

# SÉMINAIRE HENRI CARTAN

H. CARTAN

## **Théorèmes fondamentaux de la théorie des faisceaux**

*Séminaire Henri Cartan*, tome 3 (1950-1951), exp. n° 19, p. 1-11

<[http://www.numdam.org/item?id=SHC\\_1950-1951\\_\\_3\\_\\_A19\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A19_0)>

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1950-1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Séminaire H. CARTAN,  
E.N.S., 1950/51 . Topologie algébrique.

THÉORÈMES FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE DES FAISCEAUX  
(Exposé de H. CARTAN, 4.6.1951)

1.- Un lemme sur les faisceaux homotopiquement fins.

Lemme : Soit  $f$  un homomorphisme d'un faisceau  $F$  sur un faisceau  $F'$  ,  
et soit  $G$  un faisceau (avec cobord) homotopiquement fin. Alors l'image  $M$  de  
l'homomorphisme défini par  $f$  :

$$\Gamma_{\Phi}(F \circ G) \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(F' \circ G)$$

est homologiquement équivalente à  $\Gamma_{\Phi}(F' \circ G)$  , i.e.: l'homomorphisme des  
modules de cohomologie

$$H(M) \longrightarrow H(\Gamma_{\Phi}(F' \circ G))$$

est un isomorphisme sur. (N.B.: comparer au théorème de l'Exposé 15, page 15-04).

Démonstration : on montre que si  $\alpha \in \Gamma_{\Phi}(F' \circ G)$  et  $\delta\alpha \in M$  , alors  $\alpha$   
a la forme  $\beta + \delta\gamma$  , avec  $\beta \in M$  ,  $\gamma \in \Gamma_{\Phi}(F' \circ G)$  . Or la démonstration du  
théorème de 15, 7, prouve que, pour tout  $\alpha$  de  $\Gamma_{\Phi}(F' \circ G)$  , l'élément  
 $\alpha + \delta k\alpha + k\delta\alpha$  (où  $k$  désigne l'endomorphisme qui intervient dans la  
définition de "homotopiquement fin") appartient à l'image  $M$  de  $\Gamma_{\Phi}(F \circ G)$   
dans  $\Gamma_{\Phi}(F' \circ G)$  . Cela étant, si  $\delta\alpha \in M$  , alors  $k\delta\alpha = \beta \in M$  ; il suffit  
alors de prendre  $\gamma = k\alpha$  pour obtenir le résultat annoncé.

2.- Premier théorème fondamental.

Théorème 1. - Soit, sur un espace  $\mathcal{X}$  , un faisceau  $F$  gradué (à degrés  
 $\geq 0$  ou  $\leq 0$ ) avec cobord de degré  $+1$  , et soit  $C$  un faisceau  $\Phi$ -fonda-  
mental de l'espace  $\mathcal{X}$  (Exp.17, paragraphe 1). Considérons l'homomorphisme de  
faisceaux  $F \longrightarrow C \circ F$  défini par  $K \longrightarrow C$  ( $K$  désignant, comme toujours,  
le faisceau simple défini par l'anneau de base ;  $F$  est identifié à  $K \circ F$  ).  
Pour que l'homomorphisme correspondant

$$(1) \quad H(\Gamma_{\Phi}(F)) \longrightarrow H(\Gamma_{\Phi}(C \circ F))$$

soit un isomorphisme sur, il suffit que, pour tout entier  $p \geq 1$  , le module  
 $H_{\Phi}^p(\mathcal{X}, F)$  , muni de la graduation et du cobord définis par  $F$  , ait une coho-  
mologie nulle. En particulier, il suffit que  $H_{\Phi}^p(\mathcal{X}, F) = 0$  pour tout  $p \geq 1$  .

(Le lecteur comparera aux théorèmes 1 et 1 bis de l'exposé 11).

