

# SÉMINAIRE HENRI CARTAN

J-P. SERRE

## Applications algébriques de la cohomologie des groupes. I

*Séminaire Henri Cartan*, tome 3 (1950-1951), exp. n° 5, p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=SHC\\_1950-1951\\_\\_3\\_\\_A5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A5_0)

© Séminaire Henri Cartan  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1950-1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Séminaire H. CARTAN

E.N.S., 1950/51. Topologie algébrique.

## APPLICATIONS ALGÈBRIQUES DE LA COHOMOLOGIE DES GROUPES. I.

(Exposé de J.-P. SERRE, le 18.12.1950)

1.- Préliminaires.

Dans cet exposé et le suivant, il sera exclusivement question de cohomologie des groupes et non d'homologie.

Rappelons qu'étant donné un groupe  $G$  (non nécessairement abélien) et un groupe abélien  $A$  sur lequel opère  $G$  à gauche, on a défini les groupes de cohomologie  $H^i(G, A)$ ; ces groupes peuvent être définis, par exemple, au moyen des cochaînes sur  $G$  à valeurs dans  $A$ , munies du cobord habituel :

$$(\delta f)(x_1, \dots, x_{i+1}) = x_1 \cdot f(x_2, \dots, x_{i+1}) + \sum_{j=1}^i (-1)^j f(x_1, \dots, x_j x_{j+1}, \dots, x_{i+1}) + (-1)^{i+1} f(x_1, \dots, x_i)$$

Si  $A$  est muni d'un ensemble d'opérateurs  $S$  permutant avec les opérateurs de  $G$ , alors on peut faire opérer  $S$  sur les groupes  $H^i(G, A)$ : cela résulte de l'axiome  $(II_c)$  de l'exposé 1, ou bien d'une définition directe à partir des cochaînes. En particulier, si  $A$  est un espace vectoriel sur un corps  $k$ , et si les opérations de  $G$  sont  $k$ -linéaires,  $H^i(G, A)$  est un espace vectoriel sur  $k$ .

Enfin, signalons le résultat suivant :

Soit  $G$  un groupe fini à  $n$  éléments, et  $h \in H^i(G, A)$ ,  $i > 0$ ; on a :  $nh = 0$ .

Soit  $f$  un cocycle de la classe  $h$ , et écrivons que  $(\delta f)(x_1, \dots, x_{i+1}) = 0$ . On obtient une certaine identité faisant intervenir les  $i+1$  variables  $x_1, \dots, x_{i+1}$ . Faisons parcourir à  $x_{i+1}$  le groupe  $G$ , et ajoutons les identités ainsi obtenues. Si l'on pose :

$$g(x_1, \dots, x_{i-1}) = \sum_{x_i \in G} f(x_1, \dots, x_i), \quad \text{on obtient :}$$

$$ng = (-1)^i \delta g, \quad \text{c.q.f.d.}$$

Autre démonstration. On écrit  $A$  comme sous-groupe stable d'un groupe  $G$ -injectif; on s'aperçoit alors, en écrivant la suite exacte de l'axiome  $(4_c)$ ,

qu'il suffit de démontrer le résultat en question pour  $i = 1$ , et que, pour  $i = 1$ , il est presque évident.

2.- Le premier groupe de cohomologie. Application à l'étude des représentations linéaires.

Les 1-cochaînes sont les applications :  $f : G \rightarrow A$ .

Les cocycles sont celles qui vérifient :

$$f(xy) = f(x) + x.f(y) \quad ,$$

on les appelle homomorphismes croisés. Si par hasard  $G$  opère trivialement sur  $A$ , ce sont simplement les homomorphismes de  $G$  dans  $A$ .

Les cobords sont les cochaînes de la forme :

$$f(x) = x.a - a \quad , \quad a \in A \quad .$$

On les appelle homomorphismes croisés principaux. Si  $G$  opère trivialement sur  $A$ , tous les cobords sont donc nuls. D'où : Si  $G$  opère trivialement sur  $A$ , on a :  $H^1(G, A) = \text{Hom}(G, A)$  .

(Signalons que l'on a aussi, dans ce cas,  $H_1(G, A) = G^0 \otimes A$ , où  $G^0$  désigne le quotient de  $G$  par son groupe des commutateurs ; ces deux résultats peuvent aussi s'obtenir par voie topologique, en utilisant le théorème d'Hurewicz et la formule des coefficients universels).

Nous allons maintenant utiliser le groupe  $H^1$  pour étudier les extensions de représentations linéaires.

