

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

F. BRUHAT

Sous-variétés analytiques ; variétés principales

Séminaire Henri Cartan, tome 4 (1951-1952), exp. n° 12, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1951-1952__4__A12_0>

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1951-1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

1951-52

SOUS-VARIETES ANALYTIQUES ; VARIETES PRINCIPALES

(D'après un exposé de F. Bruhat le 3-III-52)

1. Définitions générales: Anneau $\mathcal{O}_A$: soit K un corps valué complet; A un sous-ensemble non vide de K^n . Si A est ouvert, la notion de fonction analytique dans A est classique: ces fonctions forment un anneau $\mathcal{O}_A$ et si B est un ouvert contenu dans A , il existe un homomorphisme canonique φ_{BA} de $\mathcal{O}_A$ dans $\mathcal{O}_B$, avec transitivité évidente.

Pour A quelconque, nous définirons l'anneau $\mathcal{O}_A$ des fonctions analytiques dans A comme étant la limite inductive des anneaux $\mathcal{O}_U$ relatifs aux voisinages ouverts U de A , suivant les homomorphismes φ . Autrement dit, une fonction analytique dans A est définie par une fonction analytique sur un voisinage ouvert de A , modulo la relation d'équivalence "il existe un voisinage de A sur lequel f et g coïncident." Si $B \subset A$, on a un homomorphisme canonique φ_{BA} de $\mathcal{O}_A$ dans $\mathcal{O}_B$. (Pour A réduit à un point, on retrouve la notion de fonction analytique en un point, définie par une série convergente.)

Ensemble $\mathcal{P}_A$: A définit de même une relation d'équivalence entre parties de K^n : $V \sim V'$ s'il existe un voisinage U de A tel que $V \cap U = V' \cap U$: on notera $\mathcal{P}_A$ l'ensemble quotient de $\mathcal{P}(K^n)$ par cette relation d'équivalence: on peut définir dans $\mathcal{P}_A$ la relation d'inclusion, les opérations de réunion et d'intersection finies et de passage au complémentaire. Si $B \subset A$, on a une application canonique ψ_{BA} de $\mathcal{P}_A$ sur $\mathcal{P}_B$.

Sous-Variétés analytiques: on dira qu'un élément f de $\mathcal{O}_A$ s'annule sur un élément V de $\mathcal{P}_A$, s'il existe un voisinage ouvert U de A , une fonction f^0 holomorphe dans U et un sous-ensemble V^0 de U tels que f et V soient les images canoniques de f^0 et V^0 et que $f^0 = 0$ sur V^0 . Etant donné $f \in \mathcal{O}_A$, il existe un plus grand sous-ensemble de $\mathcal{P}_A$ sur lequel f s'annule, appelé variété des zéros de f dans A et noté $V(f)$: c'est l'image de l'ensemble des zéros de f^0 dans U , qui est

évidemment indépendante du choix de la fonction f^0 dans la classe d'équivalence définie par f . On peut définir de même la variété des zéros communs à p fonctions holomorphes (ou par intersection dans $\mathcal{P}_A$).

Si A est réduit à un point x , on appellera les éléments de $\mathcal{P}_x$ ainsi définis par une famille finie de fonctions de $\mathcal{O}$ "Variétés analytiques au point x ." Pour A quelconque, une "variété analytique dans A " sera un élément V de $\mathcal{P}_A$ tel que pour tout point x de A , son image dans $\mathcal{P}_x$ soit une variété analytique au point x ; exemple: la variété des zéros communs à une famille finie de fonctions de $\mathcal{O}_A$. (Un des problèmes de la théorie étant précisément de déterminer sous quelles conditions une variété arbitraire de A peut être ainsi définie par une famille finie (ou même infinie ...) de fonctions de $\mathcal{O}_A$.)