Démonstration : considérons, sur le module  $\Gamma_{\Phi}(C \circ F) = A$ , la filtration décroissante définie par la graduation de  $F$  :

$$A^n = \sum_{q \geq n} \Gamma_{\Phi}(C \circ F_q).$$

Elle donne naissance à une suite spectrale, pour laquelle le terme  $E_0$  est

$$E_0 = \sum_{p,q} \Gamma_{\Phi}(C_p \circ F_q) \text{ muni du cobord défini par le cobord de } C. \text{ Alors}$$

$$E_1 = \sum_{p,q} H_{\Phi}^p(\mathcal{X}, F_q) \text{ muni du cobord défini par le cobord de } F.$$

Si l'hypothèse du théorème est vérifiée,  $E_1$  se réduit à  $\sum_q H_{\Phi}^0(\mathcal{X}, F_q) = \Gamma_{\Phi}(F)$ , muni du cobord de  $F$ . Alors  $E_2$  est  $H(\Gamma_{\Phi}(F))$ , et toutes les différentielles  $\delta_2, \delta_3, \dots$  de la suite spectrale sont nulles. Comme connu, ceci suffit à établir que (1) est un isomorphisme sur.

### 3.- Conditions suffisantes pour que le théorème 1 soit applicable.

Il suffit que  $F$  soit  $\Phi$ -injectif, ce qui arrivera notamment si  $F$  est fin. En effet, si  $F$  est  $\Phi$ -injectif, on sait (17, paragraphe 1) que  $H_{\Phi}^p(\mathcal{X}, F) = 0$  pour tout  $p \geq 1$ .

Il suffit aussi que  $F$  soit homotopiquement fin. En effet, soit, dans le faisceau  $\Phi$ -fondamental  $C$ ,  $Z_p$  le sous-faisceau des cocycles de dimension  $p$ ; on a (Exp. 16, lemme du paragraphe 3)

$$H_{\Phi}^p(\mathcal{X}, F) = \Gamma_{\Phi}(Z_p \circ F) / \text{Im } \Gamma_{\Phi}(C_{p-1} \circ F);$$

mais, en vertu du lemme ci-dessus (paragraphe 1), le second membre a une cohomologie nulle si  $F$  est homotopiquement fin; donc  $H_{\Phi}^p(\mathcal{X}, F)$ , muni du cobord défini par le cobord de  $F$ , a une cohomologie nulle, quel que soit l'entier  $p \geq 1$ . Donc le théorème 1 est applicable. Ainsi :

Corollaire du théorème 1 : lorsque  $F$  est un faisceau (gradué, avec cobord) homotopiquement fin, l'homomorphisme

$$(1) \quad H(\Gamma_{\Phi}(F)) \longrightarrow H(\Gamma_{\Phi}(C \circ F))$$

est un isomorphisme sur;  $C$  désigne un faisceau  $\Phi$ -fondamental quelconque.

### 4.- Deuxième théorème fondamental.

Théorème 2.- Soit  $C$  un faisceau  $\Phi$ -fondamental de l'espace  $\mathcal{X}$ , et soit  $F$  un faisceau gradué avec cobord de degré  $+1$ . Supposons vérifiée l'une au moins des deux conditions suivantes :

- (a) les degrés de  $C$  sont bornés supérieurement ;
- (b) les degrés de  $F$  sont bornés inférieurement.

Alors la filtration décroissante de  $\Gamma_{\Phi}(C \circ F)$ , définie par la graduation de  $C$ , définit sur  $H(\Gamma_{\Phi}(C \circ F))$  une filtration, et le module gradué associé est le terme  $E_{\infty}$  d'une suite spectrale dont le terme  $E_2$  est  $\sum_{p,q} H^p_{\Phi}(X, H^q(F))$ .

Démonstration : la filtration, sur  $\Gamma_{\Phi}(C \circ F)$ , est définie par les sous-modules

$$B^n = \sum_{p \geq n} \Gamma_{\Phi}(C_p \circ F) .$$

Elle donne naissance à une suite spectrale, pour laquelle le terme  $E_0$  est  $\sum_{p,q} \Gamma_{\Phi}(C_p \circ F_q)$  muni du cobord défini par le cobord de  $F$ . Considérons la suite exacte  $0 \rightarrow Z(F) \rightarrow F \rightarrow B(F) \rightarrow 0$  ; puisque  $C$  est  $\Phi$ -injectif et sans torsion, la suite

$$0 \rightarrow \Gamma_{\Phi}(C \circ Z(F)) \rightarrow \Gamma_{\Phi}(C \circ F) \rightarrow \Gamma_{\Phi}(C \circ B(F)) \rightarrow 0$$

