H. Cartan

Espaces avec groupe d'opérateurs. II : la suite spectrale ; applications

Séminaire Henri Cartan, tome 3 (1950-1951), exp. n° 12, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A12_0>

Séminaire H. CARTAN,
E.N.S., 1950/51 . Topologie algébrique.

ESPACES AVEC GROUPE D'OPÉRATEURS

II : La suite spectrale ; applications.

(Exposé de H. CARTAN, le 26.2.1951)

Les notations de l'exposé précédent sont conservées.

8.- Le théorème fondamental pour l'homologie.

On va définir une nouvelle structure filtrée sur $X \underset{\pi}{\otimes} C$, au moyen cette fois de la graduation de C . Posons

$$L_p = \sum_{n \leq p} X \underset{\pi}{\otimes} C_n$$, qui est stable pour ∂ et compatible avec la

graduation ("degré total"). Une telle filtration est dite croissante, parce que $L_p \subset L_{p+1}$. Cette filtration définit une filtration croissante sur $H(X \underset{\pi}{\otimes} C) = H(\pi , X)$: on considère les images des L_p dans $H(X \underset{\pi}{\otimes} C)$. Cette filtration de $H(\pi , X)$ est compatible avec la graduation. De plus, la filtration des L_p donne naissance à une suite spectrale (cf 8) :

$$E^1 = \sum_p H(L_p/L_{p-1}) \ , \quad E^2 = H(E^1) \ , \quad \ldots \ , \quad E^{k+1} = H(E^k) \ , \quad \ldots \quad E^{\infty} \ ,$$

les homologies de E^1 , E^2 , ... étant relatives à des opérateurs d^1 , d^2, ... respectivement. Le terme E^{∞} est isomorphe au groupe gradué, associé au groupe filtré $H(\pi , X)$.

Rappelons que $E^k_{n,p}$ désigne le sous-groupe de E^k formé des termes de de degré total n et de degré filtrant p ; l'opérateur d^k , défini dans E^k , diminue le degré total de 1 , diminue le degré filtrant de k . En outre, on a ici $E^k_{n,p} = 0$ pour $p < 0$ ou $p > n$ (cf 9, 6) , de sorte que $E_{n,p} = E^k_{n,p}$ pour $k > \sup(p , n+1-p)$.

Théorème 2.- Le terme E^2 de la suite spectrale précédente est donné par

(8.1) $\qquad E^2_{n,p} \approx H_p(\pi , H_{n-p}(X))$ (p : degré filtrant ; n : degré total)

(noter que π opère à droite dans $H_{n-p}(X)$) . Dans le terme E^k $(k \geq 2)$ l'opérateur d^k diminue le degré total de 1 , le degré filtrant de k .

Démonstration : le terme E^1 est donné par

$$E^1 = \sum_p H(L_p/L_{p-1}) \quad ,$$

et $H(L_p/L_{p-1})$ est l'homologie de $X \underset{\pi}{\otimes} C_p$ où le bord serait celui défini par le seul opérateur ∂_X de X (l'opérateur bord de C_p étant nul). Puisque C_p est π-libre, il est immédiat que $H(X \underset{\pi}{\otimes} C_p) = H(X) \underset{\pi}{\times} C_p$. D'une manière précise :

$$E^1_{n,p} = H_{n-p}(X) \underset{\pi}{\otimes} C_p \quad .$$

L'opérateur d^1 de $E^1 \approx H(X) \underset{\pi}{\otimes} C$ n'est autre que celui défini par le bord dans C : $\partial(\xi \otimes c) = (-1)^{n-p} \xi \otimes (\partial c)$, si $\xi \in H_{n-p}(X)$. Il en résulte que $E^2 = H(E^1)$ est le groupe d'homologie du groupe π à coefficients dans $H(X)$ où π opère à droite. En détaillant les degrés, on obtient la relation (8.1) .

<u>Corollaire des théorèmes 1 et 2</u> : si X est faiblement π-libre, le groupe d'homologie $H(X_\pi)$ possède une filtration croissante (compatible avec la graduation), et le groupe gradué associé est isomorphe au terme E^∞ d'une suite spectrale dont le terme E^2 est donné par la formule (8.1).

Ce résultat s'applique notamment quand X est le complexe des chaînes singulières d'un espace $\mathfrak{X}$ dans lequel π opère "sans point fixe" ; $H(X_\pi)$ est alors l'homologie singulière de l'espace topologique $\mathfrak{B}$, quotient de $\mathfrak{X}$ par π , et l'on obtient ainsi des relations entre les homologies des espaces $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{B}$.

