfrak{p})$. Il suffit donc de montrer que l'image de V dans A' n'est pas analytiquement libre. Supposons le contraire: le corps des fractions de A est engendré par l'adjonction d'une racine ζ d'un polynôme unitaire P , à coefficients dans le sous-anneau $[V]$, et irréductible sur le corps des fractions K de $[V]$. L'image de ζ dans A' satisfera à la même équation, et P sera encore irréductible sur l'image de K , qui est isomorphe à K . Il en résulte que l'homomorphisme $A \rightarrow A'$ est un isomorphisme. Donc $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, contrairement à l'hypothèse.

6. Image d'un germe d'espace analytique par une application analytique dans $\mathbb{C}^n$.

Théorème 5. Soient G un germe d'espace analytique, c son point privilégié, $A(G)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur G , I l'idéal des fonctions nulles au point c . Soient $f_1, \dots, f_n$ des éléments de I , et soit $f: G \rightarrow \mathbb{C}^n$ l'application analytique qu'ils définissent. Alors:

1) l'idéal $\mathfrak{p}$ des $g \in K(x_1, \dots, x_n)$ qui s'annulent sur l'image $f(G)$ est premier, et $f(G) \subset V(\mathfrak{p})$.

2) si le sous-espace vectoriel V engendré par les f_i est "générateur" pour l'anneau $A(G)$ (cf. 13, p. 13), on a $f(G) = V(\mathfrak{p})$.

3) Pour que $A(G)$ soit contenu dans le corps des fractions du sous-anneau analytique engendré par les f_i , il faut et il suffit que l'application f soit biunivoque dans un ouvert partout dense de G .

Démonstration de 1): dire que $g \in \mathfrak{p}$, c'est dire que $g \circ f = 0$, c'est-à-dire que la fonction $g(f_1, \dots, f_n) \in A(G)$ est nulle. Donc $K(x_1, \dots, x_n)/\mathfrak{p}$ est isomorphe au sous-anneau analytique B de $A(G)$ engendré par les f_i ; comme B est un anneau d'intégrité, $\mathfrak{p}$ est premier. Il est évident que $f(G) \subset V(\mathfrak{p})$.

Démonstration de 2): l'hypothèse faite sur les f_i signifie que le corps des fractions de $A(G)$ s'obtient par adjonction d'un unique élément ζ au corps des fractions de B . On peut prendre ζ dans I , donc entier sur B . Soit $P(\zeta)$ le polynôme minimal de ζ (à coefficients dans le corps des fractions de B); on peut supposer que P a ses coefficients dans B , soit $P(\zeta; f_1, \dots, f_n) = 0$. D'autre part, faisons sur les f_i une substitution linéaire de manière que $f_1, \dots, f_k$ soient analytiquement indépendants, les autres f_i étant entiers algébriques sur le sous-anneau analytique engendré par $f_1, \dots, f_k$; ce sous-anneau est isomorphe à $K(x_1, \dots, x_k)$. Alors ζ est entier algébrique sur ce sous-anneau, d'où une équation $R(\zeta; f_1, \dots, f_k) = 0$, R étant un polynôme distingué irréductible.

Soit A' le sous-anneau analytique de $A(G)$ engendré par $f_1, \dots, f_n$ et ζ . Soit $h: G \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ l'application définie par les fonctions $f_1, \dots, f_n, \zeta$ de l'anneau $A(G)$, et soit $\mathfrak{q}$ l'idéal des fonctions de $K(x_1, \dots, x_n, z)$ qui s'annulent sur $h(G)$. D'après la partie 1) du théorème, $\mathfrak{q}$ est premier. Il résulte de la démonstration du th. 1 que $h(G) = V(\mathfrak{q})$. Pour conclure que $f(G) = V(\mathfrak{p})$, il suffit de montrer que tout point $(x_1, \dots, x_n) \in V(\mathfrak{p})$, suffisamment voisin de l'origine, est la projection d'au moins un

point $(x_1, \dots, x_n, z) \in V(\mathfrak{q})$, z étant voisin de zéro. En fait, les p solutions (distinctes ou non) de l'équation $P(z; x_1, \dots, x_n)$ conviennent; elles tendent bien vers zéro avec $x_1, \dots, x_n$, car elles satisfont à $R(z; x_1, \dots, x_n) = 0$.