est exacte. Donc, pour l'opérateur cobord de  $F$ , le faisceau des cocycles de  $\Gamma_{\Phi}(C \circ F)$  s'identifie à  $\Gamma_{\Phi}(C \circ Z(F))$ , et le faisceau des cobords à  $\Gamma_{\Phi}(C \circ B(F))$ . Mais la suite

$$0 \rightarrow \Gamma_{\Phi}(C \circ B(F)) \rightarrow \Gamma_{\Phi}(C \circ Z(F)) \rightarrow \Gamma_{\Phi}(C \circ H(F)) \rightarrow 0$$

est exacte, toujours parce que  $C$  est  $\Phi$ -injectif et sans torsion. Donc le faisceau quotient de  $\Gamma_{\Phi}(C \circ Z(F))$  par  $\Gamma_{\Phi}(C \circ B(F))$  s'identifie à  $\Gamma_{\Phi}(C \circ H(F))$ , qui est donc canoniquement identifié au faisceau de cohomologie de  $\Gamma_{\Phi}(C \circ F)$  pour l'opérateur cobord de  $F$ . Ceci prouve que

$$E_1 = \sum_{p,q} \Gamma_{\Phi}(C_p \circ H^q(F)) ,$$

l'opérateur différentiel de  $E_1$  étant défini par le cobord de  $C$ . Il en résulte que  $E_2 = \sum_{p,q} H^p_{\Phi}(X, H^q(F))$ .

Pour achever la démonstration du théorème, il suffit d'observer que l'hypothèse (a) ou (b) permet de conclure que le terme  $E_{\infty}$  de la suite spectrale est bien le module gradué associé au module  $H(\Gamma_{\Phi}(C \circ F))$ , filtré comme il a été dit.

Cas d'application du théorème : la condition (b) est remplie quand la graduation de  $F$  est positive ; - la condition (a) est remplie quand l'espace  $X$  est de  $\Phi$ -dimension finie ; plus exactement, s'il en est ainsi, on peut choisir un faisceau  $\Phi$ -fondamental  $C$  de dimension finie (d'après 17, paragraphe 5, théorème 2).

### 5.- Troisième théorème fondamental.

On l'obtient par simple confrontation des théorèmes 1 et 2 :

Théorème 3.— Soit, sur l'espace  $\mathcal{X}$ , un faisceau gradué  $F$  avec cobord de degré +1, et soit donnée une "famille  $\phi$ " d'ensembles fermés paracompacts. Supposons vérifiées les conditions suivantes :

(1)  $H^p_{\phi}(\mathcal{X}, F)$ , muni de l'opérateur cobord défini par le cobord de  $F$ , a une cohomologie nulle pour tout entier  $p \geq 1$  ;

(2) l'espace  $\mathcal{X}$  est de dimension finie, ou les degrés de  $F$  sont bornés inférieurement ;

alors il existe une suite spectrale, dont le terme  $E_2$  est

$$\sum_{p,q} H^p_{\phi}(\mathcal{X}, H^q(F)) ,$$

et dont le terme  $E_{\infty}$  est le module gradué associé au module  $H(\Gamma_{\phi}(F))$  convenablement filtré.

(La condition (1) est vérifiée notamment lorsque  $F$  est homotopiquement fin, ou lorsque  $F$  est  $\phi$ -injectif).

Corollaire du théorème 3 : soit  $A$  une carapace (graduée, avec cobord de degré +1)  $\phi$ -complète et homotopiquement fine. Si l'une au moins des conditions suivantes est vérifiée :

(a) l'espace  $\mathcal{X}$  est de dimension finie ;

(b) les degrés de  $A$  sont bornés inférieurement,

alors il existe une suite spectrale dont le terme  $E_2$  est

$$H^p_{\phi}(\mathcal{X}, H^q(\mathcal{F}(A))) ,$$

et dont le terme  $E_{\infty}$  est le module gradué associé au module  $H(A_{\phi})$  convenablement filtré.

(Démonstration : il suffit de considérer le faisceau  $F = \mathcal{F}(A)$ , et de remarquer que  $\Gamma_{\phi}(F) = A$  puisque  $A$  est supposée  $\phi$ -complète).

Le théorème 3 et son corollaire sont fondamentaux : le corollaire, par exemple, exprime des relations précises entre la cohomologie du module  $A_{\phi}$ , pris globalement, et les propriétés locales du faisceau de cohomologie  $H(\mathcal{F}(A))$ , en faisant intervenir la  $\phi$ -cohomologie de l'espace  $\mathcal{X}$  relativement à ce faisceau de coefficients.