Considérons une suite exacte :

$$0 \rightarrow V \rightarrow E \rightarrow W \rightarrow 0 \quad ,$$

où  $V, E, W$  désignent des espaces vectoriels sur un corps commutatif  $k$  sur lesquels opère le groupe  $G$  ; bien entendu, on suppose d'une part que les opérateurs de  $k$  et  $G$  commutent (on a donc des représentations linéaires de  $G$ ), et d'autre part que les applications  $i : V \rightarrow E$  et  $p : E \rightarrow W$  commutent tant avec  $k$  qu'avec  $G$ . Nous nous proposons,  $V$  et  $W$  étant donnés, de chercher tous les  $E$  possibles ; on observera que la somme directe  $V + W$  convient toujours.

Pour cela nous allons définir une classe caractéristique dont la donnée déterminera  $E$  sans ambiguïté (à un isomorphisme près). Désignons par  $\text{Hom}(A, B)$  l'espace vectoriel des applications linéaires de l'espace vectoriel  $A$  dans l'espace vectoriel  $B$ . On a la suite exacte :

$$(A) \quad 0 \rightarrow \text{Hom}(W, V) \rightarrow \text{Hom}(W, E) \rightarrow \text{Hom}(W, W) \rightarrow 0 \quad .$$

Que cette suite soit exacte résulte du fait que  $E$  est isomorphe, en tant qu'espace vectoriel, à la somme directe de  $V$  et  $W$ .

On peut faire opérer le groupe  $G$  dans chacun des termes de la suite exacte précédente, en faisant correspondre à l'homomorphisme  $u : A \longrightarrow B$ , l'homomorphisme  $x.u$  défini par :

$$(x.u)(a) = x.u(x^{-1}a) \quad .$$

Pour que  $u$  soit un  $G$ -homomorphisme, il faut et il suffit que  $x.u = u$  pour tout  $x \in G$ . Autrement dit:  $H^0(G, \text{Hom}(A, B)) = \text{Ophom}(A, B)$ .

Appliquons alors à la suite (A) l'axiome de la suite exacte. On obtient :

$$(B) \quad 0 \longrightarrow \text{Ophom}(W, V) \longrightarrow \text{Ophom}(W, E) \longrightarrow \text{Ophom}(W, W) \xrightarrow{\delta} H^1(G, \text{Hom}(W, V))$$

Soit  $I \in \text{Ophom}(W, W)$  l'application identique de  $W$  sur  $W$ , et posons  $J = \delta I$ . On a  $J \in H^1(G, \text{Hom}(W, V))$ , c'est la classe caractéristique cherchée.

Pour que  $E$  soit somme directe (en tant que représentation) de  $V$  et  $W$ , il faut et il suffit que l'on puisse trouver un homomorphisme permis :  $W \xrightarrow{K} E$ , tel que  $K \circ p = I$ ; ceci signifie que  $I$  est contenu dans l'image de  $\text{Ophom}(W, E)$ , ou encore que  $J = 0$ , puisque (B) est une suite exacte. D'où :

Pour que  $E$  soit somme directe des représentations  $V$  et  $W$ , il faut et il suffit que  $J = 0$ .

Calcul de la classe fondamentale.

Ecrivons  $E$  comme somme directe de  $V$  et d'un supplémentaire  $W'$ . Si  $E_x$  désigne l'automorphisme de  $E$  défini par  $x$ , on peut écrire  $E_x$  sous forme d'une matrice :

$$E_x = \begin{pmatrix} V_x & 0 \\ R_x & W_x \end{pmatrix} \quad (\text{dans cette formule, } V_x \text{ et } W_x \text{ ne sont autres que les automorphismes définis par } x \text{ sur } V \text{ et } W).$$

Considérons la 1-cochaîne :  $j(x) = R_x \cdot W_x^{-1}$ , à valeurs dans  $\text{Hom}(W, V)$ ; en remontant à la définition de l'homomorphisme  $\delta$  de la suite exacte on voit que :

La cochaîne  $j(x) = R_x \cdot W_x^{-1}$  est un cocycle qui appartient à la classe  $J$ . Ceci permet donc de calculer explicitement  $J$ , lorsque  $E_x$  est donné.

Corollaire (théorème de Maschke). Soit  $G$  un groupe fini à  $n$  éléments et supposons que la caractéristique de  $k$  ne divise pas  $n$ . Alors  $E$  est

somme directe de  $V$  et  $W$  . (D'où le fait que toute représentation de  $G$  est somme directe de représentations irréductibles).

En effet, d'après le numéro 1, on a  $nJ = 0$ , d'où  $J = 0$ .

Réciproque. Soit  $J$  une classe de cohomologie de  $H^1(G, \text{Hom}(W, V))$ , et soit  $j(x)$  un cocycle de  $J$ . Montrons qu'il existe une représentation  $E_x$  correspondant à  $J$ .