Si V_1 et V_2 sont des variétés analytiques dans A , $V_1 \cup V_2$ et $V_1 \cap V_2$ aussi: si V_1 et V_2 sont définies en x resp. par les familles (f_i) et (g_j) , $V_1 \cap V_2$ est définie par la famille (f_i, g_j) et $V_1 \cup V_2$ par la famille $(f_i g_j)$. Une variété V sera dite "irréductible" dans A si elle n'est pas réunion de deux variétés V_1 et V_2 distinctes de V . (Dans tout ceci, les opérations $\cup$ et $\cap$ sont prises au sens de $\mathcal{P}_A$.)

2. Variétés analytiques en un point x : soit V une variété analytique au point x définie par p fonctions holomorphes $f_1, \dots, f_p$: tout élément de l'idéal engendré dans $\mathcal{O}_x$ par les f_i s'annule sur V . Réciproquement étant donné un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}_x$, il définit une variété $V(\mathfrak{a})$, appelée variété de l'idéal $\mathfrak{a}$, telle que toute fonction de $\mathfrak{a}$ s'annule sur $V(\mathfrak{a})$: en effet $\mathcal{O}_x$ étant noethérien (exp. 11) $\mathfrak{a}$ admet une base finie soit $f_1, \dots, f_p$: tout élément de $\mathfrak{a}$ s'annule sur la variété V des zéros communs aux f_i d'où on déduit facilement que V ne dépend que de A et non de la base choisie.

Inversement, un élément quelconque X de $\mathcal{P}_x$ définit un idéal $I(X)$, l'idéal des éléments de $\mathcal{O}_x$ qui s'annulent sur X : en particulier si M est une variété, nous appellerons $I(V)$ l'idéal de la variété V .

Premières propriétés des variétés: soit V une variété analytique au point x :

- 1) $V(I(V)) = V$: par définition même de $V(\mathfrak{a})$ on a $V \subset V(I(V))$ même si V est un élément quelconque de $\mathcal{P}_x$. Mais V étant une variété, les fonctions f_i qui définissent V appartiennent à $I(V)$ et par suite $V(I(V)) \subset V$: cette relation caractérise donc les variétés analytiques.
- 2) $V_1 = V_2$ est par suite équivalent à $I(V_1) = I(V_2)$; $V_1 \subset V_2$ et $\neq V_2$ est équivalent à $I(V_2) \subset I(V_1)$ et $\neq I(V_1)$: d'où, $\mathcal{O}_x$ étant noethérien, le résultat suivant: une suite strictement décroissante de variétés (pour l'inclusion) est finie.
- 3) $V = V_1 \cup V_2$ est équivalent à $I(V) = I(V_1) \cap I(V_2)$: car si un élément de $\mathcal{O}$ s'annule sur V , il s'annule sur V_1 et V_2 et réciproquement.

On obtient ainsi des relations (d'ailleurs triviales) entre variétés et certains idéaux de $\mathcal{O}$: ces relations seraient évidemment fausses si on remplaçait V et $I(V)$ par $\mathfrak{a}$ et $V(\mathfrak{a})$; $\mathfrak{a}$ étant un idéal quelconque: p. ex. $V(\mathfrak{a}^1) = V(\mathfrak{a}) \dots$

Théorème 1: Toute variété analytique au point x est réunion finie de variétés irréductibles. Cette décomposition est unique, à condition qu'elle ne comporte pas de termes superflus, c'est-à-dire contenus dans un autre

Soit V une variété: si V n'est pas irréductible, $V = V_1 \cup V_2$ et si V_1 n'est pas irréductible, on décompose V_1 , etc: l'opération doit s'arrêter d'après 2): on obtient une composante irréductible de V et on recommence sur ce qui reste: là encore on s'arrête au bout d'un nombre fini d'opérations ... d'où l'existence d'une décomposition après suppression éventuelle des termes superflus, $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_p$.

