

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

H. CARTAN

Théorie de la cohomologie des espaces

Séminaire Henri Cartan, tome 3 (1950-1951), exp. n° 17, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A17_0

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1950-1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Séminaire H. CARTAN,
E.N.S., 1950/51. Topologie algébrique.

THÉORIE DE LA COHOMOLOGIE DES ESPACES
(Exposé de H. CARTAN, 1e 30.4.1951)

1.- Φ -résolutions d'un faisceau : faisceaux Φ -injectifs.

Définition : on appelle Φ -résolution d'un faisceau F une suite exacte de faisceaux et d'homomorphismes

$$0 \rightarrow F \rightarrow A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow \dots$$

telle que $H^q_{\Phi}(\mathcal{X}, A_n) = 0$ pour $q \geq 1$ et $n \geq 0$.

Par exemple, une résolution fine de K (Exposé 16) est une Φ -résolution de K , et ceci quelle que soit la famille Φ . Cela résulte de la proposition 1 de l'Exposé 16.

Etant donné une Φ -résolution de F , on lui associe le faisceau gradué avec cobord A , somme directe des A_n . Le module des sections $\Gamma_{\Phi}(A) = \sum \Gamma_{\Phi}(A_n)$ est un module gradué avec cobord ; on peut considérer ses modules de cohomologie $H^n(\Gamma_{\Phi}(A))$.

Théorème 1. - Si un complexe A de faisceaux est une Φ -résolution d'un faisceau F , on a un isomorphisme canonique $H^n(\mathcal{X}, F) \approx H^n(\Gamma_{\Phi}(A))$, pour tout $n \geq 0$.

(Ceci généralise le calcul de $H^n(\mathcal{X}, F)$ par $H^n(\Gamma_{\Phi}(C \circ F))$, C étant un faisceau fondamental (Exposé 16, paragraphe 3)).

Démonstration : par récurrence sur n . Pour $n = 0$, on observe que la suite $0 \rightarrow \Gamma_{\Phi}(F) \rightarrow \Gamma_{\Phi}(A_0) \rightarrow \Gamma_{\Phi}(A_1)$ est exacte, d'où $H^0_{\Phi}(\mathcal{X}, F) = \Gamma_{\Phi}(F) \approx H^0(\Gamma_{\Phi}(A))$. Soit maintenant $n > 0$; soit, pour $i \geq 1$, Z_i le noyau de $A_i \rightarrow A_{i+1}$; les suites exactes $0 \rightarrow F \rightarrow A_0 \rightarrow Z_1 \rightarrow 0, \dots, 0 \rightarrow Z_i \rightarrow A_i \rightarrow Z_{i+1} \rightarrow 0, \dots$, donnent des isomorphismes $H^n_{\Phi}(\mathcal{X}, F) \approx H^{n-1}_{\Phi}(\mathcal{X}, Z_1) \approx \dots \approx H^1_{\Phi}(\mathcal{X}, Z_{n-1}) \approx H^0_{\Phi}(\mathcal{X}, Z_n) / \text{Im } H^0_{\Phi}(\mathcal{X}, A_{n-1})$. Ce dernier, par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{\Phi}(A_{n-1}) & \xrightarrow{\quad} & \Gamma_{\Phi}(Z_n) \\ & \searrow f_{n-1} & \downarrow \text{biunivoque} \\ & & \Gamma_{\Phi}(A_n) \\ & & \downarrow \\ & & \Gamma_{\Phi}(Z_{n+1}) \xrightarrow{\text{biunivoque}} \Gamma_{\Phi}(A_{n+1}) \end{array}$$

est canoniquement isomorphe au quotient du noyau de f_n par l'image de f_{n-1} , c'est-à-dire à $H^n(\Gamma_{\Phi}(A))$.

Définition : un faisceau G est dit Φ -injectif si, pour tout homomorphisme de faisceaux $F \rightarrow F'$ qui applique F sur F' , l'homomorphisme correspondant

$$\Gamma_{\Phi}(G \circ F) \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(G \circ F')$$

applique le premier module sur le second. En particulier, si G est Φ -injectif et sans torsion, alors $\Gamma_{\Phi}(G \circ F)$, considéré comme foncteur du faisceau F , est un foncteur exact (i.e.: transforme les suites exactes de faisceaux en suites exactes de modules).