Démonstration de 3): soit $\Delta(x_1, \dots, x_n)$ le discriminant de P ; la fonction $\Delta(f_1, \dots, f_n)$ sur G n'est pas identiquement nulle, donc $\Delta(x_1, \dots, x_n)$ ne s'annule pas identiquement sur $V(\mathfrak{p})$. Les points de $V(\mathfrak{p})$ qui n'appartiennent pas à la sous-variété définie par l'équation $\Delta(x_1, \dots, x_n) = 0$ sont donc couverts exactement p fois par l'image $f(G)$. Ce sont les images d'un ouvert partout dense de G . Cela étant, pour que $A(G)$ soit dans le corps des fractions de B , il faut et il suffit que ζ soit dans ce corps, c'est-à-dire que $p = 1$. S'il en est ainsi, l'application f est biunivoque dans l'ensemble des points de G où $\Delta(f_1, \dots, f_n) \neq 0$. Réciproquement, si f est biunivoque dans un ouvert partout dense de G , on a nécessairement $p = 1$.

Le théorème 5 est ainsi démontré.

7. Caractérisation des sous-espaces vectoriels générateurs d'un anneau de fonctions holomorphes sur un germe.

Théorème 6. Soit G un germe d'espace analytique (de point privilégié c), et soit $A(G)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur G , I l'idéal des fonctions nulles en c . Pour que le sous-espace vectoriel engendré par des éléments $f_1, \dots, f_n$ de I soit générateur pour l'anneau $A(G)$, il faut et il suffit que les fonctions f_i n'aient pas d'autre zéro commun que c (tout au moins dans un voisinage de c ; autrement dit, la condition exprime que c est un zéro commun isolé).

Démonstration: la condition est nécessaire. Soit en effet V le sous-espace vectoriel engendré par les f_i . Si V est générateur, V contient un sous-espace vectoriel W qui est générateur et analytiquement libre (13, lemme, p. 14). Par une substitution linéaire, on peut supposer que $f_1, \dots, f_k$ constituent une base de W ; alors le sous-anneau ana-

lytique engendré par $f_1, \dots, f_k$ est isomorphe à $K(x_1, \dots, x_k)$, et le germe G peut être défini par une équation $P(z; x_1, \dots, x_k) = 0$, P étant un polynôme distingué irréductible. Les fonctions $f_1, \dots, f_k$ sur G s'identifient à $x_1, \dots, x_k$, qui n'ont pas d'autre zéro commun que l'origine (point privilégié de G).

Montrons que la condition est suffisante. Considérons un sous-espace vectoriel W de I qui soit générateur et contienne V . Pour prouver que V est lui-même générateur, il suffit de démontrer le lemme suivant:

Lemme 2. Soient G un germe d'espace analytique, c son point privilégié, $A(G)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur G , I l'idéal des fonctions nulles en c . Si le sous-espace vectoriel engendré par des éléments $f_1, \dots, f_n$ de I est générateur, et si $f_2, \dots, f_n$ n'ont pas d'autre zéro commun que c , alors f_1 est entier algébrique sur le sous-anneau analytique engendré par $f_2, \dots, f_n$.

Démonstration du lemme 2. Appliquons le théorème 5 à $f_1, f_2, \dots, f_n$. L'idéal $\mathfrak{p}$ des fonctions holomorphes $g(x_1, \dots, x_n)$ telles que $g(f_1, \dots, f_n) = 0$ est premier, et $V(\mathfrak{p}) = f(G)$, en notant f l'application $G \rightarrow \mathbb{C}^n$ définie par les fonctions f_i . Soit $\mathfrak{q}$ l'idéal engendré par $\mathfrak{p}, x_2, \dots, x_n$. La variété $V(\mathfrak{q})$ est l'intersection de $V(\mathfrak{p})$ avec $x_2 = \dots = x_n = 0$; donc $V(\mathfrak{q})$ est l'image, par f , de l'ensemble des points de G où $f_2, \dots, f_n$ sont nuls, c'est-à-dire de l'unique point c . Bref, la variété $V(\mathfrak{q})$ est réduite à l'origine. Appliquons le théorème 2 à la fonction x_1 , qui s'annule sur $V(\mathfrak{q})$: on a, pour un entier ρ convenable, $(x_1)^\rho \in \mathfrak{q}$, d'où