Voici quelques conséquences du théorème 3 :

Théorème 4.— Soient, sur l'espace  $\mathcal{X}$ , deux faisceaux gradués  $F$  et  $F'$ , avec cobord de degré  $+1$ ; et soit  $f : F \rightarrow F'$  un homomorphisme de faisceaux, compatible avec graduation et cobord. Si l'homomorphisme des faisceaux de cohomologie  $H(F) \rightarrow H(F')$ , défini par  $f$ , est un isomorphisme sur, et si les conditions (1) et (2) du théorème 3 sont satisfaites (par  $F$  et par  $F'$ ), alors l'homomorphisme

$$(2) \quad H(\Gamma_{\Phi}(F)) \longrightarrow H(\Gamma_{\Phi}(F'))$$

est aussi un isomorphisme sur.

(Ce théorème, dû substantiellement à LERAY, ne figurait dans l'exposé 16 de 1948-49 que dans des cas particuliers).

Démonstration : soit  $C$  un faisceau  $\Phi$ -fondamental;  $f$  définit un homomorphisme  $\Gamma_{\Phi}(C \circ F) \rightarrow \Gamma_{\Phi}(C \circ F')$ , compatible avec toutes les structures, et en particulier avec la structure filtrée définie par la graduation de  $C$ . Il en résulte un homomorphisme de la suite spectrale de  $\Gamma_{\Phi}(C \circ F)$  dans celle de  $\Gamma_{\Phi}(C \circ F')$ ; or, pour les termes  $E_2$  de ces suites spectrales, l'homomorphisme

$$H^p_{\Phi}(\mathcal{X}, H(F)) \rightarrow H^p_{\Phi}(\mathcal{X}, H(F'))$$

est un isomorphisme sur, d'après l'hypothèse faite. Donc l'homomorphisme des termes  $E_{\infty}$  est aussi un isomorphisme sur, ce qui implique, par un raisonnement connu, que  $F(\Gamma_{\Phi}(C \circ F) \rightarrow H(\Gamma_{\Phi}(C \circ F'))$  est aussi un isomorphisme sur. Compte tenu du théorème 1, et de compatibilités évidentes, on trouve que (2) est un isomorphisme sur. C.Q.F.D.

Corollaire du théorème 4 : soient  $A$  et  $A'$  deux carapaces  $\Phi$ -complètes et homotopiquement fines. Supposons que l'espace  $\mathcal{X}$  soit de  $\Phi$ -dimension finie, ou que les degrés de  $A$  et  $A'$  soient bornés inférieurement. Alors, si on a un homomorphisme de carapaces  $A \rightarrow A'$ , compatible avec graduation et cobord, et si l'homomorphisme  $H(\mathcal{F}(A)) \rightarrow H(\mathcal{F}(A'))$  qu'il définit est un isomorphisme sur, alors  $H(A_{\Phi}) \rightarrow H(A'_{\Phi})$  est aussi un isomorphisme sur.

Théorème 5.— Soit, sur l'espace  $\mathcal{X}$ , un faisceau gradué  $F$ , avec cobord de degré  $+1$ . Supposons que :

(1)  $F$  soit homotopiquement fin; ;

(2) l'espace  $\mathcal{X}$  soit de  $\Phi$ -dimension finie, ou que les degrés de  $F$  soient bornés inférieurement ;

alors, si  $H^q(F)$  est nul pour tout  $q$  sauf peut-être pour une valeur  $q = k$ , on a un isomorphisme canonique

$$H^{p+k}(\Gamma_{\Phi}(F)) \approx H^p_{\Phi}(\mathcal{X}, H^k(F)) .$$

Démonstration : le théorème 3 est applicable. En outre, les différentielles  $\delta_2, \delta_3, \dots$  de la suite spectrale du théorème 2 sont nulles, pour des raisons de degré, puisque  $H^q(F) = 0$  pour  $q \neq k$ . On sait que, dans ce cas, la suite spectrale définit un isomorphisme canonique du terme  $E_2$  sur la cohomologie du module filtré que l'on étudie, - ici sur  $H(\Gamma_{\Phi}(C \circ F)) \approx H(\Gamma_{\Phi}(F))$ . D'où le résultat.