Si G est Φ -injectif et sans torsion, on a $H^q(\mathcal{X}, G \circ F) = 0$ pour tout $q \geq 1$ et tout faisceau F . En effet, plongeons F dans un fin F' ; on a une suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow G \circ F \rightarrow G \circ F' \rightarrow G \circ F'' \rightarrow 0$$

d'où $H^1_{\Phi}(\mathcal{X}, G \circ F) = \Gamma_{\Phi}(G \circ F'') / \text{Im } \Gamma_{\Phi}(G \circ F')$, qui est nul puisque G est Φ -injectif. On montre ensuite que $H^q_{\Phi}(\mathcal{X}, G \circ F)$ est nul pour tout F , par récurrence sur $q \geq 1$; car si $q \geq 2$, c'est isomorphe à $H^{q-1}_{\Phi}(\mathcal{X}, G \circ F'')$, qui est nul par l'hypothèse de récurrence appliquée à F'' .

Corollaire du théorème 1 : soit une suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow K \rightarrow C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow \dots \rightarrow C_m \rightarrow \dots$$

telle que les C_n soient Φ -injectifs et sans torsion (pour $n \geq 0$). Alors $H^n_{\Phi}(\mathcal{X}, F) \approx H^n(\Gamma_{\Phi}(C \circ F))$.

En effet, les $C_n \circ F$ constituent une Φ -résolution du faisceau F . (Ce résultat généralise celui obtenu (Exposé 16) dans le cas où les C_n sont fins).

Le faisceau $C = \sum_{n \geq 0} C_n$ (faisceau gradué avec cobord) s'appellera un faisceau Φ -fondamental s'il satisfait à l'hypothèse de l'énoncé précédent.

2.- Sous-espaces ouverts, sous-espaces fermés.

Soit $\mathcal{Y}$ un sous-espace ouvert (resp. fermé) de l'espace $\mathcal{X}$. Pour toute famille Φ sur $\mathcal{X}$, considérons la sous-famille $\Phi_{\mathcal{Y}}$ des ensembles de Φ qui sont contenus dans $\mathcal{Y}$ (lorsque $\mathcal{Y}$ est fermé, les ensembles de $\Phi_{\mathcal{Y}}$ ne sont autres que les intersections de $\mathcal{Y}$ avec les ensembles de Φ). On vérifie sans peine que, dans chacun des 2 cas ($\mathcal{Y}$ ouvert, $\mathcal{Y}$ fermé), $\Phi_{\mathcal{Y}}$ satisfait

aux axiomes des familles Φ . La famille $\Phi_{\mathcal{U}}$ s'appellera la famille induite par Φ sur le sous-espace $\mathcal{U}$.

Etant donné un faisceau F sur l'espace $\mathcal{X}$, on a défini (Exp. 14, 4) le faisceau induit par F sur le sous-espace $\mathcal{U}$; ce faisceau F' est tel que, pour tout point $y \in \mathcal{U}$, $F'_y = F_y$, la topologie de F' étant la topologie induite par celle de F . (On suppose l'ensemble F' plongé canoniquement dans l'ensemble F).

Nous allons aussi envisager un point de vue en quelque sorte inverse :

Proposition 1.— Etant donné arbitrairement un faisceau G sur le sous-espace ouvert (resp. fermé) $\mathcal{U}$, il existe sur l'espace ambiant $\mathcal{X}$ un faisceau $\bar{G}$ et un seul qui induise G sur $\mathcal{U}$ et induise le faisceau nul sur le complémentaire $\mathcal{X} \setminus \mathcal{U}$.

Tout d'abord, l'ensemble $\bar{G}$ se compose nécessairement de la réunion des modules $\bar{G}_x$ définis par $\bar{G}_x = G_x$ pour $x \in \mathcal{U}$, $\bar{G}_x = \{0\}$ pour $x \notin \mathcal{U}$. Pour définir la topologie de $\bar{G}$, on doit attacher à chaque point $x \in \mathcal{X}$ et à chaque élément $\alpha \in \bar{G}_x$ une section de $\bar{G}$ au-dessus d'un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de x , section qui contienne l'élément α . Or si $x \notin \mathcal{U}$, cette section doit être nulle au-dessus d'un voisinage assez petit de x ; et si $x \in \mathcal{U}$, elle doit couper G suivant une section de G au-dessus de $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$, et elle doit évidemment être nulle au-dessus de $\mathcal{V} \cap (\mathcal{X} \setminus \mathcal{U})$; en outre, l'ensemble des points où elle est nulle doit être ouvert.