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1)^\rho - \sum_{2 \leq i \leq n} a_i x_i \in \mathfrak{p}$$

(les a_i désignent des fonctions de $x_1, \dots, x_n$ holomorphes à l'origine). Puisque $F(x_1, 0, \dots, 0)$ n'est pas identiquement nulle, F est (exposé 10) équivalente à un polynôme distingué en x_1 , soit $P(x_1; x_2, \dots, x_n)$. Dans l'anneau $A(G)$, on a $P(f_1; f_2, \dots, f_n) = 0$, ce qui démontre le lemme.

On peut appliquer le théorème 6 au théorème 5. On obtient le résultat suivant: si des fonctions f_i holomorphes sur le germe G s'annulent au point privilégié c et n'ont pas d'autre zéro commun, elles prennent, au voisinage de c , tout système de valeurs $(a_1, \dots, a_n)$ voisin de zéro et satisfaisant aux relations $g(a_1, \dots, a_n) = 0$ (g parcourant l'idéal des fonctions holomorphes telles que $g(f_1, \dots, f_n)$ soit identiquement nulle sur G).

8. Application aux systèmes d'équations et aux transformations analytiques.

Voici une série de conséquences faciles des théorèmes 5 et 6.

Soit G un germe d'espace analytique, de dimension n (par exemple, l'espace $\mathbb{C}^n$ avec l'origine pour point privilégié). Soit, sur G , un système de m fonctions holomorphes $f_1, \dots, f_m$, nulles au point privilégié c , et sans zéro commun autre que c . Alors $m \geq n$; pour que $m > n$, il faut et il suffit qu'il existe au moins une relation $g(f_1, \dots, f_m) = 0$, g holomorphe à l'origine et non identiquement nulle.

En effet, le système $(f_1, \dots, f_m)$ est générateur, d'après le théorème 6. La dimension de l'espace vectoriel qu'il engendre est donc au moins égale à la dimension n du germe G , ce qui prouve $m \geq n$. Dire qu'il n'existe aucune relation $g(f_1, \dots, f_m) = 0$, c'est dire que $f_1, \dots, f_m$ constituent une base du sous-espace V qu'ils engendrent, et que V est analytiquement libre, donc que la dimension de V est n .

Soit G un germe d'espace analytique de dimension n , et soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions holomorphes sur G , nulles au point privilégié c , et définissant une application biunivoque f de G dans $\mathbb{C}^n$. Alors f applique biunivoquement un voisinage de c sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$, et l'application réciproque est analytique.

En effet, les f_i n'ont pas d'autre zéro commun que c ; donc, d'après un résultat précédent, elles sont analytiquement indépendantes (puisque leur nombre est égal à la dimension de G). D'après le théorème 5, l'image de f couvre un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$, et $A(G)$ est

contenu dans le corps des fractions du sous-anneau analytique engendré par les f_i . Ceci veut dire que $A(G)$ est la clôture intégrale de ce sous-anneau, lequel est isomorphe à $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$, intégralement clos. Ainsi l'application f définit un isomorphisme de l'anneau du germe $\mathbb{C}^n$ (avec l'origine comme point privilégié) sur $A(G)$; ceci implique que f est un isomorphisme de $A(G)$ sur le germe $\mathbb{C}^n$. (Cf. exposé 13, théorème 1.)

Cas particulier: si n fonctions f_i de n variables, holomorphes à l'origine, définissent une application biunivoque d'un voisinage de l'origine, leur jacobien est $\neq 0$ à l'origine (considérer l'application réciproque, dont l'existence vient d'être démontrée).

Soit maintenant, dans l'espace $\mathbb{C}^n$, une sous-variété analytique V au voisinage de l'origine, passant par l'origine et irréductible en ce point. Soit p sa dimension. Si une fonction h holomorphe au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$, et nulle à l'origine, n'est pas identiquement nulle sur V au voisinage de 0 , les points de V où $f = 0$ constituent des sous-variétés irréductibles à l'origine et la dimension de chacune de ces sous-variétés est $p-1$.