Corollaire du théorème 5 : Soit  $A$  une carapace  $\Phi$ -complète et homotopiquement fine. Supposons que l'espace  $\mathcal{X}$  soit de  $\Phi$ -dimension finie, ou que les degrés de  $A$  soient bornés inférieurement. Alors, si le faisceau de cohomologie  $H^q(\mathcal{F}(A)) = 0$  pour tout  $q \neq k$ , on a un isomorphisme canonique

$$H^{p+k}_{\Phi}(A) \approx H^p_{\Phi}(\mathcal{X}, H^k(\mathcal{F}(A))) .$$

## 6.- Quelques compatibilités.

L'isomorphisme du corollaire du théorème 5 est un cas particulier d'un homomorphisme qui est défini sous des hypothèses plus générales.

Soit, sur l'espace  $\mathcal{X}$ , une carapace graduée  $A$  avec cobord (de degré +1), dont les supports soient dans la famille  $\Phi$ . Nous supposons constamment que l'espace  $\mathcal{X}$  est de  $\Phi$ -dimension finie, ou que les degrés de  $A$  sont bornés inférieurement. On va, en supposant remplie la condition  $(C_k)$  ci-dessous (où  $k$  désigne un entier), définir un homomorphisme

$$(3) \quad H^{p+k}(A) \longrightarrow H^p_{\Phi}(\mathcal{X}, H^k(\mathcal{F}(A))) \text{ pour tout entier } p .$$

La condition  $(C_k)$  est la suivante :

$$(C_k) \quad H^q(\mathcal{F}(A)) = 0 \text{ pour tout entier } q > k .$$

Tout d'abord, posons  $\mathcal{F}(A) = F$ . L'homomorphisme  $A \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(F)$  définit un homomorphisme  $A \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(C \circ F)$  ( $C$  désignant un faisceau  $\Phi$ -fondamental). Pour définir (3), il suffira donc de définir un homomorphisme

$$H^{p+k}(\Gamma_{\Phi}(C \circ F)) \longrightarrow H^p_{\Phi}(\mathcal{X}, H^k(F)) .$$

Introduisons les sous-faisceaux  $F_1$  et  $F_2$  de  $F$  que voici :  $F_1$  est somme directe des sous-faisceaux homogènes de degrés  $< k$ , et du sous-faisceau

des cocycles de degré  $k$  ;  $F_2$  est somme directe des sous-faisceaux homogènes de degré  $< k$  et du faisceau des cobords de degré  $k$  . On a des isomorphismes naturels

$$F \longleftarrow F_1 \longrightarrow F_1/F_2 = H^k(F) .$$

On en déduit

$$H(\Gamma_{\mathbb{P}}(C \circ F)) \longleftarrow H(\Gamma_{\mathbb{P}}(C \circ F_1)) \longrightarrow H(\Gamma_{\mathbb{P}}(C \circ H^k(F))) = H_{\mathbb{P}}(\mathcal{X}, H^k(F)) ,$$

et, en précisant les degrés,

$$H^{p+k}(\Gamma_{\mathbb{P}}(C \circ F)) \xleftarrow{\beta} H^{p+k}(\Gamma_{\mathbb{P}}(C \circ F_1)) \xrightarrow{\gamma} H_{\mathbb{P}}^p(\mathcal{X}, H^k(F)) .$$

Si la condition  $(C_k)$  est vérifiée, alors  $H(F_1) \longrightarrow H(F)$  est un isomorphisme sur, donc (théorème 4)  $\beta$  est un isomorphisme sur ; on obtient donc un homomorphisme  $H^{p+k}(\Gamma_{\mathbb{P}}(C \circ F)) \longrightarrow H_{\mathbb{P}}^p(\mathcal{X}, H^k(F))$  qui, précédé de  $\alpha : H^{p+k}(A) \longrightarrow H^{p+k}(\Gamma_{\mathbb{P}}(C \circ F))$ , donne l'homomorphisme (3) que l'on voulait définir.