9.- <u>Le théorème fondamental pour la cohomologie</u>.

On définit une filtration décroissante sur $\mathrm{Hom}'_\pi(C , Y)$ en posant

$$L'_p = \sum_{n \geq p} \mathrm{Hom}_\pi(C_n , Y) \qquad (L'_p \supset L'_{p+1}) \ .$$

On en déduit une filtration décroissante sur $H^*(\pi , Y)$, compatible avec la graduation (totale), et une suite spectrale

$$E^1 = \sum_p H^*(L'_p/L'_{p+1}) \ , \quad E^2 = H^*(E^1) \ , \ \dots \ , \ E^{k+1} = H^*(E^k) \ , \ \dots \quad E^\infty$$

et E^∞ est isomorphe au groupe gradué, associé au groupe filtré $H^*(\pi , Y)$.

<u>Théorème 2 bis</u>.- Le terme E^2 de la suite spectrale précédente est

(9.1) $\qquad E^2_{n,p} \approx H^p(\pi, H^{n-p}(Y)) \qquad$ (p : degré filtrant ; n : degré total)

(noter que π opère à gauche dans $H^{n-p}(Y)$) . Dans le terme E^k $(k \geq 2)$ l'opérateur cobord δ^k augmente le degré total de 1 , augmente le degré filtrant de k .

La démonstration est analogue à celle du théorème 2 .

<u>Corollaire</u> des théorèmes 1 bis et 2 bis : si Y est faiblement π-injectif, le groupe de cohomologie $H^*(Y^\pi)$ possède une filtration décroissante (compatible avec la graduation), et le groupe gradué associé est isomorphe au terme E^∞ d'une suite spectrale dont le terme E^2 est donné par la formule (9.1).

<u>Complément relatif à la structure multiplicative</u> : Y ayant une structure d'algèbre différentielle, les L'_p sont des idéaux de l'algèbre $\mathrm{Hom}'_\pi(C , Y)$, et le terme E^∞ est l'<u>algèbre graduée</u>, associée à l'algèbre filtrée $H^*(\pi , Y)$. Tous les E^k sont des algèbres différentielles.

10.- <u>Interprétation de quelques homomorphismes</u>.

Dans l'exposé 9 (formule (6.3)) on a défini des homomorphismes

(10.1) $$E^2_{q,o} \longrightarrow H_q(\pi , X) \longrightarrow E^2_{q,q}$$

c'est-à-dire ici

(10.2) $$H_o(\pi, H_q(X)) \xrightarrow[u]{} H_q(\pi , X) \xrightarrow[v]{} H_q(\pi , H_o(X)) .$$

L'image de u est le sous-groupe de $H_q(\pi , X)$ formé des éléments de filtration nulle ; le noyau de v est le sous-groupe de $H_q(\pi , X)$ formé des éléments de filtration $q-1$. L'image de v se compose des éléments qui sont des cycles pour les opérateurs successifs d^2 , d^3 , ... Le noyau de u s'interprète comme suit : tous les homomorphismes

$$H_o(\pi , H_q(X)) \approx E^2_{q,o} \longrightarrow E^3_{q,o} \longrightarrow \dots \; E^k_{q,o} \; \dots \longrightarrow E^\infty_{q,o}$$

sont <u>sur</u> ; le noyau de chacun d'eux se compose des "bords" pour l'opérateur différentiel correspondant ; et le noyau de u est le noyau de l'homomorphisme composé de tous ces homomorphismes.

<u>Proposition 3</u> - L'homomorphisme v n'est autre que l'homomorphisme γ_* du paragraphe 4 de l'exposé 11 ; quant à u , il satisfait au diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H_o(\pi , H_q(X)) \arrow[r, "u"] & H_q(\pi , X) \arrow[d, "\beta_*"] \\
H_q(X) \arrow[u] \arrow[r, dash, "\alpha_*"] & H_q(X_\pi)
\end{tikzcd}$$

où le premier homomorphisme vertical est celui qui applique $H_q(X)$ sur $(H_q(X))_\pi$, quotient de $H_q(X)$ par la relation d'équivalence qu'y définit π .

La vérification est aisée à partir des définitions.