En effet, soit W l'une quelconque des composantes irréductibles. Soit a un point régulier de W , voisin de l'origine, et n'appartenant à aucune autre composante irréductible; et soit q la dimension de W . On sait que $q < p$ (th. 4). Soit $g_1, \dots, g_q$ un système de fonctions holomorphes au point a (dans l'espace ambiant), constituant sur W un système de coordonnées locales. Les équations $h = 0, g_1 = 0, \dots, g_q = 0$ sur V (au voisinage de a) ont la solution isolée a . D'après ce qu'on a vu au début de ce n° 8, cela implique que le nombre $q+1$ de ces fonctions est $\geq p$. Ainsi, $q \geq p-1$ et $q < p$, donc $q = p-1$.

Une conséquence immédiate du résultat précédent est ceci; l'ensemble des points de V (de dimension p à l'origine) où s'annulent simultanément r fonctions holomorphes de l'espace ambiant (nulles à l'origine) est la réunion de sous-variétés irréductibles à l'origine, dont chacune a une dimension au moins égale à $p - r$.

9. L'espace $\mathcal{F}_B$ des germes de sous-variétés irréductibles.

Soit B une variété analytique-complexe (abstraite). En 12, (page 6) on a défini l'espace $\mathcal{E}_B$ des germes de sous-variétés principales irréductibles de B . On peut donner une définition analogue pour l'espace $\mathcal{F}_B$ des germes de sous-variétés irréductibles (principales ou non). Un point de $\mathcal{F}_B$ est un couple formé d'un point $b \in B$ et d'un germe de sous-variété irréductible au point b . Dans $\mathcal{F}_B$, on définit une topologie par des ouverts en procédant exactement comme on l'a fait pour $\mathcal{E}_B$. On a une application canonique continue ψ de $\mathcal{F}_B$ sur B ; l'image réciproque ψ^{-1} d'un point de B est un ensemble discret. On définit les points réguliers de $\mathcal{F}_B$ (on sait déjà ce que c'est qu'un point régulier d'une sous-variété analytique); l'ensemble $\mathcal{F}_B^0$ des points réguliers de $\mathcal{F}_B$ est un ouvert partout dense, c'est une variété analytique-complexe (mais ses composantes connexes peuvent avoir des dimensions distinctes).

Soient U un ouvert de B , et V une sous-variété analytique dans U (cette notion a été définie dans 12, p. 1). On note $\mathcal{F}(V)$ l'image réciproque $\psi^{-1}(V) \subset \mathcal{F}_B$; c'est un ouvert de $\mathcal{F}_B$. L'espace topologique $\mathcal{F}(V)$ s'appelle l'espace des paramètres de la sous-variété V .

Théorème 7. L'espace topologique $\mathcal{F}_B$ est séparé.

En effet, dans le cas contraire, il existerait 2 points distincts de $\mathcal{F}_B$ tel que tout voisinage de l'un ait une intersection non vide avec tout voisinage de l'autre. Cette intersection contiendrait des points réguliers de $\mathcal{F}_B$. Pour prouver le théorème 7, il suffit donc de montrer ceci: soient deux sous-variétés analytiques V et V' dans un voisinage de l'origine 0 de $\mathbb{C}^n$, contenant le point 0 , et telles que les germes qu'elles définissent en 0 soient irréductibles; s'il existe des points $a \in V$ arbitrairement voisins de 0 , tels que V et V' définissent le même germe (régulier) au point a , alors V et V' définissent le même germe au point 0 . Ceci résulte, à son tour, du lemme plus général que voici:

Lemme 3. Soient V et V' deux sous-variétés analytiques au voisinage de l'origine 0 de $\mathbb{C}^n$ et contenant 0 . Supposons V irréductible au point 0 . S'il existe des points $a \in V$ arbitrairement voisins de 0 et jouissant de la propriété que V est contenue dans V' au voisinage de a , alors V est contenue dans V' au voisinage de 0 .

Voici pourquoi. V' est, au voisinage de 0 , l'ensemble des zéros communs à une famille finie de fonctions holomorphes f_i . L'hypothèse faite implique que les f_i s'annulent sur V au voisinage de $a \in V$. Dès que a est assez voisin de 0 , ceci implique que chaque f_i s'annule sur V au voisinage de 0 (en vertu du lemme 1).