Si en outre  $H^q(F) = 0$  pour  $q < k$ , alors  $H(F_1) \longrightarrow H(F_1/F_2)$  est aussi un isomorphisme sur, donc  $\gamma$  est un isomorphisme sur ; et si enfin  $A$  est une carapace  $\mathbb{P}$ -complète et homotopiquement  $\mathbb{P}$ -fine,  $\alpha$  est un isomorphisme sur (théorème 1). On est alors dans les hypothèses du corollaire du théorème 5, et (3) est un isomorphisme sur ; on laisse au lecteur le soin de vérifier que c'est bien l'isomorphisme obtenu, dans le corollaire du théorème 5, à partir de la suite spectrale.

**Théorème 6.** - L'homomorphisme (3) est fonctoriel. D'une façon précise : si  $A$  et  $A'$  sont 2 carapaces (sur le même espace  $\mathcal{X}$ ) satisfaisant aux conditions posées une fois pour toutes (au début de ce numéro 6) et à la condition  $(C_k)$ , et si l'on a un homomorphisme de carapaces  $A' \longleftarrow A$ , alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^{p+k}(A) & \longrightarrow & H_{\mathbb{P}}^p(\mathcal{X}, H^k(\mathcal{F}(A))) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{p+k}(A') & \longrightarrow & H_{\mathbb{P}}^p(\mathcal{X}, H^k(\mathcal{F}(A'))) \end{array}$$

(où les homomorphismes horizontaux sont ceux du type (3) qu'on vient de définir et où le 2e homomorphisme vertical provient de l'homomorphisme de faisceaux  $\mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{F}(A')$  défini par  $A \longrightarrow A'$ ).

La démonstration est immédiate, en décomposant l'homomorphisme (3) en les homomorphismes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  qui ont servi à le définir.



Avant de donner un autre théorème de compatibilité, nous allons préciser la notion de sous-carapace et de carapace-quotient. Etant donnée une carapace  $A$ , appelons sous-carapace un sous-module  $A'$  jouissant de la propriété suivante : si un élément  $\alpha \in A$  est tel que, pour tout point  $x$ , son image  $\varphi_x(\alpha) \in A_x$  soit dans  $A'_x$ , alors  $\alpha$  appartient à  $A'$ . S'il en est ainsi, appelons  $A''$  le module-quotient  $A/A'$ , posons  $A''_x = A_x/A'_x$ , et définissons les homomorphismes  $A'' \rightarrow A''_x$  par passage aux quotients à partir de  $A \rightarrow A_x$ ; ceci définit  $A''$  comme précarapace, et on vérifie que c'est une véritable carapace. On l'appelle la carapace quotient de  $A$  par la sous-carapace  $A'$ . Alors le faisceau  $\mathcal{F}(A'')$  s'identifie au quotient  $\mathcal{F}(A)/\mathcal{F}(A')$ ;

Théorème 7. - Soit donnée une suite exacte de carapaces

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$$

(i.e.:  $A'$  est sous-carapace de  $A$ , et  $A''$  est la carapace-quotient de  $A$  par  $A'$ ). Supposons en outre que,  $F'$ ,  $F$  et  $F''$  désignant les faisceaux  $\mathcal{F}(A')$ ,  $\mathcal{F}(A)$  et  $\mathcal{F}(A'')$ , la suite

$$(4) \quad 0 \rightarrow H^k(F') \rightarrow H^k(F) \rightarrow H^k(F'') \rightarrow 0$$

soit exacte, et que  $A'$ ,  $A$  et  $A''$  aient leurs supports dans  $\Phi$  et satisfassent à la condition  $(C_k)$  (moyennant laquelle il suffira que  $H^{k-1}(F'')$  soit nul, pour que la suite (4) soit exacte). Alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & H^{p+k}(A') & \rightarrow & H^{p+k}(A) & \rightarrow & H^{p+k}(A'') & \rightarrow & H^{p+k+1}(A') & \rightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \rightarrow & H^p_{\Phi}(\mathcal{X}, H^k(F')) & \rightarrow & H^p_{\Phi}(\mathcal{X}, H^k(F)) & \rightarrow & H^p_{\Phi}(\mathcal{X}, H^k(F'')) & \rightarrow & H^{p+1}_{\Phi}(\mathcal{X}, H^k(F')) & \rightarrow \end{array}$$

où les homomorphismes verticaux sont ceux du type (3), où la première ligne désigne la suite exacte de cohomologie définie par  $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ , et où la deuxième ligne désigne la suite exacte de  $\Phi$ -cohomologie de l'espace  $\mathcal{X}$ , relative à la suite exacte de faisceaux de coefficients (4).