Si $\mathcal{U}$ est ouvert, on aura donc un système fondamental d'ouverts de la topologie de $\bar{G}$, en prenant d'une part les sections de G au-dessus des ouverts de $\mathcal{U}$, d'autre part les sections nulles au-dessus des ouverts de $\mathcal{X}$. On vérifie que ceci définit bien sur $\bar{G}$ une topologie de faisceau.

Si $\mathcal{U}$ est fermé, on aura un système fondamental d'ouverts de la topologie de $\bar{G}$ en prenant arbitrairement un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathcal{X}$, plaçant au-dessus de $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$ une section de G , et plaçant au-dessus de $\mathcal{V} \cap (\mathcal{X} \setminus \mathcal{U})$ la section nulle. Ici encore, on obtient bien sur $\bar{G}$ une topologie de faisceau.

La proposition 1 est ainsi établie. Si, à chaque section γ de G (définie par une application continue $y \mapsto \gamma(y) \in G_y$ de $\mathcal{U}$ dans G), on associe l'application de $\mathcal{X}$ dans $\bar{G}$ définie par $x \mapsto \gamma(x)$ pour $x \in \mathcal{U}$, et $x \mapsto 0 \in \bar{G}_x$ si $x \notin \mathcal{U}$, on obtient une section de $\bar{G}$ au-dessus de $\mathcal{X}$, tout au moins dans chacun des 2 cas suivants : 1° $\mathcal{U}$ est fermé ; 2° $\mathcal{U}$ est ouvert, et le support de γ (sous-ensemble fermé de $\mathcal{U}$) est fermé dans $\mathcal{X}$.

Cette condition sera toujours remplie si $\gamma \in \Gamma_{\Phi_Y}(G)$, Φ_Y étant la famille induite sur Y par une famille Φ de l'espace ambiant X . D'où :

Proposition 2. - Y étant toujours un sous-espace ouvert (resp. fermé) de X , le prolongement de section défini ci-dessus définit, pour toute famille Φ sur X , un isomorphisme canonique entre les modules de sections $\Gamma_{\Phi_Y}(G)$ et $\Gamma_{\Phi}(\bar{G})$; ceci, pour tout faisceau G sur le sous-espace Y .

Proposition 3. - Soit une famille Φ sur l'espace X , et soit Φ' la famille induite par Φ sur un sous-espace ouvert (resp. fermé) Y . Si un faisceau F , sur l'espace X , est Φ -injectif, le faisceau F' qu'il induit sur Y est Φ' -injectif.

En effet, soit, sur Y , un homomorphisme de faisceaux $G_1 \rightarrow G_2$ qui soit un homomorphisme sur. Alors $\bar{G}_1 \rightarrow \bar{G}_2$ est, sur l'espace X , un homomorphisme sur, et par suite l'homomorphisme $\Gamma_{\Phi}(F \circ \bar{G}_1) \rightarrow \Gamma_{\Phi}(F \circ \bar{G}_2)$ est sur, puisque F est supposé Φ -injectif. Or cet homomorphisme s'identifie à : $\Gamma_{\Phi'}(F' \circ G_1) \rightarrow \Gamma_{\Phi'}(F' \circ G_2)$, et puisque ce dernier est sur, il est prouvé que F' est Φ' -injectif.

Corollaire : un faisceau Φ -fondamental sur X (16, numéro 3) induit sur Y un faisceau Φ' -fondamental.

Ce corollaire, la proposition 2, et le calcul de la cohomologie à l'aide d'un faisceau Φ -fondamental (corollaire du théorème 1) entraînent l'important résultat :

Proposition 4. - Pour tout faisceau G sur le sous-espace ouvert (resp. fermé) Y , et pour toute famille Φ sur l'espace X , les modules de cohomologie

$$H_{\Phi_Y}^n(Y, G) \quad \text{et} \quad H_{\Phi}^n(X, \bar{G})$$

sont canoniquement isomorphes.