Nous n'avons qu'à définir  $E_x$  par la matrice :

$$E_x = \begin{pmatrix} V_x & 0 \\ j(x)W_x & W_x \end{pmatrix}$$

Il faut simplement vérifier que  $E_x \cdot E_y = E_{xy}$ . Or on a :

$$\begin{pmatrix} V_x & 0 \\ j(x)W_x & W_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_y & 0 \\ j(y)W_y & W_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x V_y & 0 \\ V_x j(y)W_y + j(x)W_x W_y & W_x W_y \end{pmatrix}$$

Il faut donc voir que :

$$j(xy)W(xy) = V_x j(y)W_y + j(x)W_x W_y, \text{ ou :}$$

$$j(xy) = V_x j(y)W_x^{-1} + j(x),$$

ce qui exprime bien que  $j(x)$  est un cocycle. On voit donc que :

Les classes de représentations  $E$ , qui sont des extensions de  $V$  par  $W$ , correspondent biunivoquement aux éléments de  $H^1(G, \text{Hom}(W, V))$ .

Remarque. L'ensemble de ces classes se trouve donc muni d'une structure d'espace vectoriel, celle de  $H^1(G, \text{Hom}(W, V))$ , qui correspond, sous la forme matricielle de la page précédente, à la structure vectorielle des  $R_x$ . On peut donner une définition directe de la somme de deux classes. Cf. Bibliographie.

#### Généralisations diverses.

a) Au lieu d'étudier des représentations linéaires de  $G$ , on aurait pu considérer le cas plus général où on se donne des opérateurs  $S$  commutant avec les opérateurs de  $G$ . Les démonstrations précédentes s'appliquent sans changement, à condition de supposer que  $E$  est somme directe de  $V$  et  $W$  pour les opérateurs de  $S$ .

Il n'est même pas nécessaire de supposer  $W$  abélien.

b) On peut étudier de façon analogue les représentations linéaires d'algèbres associatives, ou d'algèbres de Lie, moyennant une définition convenable

de leur homologie. Par exemple, si  $L$  est une algèbre de Lie semi-simple, on démontre en employant le critère de Cartan et les opérateurs de Casimir que  $H^1(L, A) = 0$ , pour toute représentation de  $L$ , d'où la complète réductibilité des représentations (J.H.C. Whitehead, Quat. Jour. 8, 1937, p. 220-237).

### 3.- Extensions de groupes à noyau abélien.

On se propose d'étudier les suites exactes de la forme :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1 \quad ,$$

où  $A$  est un groupe abélien, noté additivement, sous-groupe invariant d'un groupe  $E$ , le quotient étant le groupe (non nécessairement abélien)  $G$ . Les groupes  $E$  et  $G$  seront notés multiplicativement.

Les éléments de  $E$  opèrent sur  $E$  au moyen des automorphismes intérieurs ; ces derniers respectent  $A$ , et opèrent donc sur  $A$ . Comme  $A$  est abélien,  $A$  opère trivialement sur lui-même par la représentation précédente. On obtient alors par passage au quotient une représentation :  $G \longrightarrow \text{Aut}(A)$  qui sera notée  $\theta$ . On a donc, si  $y \in E$  :

$$p(y).a = y a y^{-1} \quad \text{pour tout } a \in A \quad .$$

A partir de maintenant nous étudierons uniquement les extensions  $E$  de  $A$  par  $G$  qui correspondent à des opérateurs donnés sur  $A$ . De façon précise, on va voir que ces extensions correspondent biunivoquement aux éléments de  $H^2(G, A)$ .

Nous aurons besoin pour cela de l'exercice II de l'exposé 2, exercice qui affirme que l'on ne change rien à la cohomologie de  $G$  en se bornant à considérer les cochaînes nulles lorsque l'une des variables vaut 1 (cochaînes normalisées).

Cela étant, soit  $E$  une extension, et  $k$  une section, c'est-à-dire une application de  $G$  dans  $E$  telle que  $p \circ k = 1$ .

On a :

$$k(x)k(y) = u(x,y).k(xy) \quad (1)$$

avec

$$u(x,y) \in A \quad (2)$$

En outre, si l'on suppose que  $k(1) = 1$ , ce qui est licite, on a  $u(1,y) = u(x,1) = 0$ . On a donc défini une 2-cochaîne normalisée sur  $G$  à valeurs dans  $A$ .

Cette cochaîne (ou système de facteurs de  $E$ ) détermine la structure de

de groupe de  $E$ . De façon précise, identifions  $A \times G$  à  $E$  par l'application :  $(a, x) \longrightarrow a.k(x)$ . On obtient ainsi une multiplication sur  $A \times G$  que l'on détermine en écrivant :

$$\begin{aligned} a.k(x).b.k(y) &= a.k(x)bk(x)^{-1}.k(x)k(y) \\ &= a.k(x)bk(x)^{-1}.u(x,y).k(xy) \end{aligned} \quad (3)$$

D'où la formule du produit :

$$(a, x).(b, y) = (a+x.b + u(x, y), xy) \quad (4)$$

On voit ainsi que deux extensions qui ont même système de facteurs sont isomorphes. Réciproquement, soit  $u$  une 2-cochaîne normalisée, et définissons une structure multiplicative sur  $A \times G$  au moyen de la formule (4). Cette multiplication est-elle associative ?