Démonstration : les 2 premiers carrés du diagramme sont commutatifs, en vertu du théorème 6. Reste à montrer la commutativité du dernier carré. Or, avec les notations des pages 6-7, on a des homomorphismes de suites exactes (de faisceaux)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & F' & \rightarrow & F & \rightarrow & F'' & \rightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \rightarrow & F'_1 & \rightarrow & F_1 & \rightarrow & F''_1 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & H^k(F') & \rightarrow & H^k(F) & \rightarrow & H^k(F'') & \rightarrow & 0 \end{array}$$

on en déduit aussitôt la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} H^{p+k}(A'') & \longrightarrow & H^{p+k}(\Gamma_{\Phi}(C \circ F'')) & \longleftarrow & H^{p+k}(\Gamma_{\Phi}(C \circ F_1'')) & \longrightarrow & H^p_{\Phi}(\mathcal{X}, H^k(F'')) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^{p+k+1}(A') & \longrightarrow & H^{p+k+1}(\Gamma_{\Phi}(C \circ F)) & \longleftarrow & H^{p+k+1}(\Gamma_{\Phi}(C \circ F_1)) & \longrightarrow & H^{p+1}_{\Phi}(\mathcal{X}, H^k(F)) \end{array}$$

et ceci établit le théorème.

Le théorème s'applique notamment quand on a une carapace  $A$ , à supports dans  $\Phi$  (et à degrés bornés inférieurement si l'espace n'est pas de  $\Phi$ -dimension finie), et que  $A'$  est la sous-carapace des éléments de  $A$  dont le support est contenu dans un sous-espace ouvert de l'espace  $\mathcal{X}$ ; supposant en outre que  $A$  satisfait à la condition  $(C_k)$ , il en sera de même de  $A'$  et de  $A'' = A/A'$ , et la suite (4) sera exacte. Dans ce cas, la ligne inférieure du diagramme du théorème 7 s'interprète : c'est la suite exacte de  $\Phi$ -cohomologie relative au sous-espace ouvert  $\mathcal{X}'$  et à son complémentaire fermé  $\mathcal{X}''$ , pour le faisceau de coefficients  $H^k(F)$  sur l'espace  $\mathcal{X}$ .

Supposons en outre que  $H^q(F) = 0$  pour  $q \neq k$  (on pose toujours  $F = \mathcal{F}(A)$ ), et que la carapace  $A$  (à supports dans  $\Phi$ ) soit  $\Phi$ -complète et homotopiquement fine; alors  $A'$  est  $\Phi'$ -complète et homotopiquement fine (on note  $\Phi'$  la famille des ensembles de  $\Phi$  contenus dans  $\mathcal{X}'$ ). Cela étant, dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H^{p+k}(A') & \longrightarrow & H^{p+k}(A) & \longrightarrow & H^{p+k}(A'') & \longrightarrow & H^{p+k+1}(A') & \longrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \longrightarrow & H^p_{\Phi'}(\mathcal{X}', H^k(F)) & \longrightarrow & H^p_{\Phi}(\mathcal{X}, H^k(F)) & \longrightarrow & H^p_{\Phi''}(\mathcal{X}'', H^k(F)) & \longrightarrow & H^{p+1}_{\Phi'}(\mathcal{X}', H^k(F)) & \longrightarrow \end{array}$$

où les suites horizontales sont exactes, deux sur trois des homomorphismes verticaux sont des isomorphismes sur; il en résulte ("lemme des cinq") que les autres sont aussi des isomorphismes sur. En résumé :

Corollaire du théorème 7 : lorsque  $A$ , à supports dans  $\Phi$ , satisfait aux conditions du corollaire du théorème 5, la suite exacte de  $\Phi$ -cohomologie relative à un sous-espace ouvert  $\mathcal{X}'$  et à son complémentaire fermé  $\mathcal{X}''$ , pour le faisceau de coefficients  $H^k(\mathcal{F}(A))$ , s'identifie à la suite exacte de cohomologie définie par le module  $A$ , son sous-module  $A'$  et le module-quotient  $A''$  ( $A'$  désignant le sous-module des éléments de  $A$  dont le support est dans l'ouvert  $\mathcal{X}'$ ).