3.- La suite exacte de cohomologie relative à un sous-espace ouvert et à son complémentaire fermé.

Soit X' un sous-espace ouvert de X , et X'' son complémentaire fermé. Pour tout faisceau F sur X , soient F' et F'' les faisceaux induits sur X' et X'' respectivement. Pour toute famille Φ sur X , soient Φ' et Φ'' les familles induites sur X' et X'' . Le faisceau $\bar{F}'$ (prolongeant F' au-dessus de X') s'identifie à un sous-faisceau de F (Exp. 14, numéro 3); le faisceau $\bar{F}''$ s'identifie au quotient de F par $\bar{F}'$. La suite exacte

$0 \rightarrow \overline{F'} \rightarrow F \rightarrow \overline{F''} \rightarrow 0$ donne naissance à une suite exacte de cohomologie

$$(1) \quad \dots H_{\Phi}^q(\mathcal{X}, \overline{F'}) \rightarrow H_{\Phi}^q(\mathcal{X}, F) \rightarrow H_{\Phi}^q(\mathcal{X}, \overline{F''}) \rightarrow H_{\Phi}^{q+1}(\mathcal{X}, \overline{F'}) \rightarrow \dots$$

ce qui, compte tenu des isomorphismes de la proposition 3, donne une suite exacte :

$$(2) \quad \dots H_{\Phi}^q(\mathcal{X}', F') \rightarrow H_{\Phi}^q(\mathcal{X}, F) \rightarrow H_{\Phi}^q(\mathcal{X}'', F'') \rightarrow H_{\Phi}^{q+1}(\mathcal{X}', F') \rightarrow \dots$$

Dans le cas où Φ est la famille des compacts de $\mathcal{X}'$ supposé localement compact, Φ' est la famille des compacts de $\mathcal{X}'$ et Φ'' la famille des compacts de $\mathcal{X}''$; on retrouve la classique suite exacte de la cohomologie à supports compacts (le cas le plus simple étant celui où le faisceau F est constant ; les faisceaux F' et F'' sont alors constants).

Dans le cas général, on peut donner l'interprétation suivante des homomorphismes de cette suite exacte : soit C un faisceau Φ -fondamental de l'espace $\mathcal{X}$; le faisceau induit C' (resp. C'') est Φ' -fondamental (resp. Φ'' -fondamental) en vertu du corollaire de la proposition 3. On sait alors que la suite (1) est la suite exacte de cohomologie relative à la suite exacte de modules gradués à cobord :

$$0 \rightarrow \Gamma_{\Phi}(C \circ \overline{F'}) \rightarrow \Gamma_{\Phi}(C \circ F) \rightarrow \Gamma_{\Phi}(C \circ \overline{F''}) \rightarrow 0.$$

Or cette suite s'identifie à

$$0 \rightarrow \Gamma_{\Phi'}(C' \circ F') \rightarrow \Gamma_{\Phi}(C \circ F) \rightarrow \Gamma_{\Phi''}(C'' \circ F'') \rightarrow 0,$$

et les modules de cohomologie des modules de cette suite sont précisément $H_{\Phi}(\mathcal{X}', F')$, $H_{\Phi}(\mathcal{X}, F)$, $H_{\Phi}(\mathcal{X}'', F'')$. En résumé : si l'on utilise le module

$\Gamma_{\Phi}(C \circ F)$ pour calculer la Φ -cohomologie de $\mathcal{X}$ à coefficients dans F , le sous-module de $\Gamma_{\Phi}(C \circ F)$ formé des éléments dont le support est contenu dans l'ouvert $\mathcal{X}'$ permet de calculer la Φ' -cohomologie de $\mathcal{X}'$ à coefficients dans F' , et le module-quotient permet de calculer la Φ'' -cohomologie de $\mathcal{X}''$ à coefficients dans F'' . Alors module, sous-module et module-quotient donnent naissance à la suite exacte de cohomologie (2).

4.- Sur la notion de faisceau Φ -injectif.

Soit une famille Φ sur l'espace $\mathcal{X}$. Pour tout ouvert X dont l'adhérence appartient à Φ , la famille induite Φ_X n'est autre que la famille de tous les fermés de l'espace ambiant qui sont contenus dans X .