On montre, comme en 12, que l'espace $\mathcal{F}_B$ est localement compact, et que si V est une sous-variété analytique dans un ouvert $U \subset B$, la restriction de ψ à l'espace des paramètres $\mathcal{F}(V)$ est une application propre de $\mathcal{F}(V)$ dans U . Réciproquement, si un ensemble ouvert E de $\mathcal{F}_B$ et un ouvert U de B sont tels que $\psi(E) \subset U$ et que la restriction de ψ à E soit une application propre de E dans U , E est l'espace des paramètres d'une sous-variété analytique dans U . Une sous-variété analytique dans un ouvert U est dite réductible dans U s'il existe deux sous-variétés analytiques V_1 et V_2 dans U , distinctes de V , et dont V soit la réunion. Le théorème 5 de 12 est valable: pour qu'une sous-variété V dans un ouvert U soit irréductible dans U , il faut et il suffit que l'espace des paramètres $\mathcal{F}(V)$ soit connexe.

De là on déduit la décomposition d'une sous-variété (dans un ouvert U) en composantes irréductibles (dans U). Il faut toutefois avoir prouvé que l'espace $\mathcal{F}_B$ est localement connexe. D'une façon précise (cf. th. 6 de 12): tout point de $\mathcal{F}_B$ possède un système fondamental de voisinages dont l'intersection avec la variété $\mathcal{F}_B^0$ des points réguliers est connexe. La démonstration est comme dans 12, grâce au th. 3 du présent exposé 14, lequel montre que l'ensemble des points réguliers voisins d'un point $a \in \mathcal{F}_B$ contient un sous-ensemble ouvert partout dense, isomorphe à l'ensemble des solutions d'une équation $P(z; x_1, \dots, x_k) = 0$ pour lesquelles $P' \neq 0$.

On démontre facilement un théorème analogue au théorème 7 de 12 .

10. Structure analytique de l'espace $\mathcal{F}_B$.

Soit V une sous-variété analytique de $\mathbb{C}^n$ au voisinage de l'origine, passant par l'origine, et définissant un germe irréductible à l'origine. Soit p sa dimension. Soit $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ associé à ce germe. On a, au n°1, associé canoniquement à l'idéal $\mathfrak{p}$ un germe d'espace analytique; il peut être défini par l'espace des paramètres G d'une sous-variété principale

$$P(x_{p+1}; x_1, \dots, x_p) = 0 \text{ irréductible à l'origine,}$$

et par le point privilégié $c \in G$ correspondant à l'origine. De plus, on a défini une application analytique $f: G \rightarrow \mathbb{C}^n$, et on a montré au n° 4 que f applique G sur un voisinage de l'origine dans la sous-variété V ; enfin, la restriction de f à l'ensemble des points où $P' \neq 0$ est biunivoque. Ces résultats se complètent par le:

Théorème 8. Avec les notations précédentes, l'application f se décompose d'une seule manière

$$(3) \quad f = \psi \circ \bar{f},$$

ψ désignant l'application canonique de l'espace des paramètres $\mathcal{F}(V)$ sur V , et $\bar{f}$ une application continue de G dans $\mathcal{F}(V)$; en outre, $\bar{f}$ est un homéomorphisme de G sur un voisinage de l'origine dans $\mathcal{F}(V)$.

Démonstration: tout d'abord, en chaque point a de G , f définit une application d'un voisinage de a sur un voisinage du point $f(a)$ dans une sous-variété analytique W_a de $\mathbb{C}^n$, irréductible au point $f(a)$ (cf. th. 3). La dimension de W_a est celle de G , c'est-à-dire p . Puisque $W_a \subset V$, le germe défini au point $f(a)$ par W_a est l'un des germes irréductibles de V en ce point, c'est-à-dire est un point de l'espace des paramètres $\mathcal{F}(V)$. Soit $\bar{f}(a)$ ce point de $\mathcal{F}(V)$: ceci définit une application $\bar{f}$ satisfaisant à (3), et elle est continue d'après la définition de la topologie de $\mathcal{F}(V)$. L'unicité de la décomposition (3) est évidente,

car $\bar{f}$ est définie sans ambiguïté dans l'ensemble des points où $P' \neq 0$, ensemble qui est partout dense dans G .