<u>Conséquence</u> : supposons que X soit faiblement π-libre ; le théorème 1 est donc applicable, et β_* est un isomorphisme sur. On peut alors interpréter l'image de α_* : $H_q(X) \longrightarrow H_q(X_\pi)$: c'est le sous-groupe des éléments de $H_q(X_\pi)$ dont la filtration est nulle. Supposons maintenant que X soit π-libre et acyclique (exp.3), et considérons l'homomorphisme

$$\varepsilon_* : \quad H_q(X_\pi) \longrightarrow H_q(\pi , Z)$$

de la proposition 1 (11, 4). Par identification de $H_q(X_\pi)$ à $H_q(\pi, X)$ ce n'est pas autre chose que l'homomorphisme v ci-dessus. On peut donc interpréter son image et son noyau : le noyau de ε_* se compose des éléments de $H_q(X_\pi)$ de filtration $q-1$; l'image se compose des éléments de $H_q(\pi , Z) \approx E^2_{q,q}$ qui sont des cycles pour d^2 , d^3 , ... successivement.

Pour la <u>cohomologie</u> : on a des homomorphismes analogues, qui s'interprètent d'une manière semblable à l'aide de la suite spectrale de cohomologie.

11.- <u>Première application de la suite spectrale : cas où, pour chaque</u> n , <u>existe un entier</u> p_n <u>tel que</u> $E^2_{n,p} = 0$ <u>pour</u> $p \neq p_n$, <u>avec</u> $p_{n+1}-p_n \leq 1$.

Dans ce cas, pour des raisons évidentes de degré, tous les opérateurs d^2 , d^3 , ... sont nuls. Donc le sous-groupe de E^∞ formé des éléments de degré total n s'identifie à l'unique terme $E^2_{n,p}$ qui est peut-être $\neq 0$.

<u>Théorème 3</u>.- Sous les hypothèses précédentes, $H_n(\pi , X)$ est canoniquement isomorphe à l'unique terme E^2_{n,p_n} .

(Conséquence immédiate de la filtration de $H(\pi , X)$ et du fait que E^∞ est canoniquement isomorphe à E^2) .

Par exemple, supposons $H_q(X) = 0$ pour tout $q \geq 1$. Alors

$$H_n(\pi , X) \approx H_n(\pi, H_0(X)) .$$

Ceci donne une légère généralisation du théorème de Hurewicz (exp.3), dans lequel on supposait non seulement $H_q(X) = 0$ pour $q \geq 1$, mais encore $H_0(X) \approx Z$.

Théorème analogue pour la cohomologie.

<u>Exemple</u> : soit $\mathcal{X}$ une variété de dimension n , <u>acyclique</u>. Si un groupe π opère sans point fixe dans $\mathcal{X}$, le quotient $\mathcal{X}/\pi$ est aussi une variété, donc $H_q(\mathcal{X}/\pi) = 0$ pour $q > n$. Mais, d'après le théorème 3 , $H_q(\mathcal{X}/\pi) \approx H_q(\pi, Z)$; ceci montre que π ne peut pas être un groupe cyclique non réduit à l'élément neutre, car pour un tel π il existe une infinité de

valeurs de q pour lesquels $H_q(\pi, Z) \neq 0$ (cf exposé 3). D'où :

<u>Théorème de P. Smith</u> : un groupe π qui opère sans point fixe dans une variété acyclique ne possède pas d'éléments d'ordre fini et $\neq e$ (la démonstration précédente est due à A. Borel et Serre).

Voici une autre application du théorème 3 : supposons le groupe <u>fini</u>, et soit h son ordre. On sait (5, 1) que $hu = 0$ pour tout élément $u \in H_p(\pi, A)$ si $p \geq 1$ (quel que soit le groupe de coefficients A). Supposons alors que X soit un espace vectoriel sur un <u>corps</u> k <u>de caractéristique nulle ou première à</u> h (les automorphismes de X définis par les opérations de π étant, bien entendu, des automorphismes de la structure vectorielle). Alors $H_p(\pi, H_{n-p}(X)) = 0$ pour tout $p \geq 1$. Donc $E^2_{n,o}$ est le seul des $E^2_{n,p}$ qui soit $\neq 0$. D'après le théorème, $H_n(\pi, X)$ est canoniquement isomorphe à $H_o(\pi, H_n(X))$, c'est-à-dire à $H_n(X))_\pi$, quotient de $H_n(X)$ par la relation d'équivalence définie par π. Résultat analogue pour la cohomologie. Ainsi :