Lemme : pour qu'un faisceau F sur $\mathcal{X}$ soit Φ -injectif, il faut et il suffit que, pour tout ouvert X dont l'adhérence appartient à Φ , et pour

tout homomorphisme d'un faisceau G_1 sur un faisceau G_2 , l'homomorphisme

$$\Gamma_{\Phi_X}(F \circ G_1) \longrightarrow \Gamma_{\Phi_X}(F \circ G_2)$$

soit un homomorphisme sur.

La condition est suffisante, car Γ_{Φ} est évidemment la réunion des Γ_{Φ_X} quand X parcourt l'ensemble des X ouverts tels que $\bar{X} \in \Phi$. La condition est nécessaire, car soient G'_1 et G'_2 les faisceaux induits sur X ; alors $\overline{G'_1} \longrightarrow \overline{G'_2}$ est un homomorphisme sur, donc, si F est Φ -injectif, $\Gamma_{\Phi}(F \circ \overline{G'_1}) \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(F \circ \overline{G'_2})$ est un homomorphisme sur. Or il s'identifie à $\Gamma_{\Phi_X}(F \circ G_1) \longrightarrow \Gamma_{\Phi_X}(F \circ G_2)$.

Comme conséquence de ce lemme, on obtient aussitôt :

Proposition 5. - Si on a deux familles Φ_1 et Φ_2 sur un même espace $\mathcal{X}$, telles que $\Phi_1 \supset \Phi_2$, tout faisceau Φ_1 -injectif est Φ_2 -injectif.

5.- La dimension cohomologique.

Un faisceau gradué C est dit de dimension $\leq n$ si $C_q = 0$ pour $q > n$. On se propose de chercher si un espace donné $\mathcal{X}$ possède un faisceau Φ -fondamental de dimension $\leq n$.

Théorème 2. - Un espace $\mathcal{X}$ et une famille Φ étant donnés, ainsi qu'un entier $n \geq 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) pour tout faisceau Φ -fondamental C , le sous-faisceau Z_n des cocycles de C de dimension n est Φ -injectif ;
- (b) il existe un faisceau Φ -fondamental de dimension $\leq n$;
- (c) les modules de cohomologie $H^q_{\Phi}(\mathcal{X}, F)$ sont nuls pour tout faisceau F et tout entier $q > n$;
- (d) les modules de cohomologie $H^{n+1}_{\Phi}(\mathcal{X}, F)$ sont nuls pour tout faisceau F .

Démonstration : (a) $\implies$ (b), car si Z_n est Φ -injectif, la suite exacte

$$C_0 \longrightarrow \dots \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow Z_n \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

est un faisceau Φ -fondamental.

(b) $\implies$ (c), puisque la Φ -cohomologie de l'espace peut être calculée à l'aide du faisceau Φ -fondamental de dimension $\leq n$ dont l'existence est postulée par (b).

(c) $\implies$ (d) trivialement.

(d) $\implies$ (a), car soit $0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux ; on veut montrer que, pour tout faisceau Φ -fondamental C , le faisceau Z_n est tel que $\Gamma_\Phi(Z_n \circ G) \rightarrow \Gamma_\Phi(Z_n \circ G'')$ est un homomorphisme sur. Or, si $n = 0$, c'est l'homomorphisme $\Gamma_\Phi(G) \rightarrow \Gamma_\Phi(G'')$, puisque $Z_0 = K$; alors la suite exacte $\Gamma_\Phi(G) \rightarrow \Gamma_\Phi(G'') \rightarrow H_\Phi^1(\mathcal{X}, G')$, dont le dernier terme est nul d'après l'hypothèse (d), prouve l'assertion. Supposons maintenant $n \geq 1$; d'après le lemme de 16, 3, $H_\Phi^n(\mathcal{X}, G) = H^n(\Gamma_\Phi(C \circ G))$ est le quotient de $\Gamma_\Phi(Z_n \circ G)$ par l'image de $\Gamma_\Phi(C_{n-1} \circ G)$; l'homomorphisme $G \rightarrow G''$ définit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \Gamma_\Phi(C_{n-1} \circ G) & \rightarrow & \Gamma_\Phi(Z_n \circ G) & \rightarrow & H_\Phi^n(\mathcal{X}, G) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \Gamma_\Phi(C_{n-1} \circ G'') & \rightarrow & \Gamma_\Phi(Z_n \circ G'') & \rightarrow & H_\Phi^n(\mathcal{X}, G'') & \rightarrow & 0 \end{array}$$

où les suites horizontales sont exactes. Le 3e homomorphisme vertical est sur, parce que $H_\Phi^{n+1}(\mathcal{X}, G')$ est nul par hypothèse ; le 1er homomorphisme vertical est sur, parce que C_{n-1} est Φ -injectif ; de là résulte, par un raisonnement connu, que le second homomorphisme vertical est sur. Ceci achève la démonstration du théorème.