Supposons qu'on ait une autre décomposition, $V = V'_1 \cup V'_2 \cup \dots \cup V'_q$: on en déduit $V'_1 = (V_1 \cap V'_1) \cup (V_2 \cap V'_1) \cup \dots \cup (V_p \cap V'_1)$; V'_1 étant irréductible, $V'_1 \subset V_i$ pour un i au moins; mais on montrerait de même que V_i

est contenu dans un V'_j au moins: d'où $V'_1 = V_1$, V'_1 n'étant contenu dans aucun V'_j pour $j \neq 1$.

Théorème 2: la condition nécessaire et suffisante pour que V soit irréductible est que $I(V)$ soit premier.

La condition est suffisante d'après 3). Elle est nécessaire car si $I(V)$ n'est pas premier, il existe f et $g \notin I(V)$ tels que $fg \in I(V)$: on voit alors trivialement que $V = V(I(V) + (f)) \cup V(I(V) + (g))$.

3. Variétés principales en un point: on supposera désormais K algébriquement clos. On appellera variété principale au point x , la variété d'un idéal principal ou encore la variété des zéros d'une fonction holomorphe.

Théorème 3: Si f est irréductible (dans l'anneau factoriel $\mathcal{O}_x$), toute fonction g s'annulant sur $V(f)$ est divisible par f . Autrement dit, l'idéal $I(V(f)) = (f)$.

Corollaire: une condition nécessaire et suffisante pour que $V(f)$ soit irréductible est que f soit irréductible.

On peut choisir les axes de coordonnées (cf. exposé X) de sorte que f soit congru mod. les unités à un polynôme distingué en z : soit P . On a $V(f) = V(P)$ et P est irréductible: par suite, K étant parfait, P et $\partial P / \partial t$ sont sans facteurs communs en $\mathcal{O}$ donc leur résultant $\Delta \neq 0$ dans un voisinage de $\mathcal{O}$. Soit alors $g = PQ + R$ l'identité de Weierstrass de division par P : R est un polynôme en z de degré $p - 1$ si p est le degré de P , et en dehors de $\Delta = 0$, R s'annule pour p valeurs distinctes de z : ses coefficients sont donc des fonctions analytiques et bornées en dehors de $\Delta = 0$, donc partout par prolongement analytique, et par suite $g = PQ$, d'où le théorème. Le corollaire résulte immédiatement du th. 2 et du fait que f irréductible est équivalent à (f) premier.

On peut alors apporter une précision au théorème 1:

Théorème 1 bis: Une variété principale est réunion finie de variétés principales irréductibles.

En effet on a $f = f_1^{d_1} f_2^{d_2} \dots f_k^{d_n}$, les f_i étant irréductibles distinctes (cf. 11); on en déduit $V(f) = \bigcup V(f_i)$, les $V(f_i)$ étant irréductibles d'après le corollaire du th. 3.

Corollaire: Si $f = f_1^{d_1} f_2^{d_2} \dots f_k^{d_n}$, $I(V(f)) = (f_1 f_2 \dots f_k)$.

Car si $g = 0$ sur V , $g = 0$ sur les $V(f_i)$ et par suite f_i divise g : d'où le résultat (cf. exp. 11).

Application aux fonctions méromorphes: une fonction méromorphe en un point x est un élément du corps des quotients de $\mathcal{O}_x$: on peut le mettre sous la forme f/g , f et g étant sans facteurs communs: en tout point a voisin de x qui n'appartient pas à $V(f) \cap V(g)$, on peut lui assigner une valeur numérique (finie ou infinie). En un point de $V(f) \cap V(g)$, f/g est indéterminée: en effet, dire que f et g sont sans facteurs communs, c'est dire que $V(f) \cap V(g)$ ne contient pas de variété principale: par suite quelle que soit la constante λ , et le point a de $V(f) \cap V(g)$, la variété principale $f - \lambda g = 0$ au point a n'est pas contenue dans $V(f) \cap V(g)$: autrement dit, il existe des points arbitrairement voisins de a où $f/g = \lambda$.