<u>Théorème 4</u>.- Soit un espace $\mathcal{X}$ dans lequel un groupe fini π d'ordre h opère "sans point fixe". Considérons l'homologie et la cohomologie à coefficients dans un corps k de caractéristique nulle ou première à h. Alors l'homomorphisme

$$H_n(\mathcal{X}) \longrightarrow H_n(\mathcal{X}/\pi)$$

est <u>sur</u>, et son noyau est engendré par les $x - x.s$ (où $x \in H_n(\mathcal{X})$, $s \in \pi$) ; quant à l'homomorphisme

$$H^n(\mathcal{X}/\pi) \longrightarrow H^n(\mathcal{X}) \quad ,$$

il est <u>biunivoque</u>, et son image se compose des éléments de $H^n(\mathcal{X})$ invariants par π.

<u>Corollaire</u> : les nombres de Betti (pour le corps k) de l'espace quotient $\mathcal{B} = \mathcal{X}/\pi$ sont au plus égaux à ceux de $\mathcal{X}$.

12.- <u>Cas où le groupe π est le groupe additif des entiers</u>.

On sait (exp.3) que $H_p(\pi, A)$ et $H^p(\pi, B)$ sont alors nuls pour $p \geq 2$, quels que soient les groupes de coefficients A et B.

Pour l'homologie, on a donc $E^2_{n,p} = 0$ sauf peut-être pour $p = 0$ et $p = 1$. Il en résulte que d^2, d^3, ... sont nuls, donc $E^\infty \approx E^2$. En interprétant la filtration de $H(\pi, X)$, et en se servant de l'expression explicite des groupes d'homologie du groupe π des entiers, on obtient une <u>suite exacte</u>

$$0 \longrightarrow (H_n(X))_\pi \longrightarrow H_n(\pi, X) \longrightarrow (H_{n-1}(X))^\pi \longrightarrow 0 .$$

On a de même, pour la cohomologie,

$$0 \longrightarrow (H^{n-1}(Y))_\pi \longrightarrow H^n(\pi, Y) \longrightarrow (H^n(Y))^\pi \longrightarrow 0 .$$

On peut appliquer ces résultats à l'homologie et la cohomologie d'un espace $\mathfrak{X}$ où le groupe additif des entiers opère "sans point fixe".

13.- <u>Cas où</u> $H_q(X) = 0$ <u>pour</u> $0 < q < n$.- (resp. $H^q(Y) = 0$ pour $0 < q < n$) .

Alors $E^2_{q,p}$, pour $0 \leq q < n$, est nul sauf pour $p = q$. D'où

(13.1) $\qquad H_q(\pi, X) \approx H_q(\pi, H_o(X))$ pour tout $q < n$ (théorème d'Eilenberg-MacLane-Eckmann).

Etudions les termes de degré total n dans E^2 ; c'est

$$H_o(\pi, H_n(X)) + H_n(\pi, H_o(X)) .$$

Les éléments de $H_n(\pi, H_o(X))$ sont des cycles pour d^2 , d^3 , ... ; ce ne sont jamais des bords. Les éléments de $H_o(\pi, H_n(X))$ sont aussi des cycles ; ce peuvent être des bords pour

$$d^{n+1} : \quad H_{n+1}(\pi, H_o(X)) \longrightarrow H_o(\pi, H_n(X)) .$$

On a donc une <u>suite exacte</u>

(13.2) $\quad H_{n+1}(\pi,X) \longrightarrow H_{n+1}(\pi,H_o(X)) \longrightarrow (H_n(X))_\pi \longrightarrow H_n(\pi,X) \longrightarrow H_n(\pi,H_o(X)) \longrightarrow 0$

De même, en cohomologie, si $H^q(Y) = 0$ pour $0 < q < n$, on a

(13.3) $\quad H^q(\pi,Y) \approx H^q(\pi,H^o(Y))$ pour $q < n$; et on a une <u>suite exacte</u>

(13.4) $\quad 0 \to H^n(\pi,H^o(Y)) \longrightarrow H^n(\pi,Y) \longrightarrow (H^n(Y))^\pi \longrightarrow H^{n+1}(\pi,H^o(Y)) \longrightarrow H^{n+1}(\pi,Y)$

Si X est le complexe des chaînes (resp. Y l'anneau des cochaînes) d'un espace topologique $\mathfrak{X}$ dans lequel π opère sans point fixe, et si les groupes d'homologie à coefficients entiers $H_q(\mathfrak{X})$ sont nuls pour $0 < q < n$, les relations (13.1) à (13.4) donnent des relations entre l'homologie (resp. la cohomologie à coefficients quelconques) de l'espace et de son quotient $\mathfrak{B} = \mathfrak{X}/\pi$.