Définition : on dit qu'un espace $\mathcal{X}$ est de Φ -dimension $\leq n$ si le module de cohomologie $H_\Phi^q(\mathcal{X}, F)$ est nul pour tout faisceau F et tout entier $q > n$. De là on déduit immédiatement la définition de la Φ -dimension, lorsque celle-ci est finie.

Le théorème 1 donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un espace soit de Φ -dimension $\leq n$; on notera qu'un tel espace possède un faisceau Φ -fondamental de dimension $\leq n$. Si $\Phi_1 \supset \Phi_2$, et si $\mathcal{X}$ est de Φ_1 -dimension $\leq n$, $\mathcal{X}$ est a fortiori de Φ_2 -dimension $\leq n$ (en vertu de la proposition 5 et du théorème 2). Si $\mathcal{X}$ est de Φ -dimension $\leq n$, et si $\mathcal{Y}$ est un sous-espace ouvert (resp. fermé) de $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ est de Φ' -dimension $\leq n$ (Φ' désignant la famille induite par Φ sur $\mathcal{Y}$) ; cela résulte aussitôt du corollaire de la proposition 3, et du théorème 2.

On verra plus loin que si l'on adopte la définition classique de la dimension d'un espace paracompact (en faisant usage des recouvrements ouverts localement finis), et si une famille Φ est telle que ses ensembles soient de dimension (classique) $\leq n$, alors l'espace $\mathcal{X}$ est de Φ -dimension $\leq n$.

6.- Produits en cohomologie.

Nous laisserons de côté ce qui concerne les produits quand on considère deux espaces et leur espace-produit, et nous nous consacrerons uniquement au cas où tout se passe sur le même espace $\mathcal{X}$.

Soient deux familles Φ_1 et Φ_2 sur $\mathcal{X}$; et soit Φ l'intersection de ces familles : elle satisfait aussi aux axiomes voulus. Soit C_1 un faisceau Φ_1 -fondamental, et C_2 un faisceau Φ_2 -fondamental. Considérons le faisceau $C_1 \circ C_2$, muni de la graduation totale, et de l'opérateur cobord total, à la manière habituelle du produit tensoriel de 2 modules gradués avec cobord. C'est un faisceau Φ -fondamental.

En effet, d'une part sa cohomologie est triviale, en raison du théorème classique "de Künneth". D'autre part, puisque C_1 est Φ_1 -injectif, $C_1 \circ C_2$ l'est aussi (il suffit de remonter à la définition de Φ_1 -injectif), et est a fortiori Φ -injectif (proposition 5).

Soient alors F_1 et F_2 deux faisceaux quelconques de coefficients ; $H_{\Phi_1}^p(\mathcal{X}, F_1)$ s'identifie au p -ième module de cohomologie de $\Gamma_{\Phi_1}(C_1 \circ F_1)$, $H_{\Phi_2}^q(\mathcal{X}, F_2)$ s'identifie au q -ième module de cohomologie de $\Gamma_{\Phi_2}(C_2 \circ F_2)$, et $H_{\Phi}^n(\mathcal{X}, F_1 \circ F_2)$ s'identifie au n -ième module de cohomologie de $\Gamma_{\Phi}(C_1 \circ C_2 \circ F_1 \circ F_2)$. Or on a un homomorphisme canonique

$$\Gamma_{\Phi_1}(C_1 \circ F_1) \otimes \Gamma_{\Phi_2}(C_2 \circ F_2) \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(C_1 \circ C_2 \circ F_1 \circ F_2),$$

qui est compatible avec les graduations et les cobords (en prenant, dans le produit tensoriel $\Gamma_{\Phi_1} \otimes \Gamma_{\Phi_2}$, la graduation totale et le cobord total). En passant à la cohomologie, on obtient donc un homomorphisme

$$(Pr) \quad H_{\Phi_1}^p(\mathcal{X}, F_1) \otimes H_{\Phi_2}^q(\mathcal{X}, F_2) \longrightarrow H_{\Phi}^{p+q}(\mathcal{X}, F_1 \circ F_2).$$