Il reste à montrer que $\bar{f}$ est un homéomorphisme de G sur un voisinage de l'origine dans $\mathcal{F}(V)$. D'abord, l'image de $\bar{f}$ contient les points où $P' \neq 0$, c'est-à-dire un sous-ensemble ouvert partout dense de V (dans un voisinage de l'origine). Comme $\bar{f}$ transforme un voisinage compact de c dans G , en un compact, l'image de ce voisinage est fermée dans $\mathcal{F}(V)$, et c'est donc un voisinage de l'origine dans $\mathcal{F}(V)$. Il ne reste qu'à prouver que $\bar{f}$ est biunivoque (ce qui impliquera que $\bar{f}$ est bicontinue sur un voisinage compact de c dans G); or cela résulte du fait que la restriction de $\bar{f}$ à l'ensemble des points où $P' \neq 0$ est biunivoque.

Le théorème 8 permet d'identifier un voisinage de c dans G à un voisinage de l'origine dans l'espace des paramètres de V ; on peut dire que le germe d'espace analytique associé à un idéal premier sert à paramétrer le germe de sous-variété irréductible défini par cet idéal premier. En même temps, on peut transporter à l'espace des paramètres $\mathcal{F}(V)$, au voisinage de l'origine, la structure d'espace analytique général de G . (Cf. 13, n° 2.)

De là résulte que si B est une variété analytique-complexe, l'espace $\mathcal{F}_B$ des germes de sous-variétés irréductibles (aux différents points de B) est muni d'une structure d'espace analytique général. On a donc la notion de fonction holomorphe dans un ouvert de $\mathcal{F}_B$. En particulier, si V est une sous-variété analytique dans un ouvert U de B , on a la notion de fonction holomorphe sur l'espace des paramètres $\mathcal{F}(V)$; par abus de langage, on dira aussi fonction holomorphe sur V (mais il faut prendre garde qu'une telle fonction peut prendre des valeurs différentes en deux composantes irréductibles distinctes d'un même point de V). Pour qu'une fonction définie sur $\mathcal{F}(V)$ soit holomorphe, il faut et il suffit qu'elle soit continue, et que sa restriction aux points réguliers de V soit holomorphe (au sens ordinaire d'une fonction holomorphe sur une véritable variété analytique-complexe).

Etant données deux sous-variétés analytiques V et V' , on a aussi la notion d'application analytique de $\mathcal{F}(V)$ dans $\mathcal{F}(V')$.

Définition: On dit que V et V' sont équivalentes s'il existe un isomorphisme analytique de $\mathcal{F}(V)$ sur $\mathcal{F}(V')$. On dit que V , en un ses points a , est équivalente à V' au point $a' \in V'$, s'il existe un voisinage ouvert de a et un voisinage ouvert de a' qui sont équivalents. Il est évident que pour que deux germes de sous-variétés soient équivalents, il faut et il suffit que les noyaux associés soient isomorphes.

Théorème 9. Tout germe de sous-variété analytique est équivalent à un germe de sous-variété normale.

Mais il faut d'abord dire ce qu'on entend par "sous-variété V de $\mathbb{C}^n$ normale en un de ses points a où elle est irréductible": cela signifie, par définition, que l'anneau des fonctions holomorphes sur le germe défini par V au point a est induit par l'anneau des fonctions holomorphes de l'espace ambiant. Condition équivalente: si A est l'anneau des fonctions holomorphes dans l'espace ambiant au point a , et si $\mathfrak{p}$ est l'idéal premier du germe de la sous-variété en a , l'anneau quotient $A/\mathfrak{p}$ est intégralement clos.

Avec ces définitions, le théorème 9 est une conséquence immédiate de la Remarque de la p. 11 de l'exposé 13.

Nous ne développerons pas ici les propriétés des sous-variétés normales en un point; signalons sans démonstration qu'au voisinage d'un point où V est irréductible et normale, la sous-variété des points irréguliers (cf. n° 5) est de dimension au plus $p-2$, en désignant par p la dimension de V .