Appendice.-

La carapace définie par les cochaînes du nerf d'un recouvrement fermé localement fini, conduit à la notion générale de carapace basique : c'est une carapace  $A$  où l'on s'est donné des éléments privilégiés  $e_i$  tels que tout élément de  $A$  s'écrive, d'une seule manière, comme combinaison (à coefficients dans l'anneau de base  $K$ ), d'éléments  $e_i$  (la combinaison pouvant être infinie, mais localement finie ; i.e. : chaque point de l'espace possède un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini de supports d'éléments  $e_i$  à coefficient  $\neq 0$ ) ; on suppose en outre que le support d'une combinaison  $\sum_i k_i e_i$  est la réunion des supports des  $e_i$  dont le coefficient  $k_i$  est  $\neq 0$ .

Une carapace basique sera dite localement finie si chaque point possède un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini de supports d'éléments  $e_i$ . Ces supports  $S_i$  seront dits  $\Phi$ -acycliques si  $H^q_{\Phi}(S_i, K) = 0$  pour tout  $q \geq 1$ .

Lemme : soit  $A$  une carapace basique, localement finie, telle que les supports  $S_i$  des éléments de base soient  $\Phi$ -acycliques et satisfassent à la condition :

$(C\Phi)$  pour tout ensemble  $A \in \Phi$ , la réunion des  $S_i$  qui rencontrent  $A$  appartient à  $\Phi$ .

Alors  $H^q_{\Phi}(X, \mathcal{F}(A)) = 0$  pour  $q \geq 1$ .

Démonstration : compte tenu du lemme de 16 de l'Exp.16, (par.3), il suffit de montrer que  $\Gamma_{\Phi}(C_{q-1} \circ F) \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(Z_q \circ F)$  est un homomorphisme sur ; on a posé  $F = \mathcal{F}(A)$ . En vertu de l'hypothèse  $(C\Phi)$ , cela revient à prouver que  $\Gamma_{\Phi}(C_{q-1}, S_i) \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(Z_q, S_i)$  est sur. Or c'est  $H^0_{\Phi}(S_i, C_{q-1}) \longrightarrow H^0_{\Phi}(S_i, Z_q)$  ; en vertu de la suite exacte de  $\Phi$ -cohomologie, relative à la suite exacte de coefficients  $0 \longrightarrow Z_{q-1} \longrightarrow C_{q-1} \longrightarrow Z_q \longrightarrow 0$ , il suffit de montrer que

$$H^1_{\Phi}(S_i, Z_{q-1}) = 0.$$

Or cela résulte facilement de l'hypothèse  $H^q_{\Phi}(S_i, K) = 0$ .

En application de ce lemme, on voit que si une carapace  $A$  est basique, localement finie, à supports  $\Phi$ -acycliques, et satisfait à  $(C\Phi)$ , les conditions du théorème 1 sont remplies pour le faisceau  $F = \mathcal{F}(A)$ . Si en outre les supports de  $A$  sont connexes, on voit aisément que  $A$  est complète ; donc  $A_{\Phi} = \Gamma_{\Phi}(F)$ , et par suite (théorème 1)  $H(A_{\Phi})$  est canoniquement isomorphe à  $H(\Gamma_{\Phi}(C \circ \mathcal{F}(A)))$ .

En conséquence, on peut, dans le corollaire du théorème 3 et ses conséquences, remplacer l'hypothèse "  $A$  est homotopiquement fine et  $\Phi$ -complète", par l'hypothèse : "  $A$  est une carapace basique, localement finie, satisfaisant à  $(C\Phi)$ , et à supports  $\Phi$ -acycliques et connexes".

Par exemple, si les degrés de  $A$  sont  $\geq 0$ , et si  $H^q(\mathcal{F}(A)) = 0$  pour  $q \neq 0$ , le corollaire du théorème 5 dit que  $H^p(A_{\Phi})$  est canoniquement isomorphe à  $H^p_{\Phi}(\mathcal{X}, H^0(\mathcal{F}(A)))$ . Ceci vaut notamment si  $A$  est la carapace définie par un recouvrement localement fini formé d'ensembles fermés connexes et  $\Phi$ -acycliques, de manière que  $(C\Phi)$  soit vérifiée. On retrouve ainsi notamment un théorème de LERAY (Journal de Math. 1946).

---