Cet homomorphisme est indépendant du choix particulier des faisceaux fondamentaux C_1 et C_2 , comme le prouve le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma_{\Phi_1}(C_1 \circ F_1) & \otimes & \Gamma_{\Phi_2}(C_2 \circ F_2) & \longrightarrow & \Gamma_{\Phi}(C_1 \circ C_2 \circ F_1 \circ F_2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_{\Phi_1}(C_1 \circ C'_1 \circ F_1) & \otimes & \Gamma_{\Phi_2}(C_2 \circ C'_2 \circ F_2) & \longrightarrow & \Gamma_{\Phi}(C_1 \circ C'_1 \circ C_2 \circ C'_2 \circ F_1 \circ F_2) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \Gamma_{\Phi_1}(C'_1 \circ F_1) & \otimes & \Gamma_{\Phi_2}(C'_2 \circ F_2) & \longrightarrow & \Gamma_{\Phi}(C'_1 \circ C'_2 \circ F_1 \circ F_2) \end{array}$$

L'homomorphisme (Pr) défini ci-dessus est celui qui, par définition, donne

la structure "multiplicative" de la cohomologie.

La multiplication est associative, dans un sens évident ; cela provient de l'associativité du produit tensoriel : $(C_1 \circ C_2) \circ C_3 \approx C_1 \circ (C_2 \circ C_3)$. Elle est anticommutative, dans le sens suivant : le diagramme que voici est commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_{\Phi_1}^p(\mathcal{X}, F_1) \otimes H_{\Phi_2}^q(\mathcal{X}, F_2) & \longrightarrow & H_{\Phi}^{p+q}(\mathcal{X}, F_1 \circ F_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{\Phi_2}^p(\mathcal{X}, F_2) \otimes H_{\Phi_1}^q(\mathcal{X}, F_1) & \longrightarrow & H_{\Phi}^{p+q}(\mathcal{X}, F_2 \circ F_1) \end{array} ,$$

où les homomorphismes horizontaux sont les homomorphismes (Pr) de la multiplication, où le 2^e homomorphisme vertical est celui défini par l'isomorphisme canonique $F_1 \circ F_2 \longrightarrow F_2 \circ F_1$ des faisceaux de coefficients, et où le premier homomorphisme vertical est défini par : $u \otimes v \longrightarrow (-1)^{pq} v \otimes u$, pour u de degré p et v de degré q . La démonstration est immédiate, compte tenu du fait que l'application de $C_1 \circ C_2$ sur $C_2 \circ C_1$ définie par $u \otimes v \longrightarrow (-1)^{pq} v \otimes u$ est compatible avec les cobords.

Cas où l'on s'est donné un homomorphisme de $F_1 \circ F_2$ dans un faisceau F . Alors $H_{\Phi}^{p+q}(\mathcal{X}, F_1 \circ F_2)$ s'envoie canoniquement dans $H_{\Phi}^{p+q}(\mathcal{X}, F)$; on obtient donc un homomorphisme multiplicatif :

$$H_{\Phi_1}^p(\mathcal{X}, F_1) \otimes H_{\Phi_2}^q(\mathcal{X}, F_2) \longrightarrow H_{\Phi}^{p+q}(\mathcal{X}, F) .$$

En particulier, si F est un faisceau d'algèbres, on obtient une structure d'algèbre graduée sur $H_{\Phi}(\mathcal{X}, F)$; c'est l'algèbre de cohomologie de l'espace $\mathcal{X}$, à coefficients dans le faisceau d'algèbres F , pour une famille Φ donnée. Si le faisceau d'algèbres F est associatif, l'algèbre de cohomologie est associative ; si le faisceau est commutatif, l'algèbre de cohomologie est anticommutative.