On a :

$$((a, x)(b, y))(c, z) = (a+xb+u(x, y)+xyc+u(xy, z), xyz) \quad (5)$$

$$(a, x)((b, y)(c, z)) = (a+xb+xyc+xu(y, z)+u(x, yz), xyz) \quad (6)$$

En comparant (5) et (6), on voit que l'associativité est équivalente à :

$$xu(y, z) - u(xy, z) + u(x, yz) - u(x, y) = 0 \quad (7)$$

ce qui signifie exactement que  $u$  est un 2-cocycle.

Cette condition étant supposée satisfaite, on vérifie tout de suite que l'élément  $(0, 1)$  est élément neutre, et que l'inverse de  $(a, x)$  est  $(-x^{-1}.a - u(x^{-1}, x), x^{-1})$ ; on a bien obtenu une extension de  $A$  par  $G$ .

Reste maintenant à voir comment le cocycle  $u$  dépend de la section  $k$  choisie. Si l'on prend une autre section  $k'$ , on peut écrire :

$$k'(x) = v(x)k(x) \quad \text{avec} \quad v(x) \in A \quad \text{et} \quad v(1) = 1 \quad (8)$$

Calculons le système de facteurs  $u'$  relatif à  $k'$  :

$$\begin{aligned} k'(x)k'(y) &= v(x)k(x)v(y)k(y) = v(x)k(x)v(y)k(x)^{-1}k(x)k(y) \\ &= v(x).k(x)v(y)k(x)^{-1}.u(x, y).k(xy) \\ &= v(x).k(x)v(y)k(x)^{-1}.u(x, y).v^{-1}(x, y).k'(xy) \end{aligned} \quad (9)$$

ce qui montre que :

$$k'(x)k'(y) = u'(x, y)k'(xy) \quad (10)$$

avec :

$$u'(x, y) = u(x, y) + x.v(y) - v(xy) + v(x), \quad (11)$$

ou encore :

$$u' = u + \delta v \quad . \quad (12)$$

La formule (12) montre que  $u$  est un cocycle déterminé à un cobord près, autrement dit, définit canoniquement un élément de  $H^2(G, A)$  .

On a bien montré que les classes d'extensions de  $A$  par  $G$  correspondent biunivoquement aux éléments de  $H^2(G, A)$  (lorsque les opérateurs définis par  $G$  sur  $A$  sont donnés).

Exemple - L'extension de  $A$  par  $G$  qui correspond à l'élément  $0$  de  $H^2(G, A)$  s'appelle le produit direct croisé de  $A$  par  $G$  ; elle est caractérisée par l'existence d'une section  $k$  correspondant à un système de facteurs nul, c'est-à-dire par l'existence d'une section qui soit un homomorphisme.  $E$  est alors le produit de  $A$  et du sous-groupe section, image de  $k$  . On notera que ce dernier sous-groupe n'est invariant que si  $G$  opère trivialement sur  $A$  , auquel cas on a :  $E = A \times G$  .

Deux sections qui sont des homomorphismes différent par une 1-cochaîne  $v$  qui, d'après (12) , doit être un cocycle. En particulier, si l'on sait que  $H^1(G, A) = 0$  ,  $v$  est un cobord, ce qui se traduit par l'existence d'un  $a \in A$  tel que :

$$k'(x) = ak(x)a^{-1} \quad (13)$$

Donc :

Si  $H^1(G, A) = 0$  , deux sous-groupes sections sont conjugués par un élément de  $A$  . (Dans la théorie des algèbres de Lie, le résultat analogue, valable pour les algèbres semi-simples, est connu sous le nom de théorème de Malcev)

D'après le numéro 1, ce sera en particulier le cas si  $G$  est fini d'ordre  $n$  , et si la division par  $n$  est possible d'une seule manière dans  $A$  .

Exemple de produit direct croisé.

Le groupe des déplacements de  $R^3$  ,  $E$  , est un produit direct croisé du sous-groupe  $A = R^3$  des translations par le groupe  $SO(3)$  des rotations. Les différents groupes sections sont les rotations autour d'un point de  $R^3$  , ce sont bien des groupes conjugués par des translations, conformément au théorème de Malcev. Pour montrer qu'il n'y a pas d'autres sous-groupes sections (sans utiliser ce dernier théorème), on peut utiliser le fait que tout groupe compact de déplacements a un point fixe (évident, au moyen des centres de gravité).

#### Bibliographie

On la trouvera dans :

Samuel EILENBERG, Bull. amer. math. Soc., 55, 1949, p. 3-27 .