Remarque: si K n'est pas algébriquement clos, la définition que nous avons donnée des variétés principales est souvent sans intérêt: par exemple pour les réels, toute variété est principale. Il faudrait introduire les variétés dont l'idéal est principal

4. Espace $\mathbb{C}$: On prend désormais pour K le corps $\mathbb{C}$ des complexes.

Soit B une variété à structure analytique complexe (au sens de l'exposé 1) de dimension n : toutes les définitions et résultats des paragraphes précédents s'étendent sans difficultés: A étant un sous-ensemble de B , on définit $\mathcal{O}_A$, $\mathcal{P}_A$, les "sous-variétés analytiques" dans A , au point x , etc....

En particulier, on appellera "sous-variété principale" dans A ,

un élément V de $\mathcal{P}_A$ dont l'image canonique dans $\mathcal{P}_x$ soit, pour tout point x de A , une variété principale en x (éventuellement vide). Si A est ouvert (ce que nous supposons toujours par la suite), V est un sous-ensemble fermé de A : on peut alors définir aussi V comme un sous-ensemble fermé de A , tel que, pour tout point x de V , l'image de V dans $\mathcal{P}_x$ soit une variété principale en x .

On associe à B un espace $\mathcal{E}$ dont les points sont les couples formés d'un point a de B et d'une variété principale irréductible non vide α en a : on a une application canonique φ de $\mathcal{E}$ sur B , définie par $\varphi(a, \alpha) = a$. On va définir une topologie sur $\mathcal{E}$: soient A un ouvert de B , V une sous-variété principale dans A : V définit un sous-ensemble $\mathcal{E}(V)$ de $\mathcal{E}$, dont les points sont les couples (a, α) , où $a \in V$ et où α est une composante irréductible de V en a : par définition, les ensembles $\mathcal{E}(V)$ ainsi définis formeront une base des ouverts pour la topologie de $\mathcal{E}$. On constate immédiatement que l'application φ de $\mathcal{E}$ sur B est continue. $\mathcal{E}(V)$ muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{E}$, sera appelé "espace des paramètres" de V : φ applique $\mathcal{E}(V)$ sur V et l'image par φ d'un ouvert de $\mathcal{E}(V)$ est un ouvert de V (autrement dit, la restriction de φ à $\mathcal{E}(V)$ est une application continue ouverte de $\mathcal{E}(V)$ sur V).

L'ensemble $\varphi^{-1}(a)$ est discret pour tout point a de B : en effet soit (a, α) un point de $\varphi^{-1}(a)$ et soit $\bar{\alpha}$ une variété dans un voisinage ouvert U de a , dont l'image dans $\mathcal{P}_a$ soit α : $\mathcal{E}(\bar{\alpha})$ est un voisinage de (a, α) dans $\mathcal{E}$ et $\varphi^{-1}(a) \cap \mathcal{E}(\bar{\alpha}) = (a, \alpha)$ puisque α est irréductible en a : d'où le résultat. Mais l'application φ n'est pas localement bi-univoque, car une variété peut être irréductible en un point sans l'être en tous les points voisins; cependant pour $a' \in U$, $\varphi^{-1}(a') \cap \mathcal{E}(\bar{\alpha})$ se compose d'un nombre fini de points.

Proposition 1: La topologie de $\mathcal{E}$ est séparée.

Il suffit de montrer que deux points distincts (a, α) et (a', α') admettent des voisinages disjoints: c'est évident si $a \neq a'$. Si $a = a'$

et $\alpha \neq \alpha'$, on peut choisir les coordonnées locales au voisinage de a de telle sorte que α et α' soient définies comme variétés des zéros de deux polynômes distingués en z , irréductibles, distincts. Le résultant de ces deux polynômes n'est pas identiquement nul au voisinage de a : il ne l'est donc pas au voisinage de tout point assez voisin de a : par suite, les variétés définies par ces deux polynômes dans un voisinage ouvert convenable de a n'ont de composante irréductible commune en aucun point de ce voisinage; leurs espaces de paramètres forment les voisinages disjoints cherchés.