Cas où C est une algèbre différentielle. Soit C un faisceau Φ -fondamental, qui soit un faisceau d'algèbres différentielles graduées (i.e. : la loi de multiplication, dans chaque algèbre, est telle que $\delta(uv) = (\delta u)v + (-1)^p u(\delta v)$, pour u de degré p). C'est par exemple le cas lorsque C est le faisceau d'Alexander-Spanier (la multiplication étant donnée par la formule classique) ; ou encore lorsque C est le faisceau des formes différentielles d'une variété différentiable (la multiplication étant la multiplication extérieure des formes différentielles). Alors l'homomorphisme

$C \circ C \longrightarrow C$ défini par cette structure multiplicative est compatible avec les cobords ; d'après l'Exp. 16, n°4, l'homomorphisme $\Gamma_{\Phi}(C \circ C \circ F) \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(C \circ F)$ qu'il définit donne naissance, quand on passe à la cohomologie, à l'isomorphisme identique $H_{\Phi}^n(C, F) \longrightarrow H_{\Phi}^n(C, F)$. Ainsi, lorsque C est un faisceau d'algèbres différentielles, et que C est à la fois Φ_1 -injectif et Φ_2 -injectif, l'homomorphisme

$$\Gamma_{\Phi_1}(C \circ F_1) \otimes \Gamma_{\Phi_2}(C \circ F_2) \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(C \circ F_1 \circ F_2) \text{ défini par la}$$

structure multiplicative de C , donne naissance à l'homomorphisme (Pr) de la structure multiplicative de la cohomologie. En particulier : si en outre F est un faisceau d'algèbres, $\Gamma_{\Phi}(C \circ F)$ devient une algèbre différentielle, et son algèbre de cohomologie s'identifie (structure multiplicative comprise) à l'algèbre de Φ -cohomologie de l'espace, à coefficients dans F .

7.- Recouvrement de Čech.

Nous voulons signaler, sans aucun détail, comment la considération des recouvrements ouverts localement finis de l'espace X peut conduire à la Φ -cohomologie de cet espace. Il suffira de définir, à l'aide de ces recouvrements, une "théorie de la cohomologie" qui satisfasse aux axiomes de l'exposé 16.

Pour un tel recouvrement r , soit N_r le complexe simplicial, "nerf" du recouvrement r ; à chaque "simplexe" $s \in N_r$ on associe l'ensemble ouvert $X(s)$, intersection (non vide) des ouverts associés aux "sommets" de ce simplexe. Etant donné un faisceau F , on va considérer les "cochaînes" f , fonctions des simplexes s telles que $f(s) \in \Gamma(F, X(s))$ (module des sections de F au-dessus de l'ouvert $X(s)$). Elles forment un module gradué avec cobord, que nous noterons $C(r, F)$. On définit le "support" d'une cochaîne f comme la réunion des supports des valeurs $f(s)$ pour tous les simplexes s . Etant donnée une famille Φ , on considère le module $C_{\Phi}(r, F)$ des cochaînes dont le support appartient à Φ . Ses modules de cohomologie seront notés $H_{\Phi}^q(r, F)$.

Grâce à la notion de recouvrement subordonné à un autre, on peut considérer la limite inductive des modules $H_{\Phi}^q(r, F)$ quand r parcourt l'ensemble (filtrant) des recouvrements ouverts localement finis. C'est cette limite inductive que l'on prend comme module $H_{\Phi}^q(X, F)$ de la théorie à définir. Pour achever de définir les données d'une telle théorie, la seule difficulté consiste

à définir un homomorphisme $H_{\mathbb{Q}}^q(\mathcal{X}, F'') \longrightarrow H_{\mathbb{Q}}^{q+1}(\mathcal{X}, F')$ pour toute suite exacte $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$; nous n'insisterons pas sur ce point, ni sur la vérification des axiomes qui permettrait de prouver que les

$H_{\mathbb{Q}}^q(\mathcal{X}, F)$ définis ici sont bien les modules de $\mathbb{Q}$ -cohomologie de l'espace. Il en résulterait ceci :

Si le "support" du faisceau F (i.e.: plus petit ensemble fermé tel que F induise zéro sur son complémentaire) rencontre chaque ensemble de $\mathbb{P}$ suivant un espace de dimension (classique) au plus égale à n , alors $H_{\mathbb{Q}}^q(\mathcal{X}, F) = 0$ pour $q > n$.