Un raisonnement analogue montrerait que si V est une variété principale dans A , $\mathcal{E}(V)$ est fermé dans $\varphi^{-1}(A)$ (introduire les polynômes distingués définissant α et V au point a de A et leur résultant pour montrer que si $(a, \alpha) \notin \mathcal{E}(V)$, il y a un voisinage de (a, α) qui ne rencontre pas $\mathcal{E}(V)$).

Soient A un ouvert de B , V une variété principale dans A , $\mathcal{E}(V)$ son espace des paramètres: l'application φ , considérée comme application de $\mathcal{E}(V)$ dans A est propre (i.e., l'image réciproque d'un compact de A rencontre $\mathcal{E}(V)$ suivant un compact); en particulier, $\mathcal{E}$ est localement compact; démonstration: soient K un compact de A et Φ un ultrafiltre sur $\varphi^{-1}(K) \cap \mathcal{E}(V)$; $\varphi(\Phi)$ est un ultrafiltre sur K , qui converge vers un point a de K . $\varphi^{-1}(a) \cap \mathcal{E}(V)$ se compose d'un nombre fini de points, qui admettent des voisinages disjoints: l'un de ces voisinages appartient à Φ , qui par suite converge vers le point correspondant.

Réciproquement, soient E un ouvert de $\mathcal{E}$ et A un ouvert de B tels que $\varphi(E) \subset A$ et que l'application φ de E dans A soit propre: $\varphi(E)$ est une sous-variété principale dans A et E est l'espace des paramètres de $\varphi(E)$: démonstration: $\varphi(E)$ est fermé dans A : en effet, soit a adhérent à $\varphi(E)$ et $\mathcal{F}$ la base de filtre sur A formée par les voisinages compacts de a dans A ; $\varphi^{-1}(\mathcal{F})$ est une base de filtre sur E (car $\varphi^{-1}(U) \neq \emptyset$ pour tout U de $\mathcal{F}$) formée d'ensembles compacts: par

suite, $\varphi^{-1}(\mathcal{F})$ admet au moins un point adhérent x dans E ; on a évidemment $\varphi(x) = a$, donc $a \in \varphi(E)$. Il suffit par suite de montrer que si $a \in \varphi(E)$, il existe un voisinage U de a , tel que $\varphi(E) \cap U$ soit une variété principale dans U . Or, $\varphi^{-1}(a)$, étant compact et discret, se compose d'un nombre fini de points (a, α_i) , qui possèdent dans E des voisinages disjoints qu'on peut supposer être des espaces de paramètres $\mathcal{E}(\bar{\alpha}_i)$ de variétés α_i dans des ouverts U_i de A . $\varphi^{-1}(U)$ étant compact pour $U \in \mathcal{F}$, on peut trouver un voisinage ouvert W de a tel que $\varphi^{-1}(W) \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{E}(\bar{\alpha}_i)$ (sinon on aurait un filtre Φ sur $\varphi^{-1}(U)$ auquel aucun des (a, α_i) ne serait adhérent et tel que $\varphi(\Phi)$ converge vers a , ce qui est impossible). Par suite, $\varphi(E) \cap W = \bigcup_{i=1}^n (\bar{\alpha}_i \cap W)$, ce qui achève la démonstration. On a donc le:

Théorème 4: pour qu'un ouvert E de $\mathcal{E}$ soit l'espace des paramètres d'une sous-variété principale dans un ouvert A de B , il faut et il suffit que $\varphi(E) \subset A$ et que l'application φ de E dans A soit propre.

Définition 1: on dit qu'une variété principale dans A est réductible dans A , si elle est réunion de deux sous-variétés principales V_1 et V_2 dans A , distinctes de V (cf. §1 et exposés ultérieurs).

Théorème 5: la condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété principale V dans un ouvert A soit irréductible dans A , est que son espace des paramètres soit connexe.

En effet si E_1 et E_2 sont deux ouverts disjoints non vides de $\mathcal{E}(V)$ tels que $\mathcal{E}(V) = E_1 \cup E_2$, φ est une application propre de E_1 (resp. E_2) dans A , $V = \varphi(E_1) \cup \varphi(E_2)$ et $\varphi(E_1)$ (resp. $\varphi(E_2)$) est distinct de V . Inversement, si V_1 est une variété principale contenue dans V et $\neq V$, $\mathcal{E}(V_1)$ est ouvert et fermé dans $\mathcal{E}(V)$ et $\neq \mathcal{E}(V)$.

Définition 2: on dira qu'un point (a, α) de $\mathcal{E}$ est régulier si on peut choisir les coordonnées locales dans B de telle sorte que α soit définie par une relation du premier degré entre les coordonnées. L'ensemble $\mathcal{E}^0$ des points réguliers est un ouvert de $\mathcal{E}$, évidemment muni

d'une structure de variété analytique complexe de dimension $n-1$ (et est en particulier localement connexe).

Théorème 6: 1) $\mathcal{E}^0$ est partout dense dans $\mathcal{E}$.

2) $\mathcal{E} - \mathcal{E}^0$ est un ensemble de dimension topologique réelle $\leq 2n-4$.

3) Tout point de $\mathcal{E}$ possède un système fondamental de voisinages, dont l'intersection avec $\mathcal{E}^0$ est connexe: par suite $\mathcal{E}$ est localement connexe.

Soit (a, α) un point de $\mathcal{E}$, P un polynôme distingué en z , définissant α en a , A un voisinage suffisamment petit de a , U l'espace des paramètres de la variété $P = 0$ dans A : U est un voisinage de (a, α) et tous les points x de U tels que $\partial P / \partial z(\varphi(x)) \neq 0$ sont réguliers. Si π est la projection canonique de $\varphi(U)$ dans $\mathbb{C}^{n-1}$, "parallèlement à $\mathcal{O}_z$," les points non réguliers de U sont appliqués par $\pi \cdot \varphi$ dans la variété $D = 0$, D étant le résultant de P et $\partial P / \partial z$: on en déduit que $\mathcal{E}^0$ est partout dense dans $\mathcal{E}$ et, par récurrence, que la dimension topologique réelle d'une variété principale est $2n-2$ et que $\mathcal{E} - \mathcal{E}^0$ est de dimension $\leq 2n-4$, ce qui démontre 1) et 2).

Pour démontrer 3), nous utiliserons le

Lemme: soit V une sous-variété principale dans un ouvert A de B . Quel que soit l'ouvert connexe $X \subset A$, $X - (X \cap V)$ est connexe.

V étant rare dans A , il suffit de démontrer le lemme pour X assez petit: on peut alors choisir les coordonnées locales dans X de telle sorte que $V \cap X$ soit dans X la variété des zéros d'un polynôme distingué en z de degré p : V a alors p points au plus dans $\pi^{-1}(x) \cap X$, pour $x \in \mathbb{C}^{n-1}$; $\pi(X)$ étant connexe, on en déduit le lemme.

Reprenons le point (a, α) de $\mathcal{E}$ et le voisinage U de (a, α) introduit tout à l'heure: nous supposerons de plus que $A = \varphi(U)$ est connexe. On a vu (cf. exposé 11) qu'il existait un système fondamental de voisinages W de a , tels que tous les points (z, x) tels que $P(z, x) = 0$ et $x \in \pi(W)$, appartiennent à W ; soit W un tel voisinage connexe et $U = \mathcal{E}(V \cap W)$. Pour montrer que $U \cap \mathcal{E}^0$ est connexe, il

suffit de montrer que l'ensemble U' des points de U où $D \neq 0$ est connexe: or d'après le lemme, $\pi \circ \varphi(U')$ est connexe comme complémentaire de la variété $D = 0$ dans $\pi(W)$. D'autre part à un point de $\pi \circ \varphi(U')$ correspondent exactement p points de U' , définis par les p racines de P ; il suffit alors de montrer que l'on peut obtenir toutes les racines de $P = 0$ par prolongement analytique de l'une d'entre elles. Or on voit facilement que par prolongement analytique, on obtient en tout point de $\pi \circ \varphi(U')$ le même nombre soit p' de racines; les fonctions symétriques élémentaires de ces p' racines sont des fonctions holomorphes, bornées et uniformes sur le complémentaire de $D = 0$, donc partout dans $\pi(W)$; elles sont nulles à l'origine; par suite ces p' racines sont les racines d'un polynôme distingué en z de degré p' , qui divise P ; P étant irréductible, on a $p' = p$.

$\mathcal{E}$ étant localement connexe, une composante connexe d'un ouvert de $\mathcal{E}$ est un ensemble ouvert (et aussi fermé): par suite, si V est une variété principale dans un ouvert A de B , la décomposition de $\mathcal{E}(V)$ en composantes connexes donnera (grâce à l'application φ qui est évidemment propre sur tout sous-ensemble fermé de $\mathcal{E}(V)$) une décomposition de V en réunion de variétés irréductibles dans A (on voit en particulier que la notion d'irréductibilité est indépendante de l'ouvert A dans lequel on plonge le sous-ensemble V , pourvu que V soit une variété dans A). Un compact K de A ne rencontre qu'un nombre fini de composantes irréductibles, car $\varphi^{-1}(K)$ étant compact ne rencontre qu'un nombre fini de composantes connexes. En particulier, si A est réunion dénombrable de compacts, V est réunion au plus dénombrable de variétés irréductibles (on peut démontrer en outre que V est réunion dénombrable de compacts).

Théorème 7: soient V une variété principale irréductible dans A ouvert, f une fonction holomorphe dans A , x un point de V : si l'image de f dans $\mathbb{C}_x$ s'annule sur une composante irréductible de V en x , alors f s'annule sur V tout entier.

f définit une fonction $f^0 = f \circ \varphi$ sur $\mathcal{E}(V)$ et f^0 est analytique sur $\mathcal{E}^0 \cap \mathcal{E}(V)$ (au sens fonction analytique sur une variété à structure analytique complexe). L'hypothèse faite sur f revient à dire que f^0 s'annule identiquement au voisinage d'un point de $\mathcal{E}(V)$, qui est connexe. Il suffit alors de démontrer ceci: soit $\mathcal{E}(V)$ l'espace des paramètres d'une variété V , f^0 une fonction continue sur $\mathcal{E}(V)$, holomorphe sur $\mathcal{E}(V) \cap \mathcal{E}^0$: l'ensemble E des points de $\mathcal{E}(V)$ au voisinage desquels f^0 est identiquement nulle est ouvert et fermé dans $\mathcal{E}(V)$. Il est évident que E est ouvert et que $E \cap \mathcal{E}^0$ est fermé dans $\mathcal{E}(V) \cap \mathcal{E}^0$ par prolongement analytique. Soit (a, α) un point adhérent à E : d'après le théorème 6, on peut trouver un voisinage U de (a, α) tel que $U \cap \mathcal{E}^0$ soit connexe et que f^0 soit identiquement nulle au voisinage d'un point de $U \cap \mathcal{E}^0$ donc dans tout $U \cap \mathcal{E}^0$. $\mathcal{E}^0$ étant dense dans $\mathcal{E}$, on en déduit que $f^0 = 0$ dans tout U et par suite que $(a, \alpha) \in E$, donc que E est fermé dans $\mathcal{E}(V)$.