14.- <u>Application aux groupes d'automorphismes de la sphère</u> S^n .

Soit π un groupe (nécessairement <u>fini</u>) d'automorphismes "sans point fixe" de la sphère S^n . Nous considérerons, par exemple, la cohomologie à coefficients entiers. Alors (13.3) montre que

(14.1) $$H^q(S^n/\pi) \approx H^q(\pi, Z) \quad \text{pour} \quad q < n .$$

D'après (13.4), on a une suite exacte

(14.2) $$0 \longrightarrow H^n(\pi, Z) \longrightarrow H^n(S^n/\pi) \longrightarrow (H^n(S^n))^{\pi} \longrightarrow H^{n+1}(\pi, Z) \longrightarrow 0 ,$$

compte tenu du fait que $H^{n+1}(S^n/\pi) = 0$ puisque S^n/π est une variété de dimension n .

Examinons d'abord le cas bien classique où π est le groupe à 2 éléments formé de l'automorphisme identique et de la symétrie de S^n par rapport à son centre. L'espace S^n/π est l'espace projectif réel P^n ; (14.1) donne :

$$H^q(P^n) \approx Z_2 \quad \text{si } q \text{ est pair et } < n ,$$
$$= 0 \quad \text{si } q \text{ est impair et } < n .$$

De plus, si n est impair, la symétrie conserve l'orientation, donc tous les éléments de $H^n(S^n)$ sont invariants par π ; de plus $H^n(\pi, Z) = 0$, $H^{n+1}(\pi, Z) \approx Z_2$ et (14.2) donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^n(P^n) \longrightarrow H^n(S^n) \longrightarrow Z_2 \longrightarrow 0$$

Donc $H^n(P^n)$ s'applique biunivoquement sur le sous-groupe de $H^n(S^n) \approx Z$ formé des multiples pairs de l'élément générateur ; en particulier, $H^n(P^n) \approx Z$.

Si n est pair, la symétrie change l'orientation, donc $(H^n(S^n))^{\pi} = 0$; $H^n(\pi, Z) \approx Z_2$ et $H^{n+1}(\pi, Z) = 0$, d'où la suite exacte

$$0 \longrightarrow Z_2 \longrightarrow H^n(P^n) \longrightarrow 0 ,$$

qui prouve que $H^n(P^n) \approx Z_2$. On retrouve ainsi des résultats classiques.

Examinons maintenant le <u>cas général</u> d'un groupe π opérant sans point fixe dans S^n .

<u>Lemme</u> : Si un élément $s \in \pi$ change l'orientation de S^n , n est nécessairement pair. Si un élément $s \in \pi$ conserve l'orientation de S^n et est $\neq e$, alors n est impair.

Soit, en effet, π' le groupe cyclique engendré par s . Si s change l'orientation, la fin de la suite exacte (14.2) s'écrit

$$0 \longrightarrow H^{n+1}(\pi', Z) \longrightarrow 0 ,$$

donc $H^{n+1}(\pi', Z) = 0$, ce qui oblige $n+1$ à être impair (propriétés de la cohomologie d'un groupe cyclique). Si au contraire s conserve l'orientation, (14.2) donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^n(\pi', Z) \longrightarrow H^n(S^n/\pi') \quad ;$$

or S^n/π' est une variété connexe et orientable, donc $H^n(S^n/\pi') \approx Z$. Or un homomorphisme dans Z a une image nulle ou infinie ; comme le groupe $H^n(\pi', Z)$ est fini, il est donc nul, ce qui implique que n est impair. La démonstration du lemme est achevée.

Cela étant, supposons d'abord n pair : si le groupe π n'est pas réduit à $\{e\}$, π est un groupe à 2 éléments ; car si $s \in \pi$ et $t \in \pi$, avec $s \neq e$, $t \neq e$, alors s et t changent l'orientation (d'après le lemme) , donc st^{-1} la conserve ; le lemme prouve alors que $st^{-1} = e$.

Ce cas trivial étant écarté, il reste seulement à examiner le cas où n est impair ; alors, d'après le lemme, toutes les transformations de π conservent l'orientation.

Le cas où $n = 1$ est bien connu : π est nécessairement un groupe cyclique, semblable à un groupe de rotations.

Dans le cas général (n impair), récrivons la suite exacte (14.2)

$$0 \longrightarrow H^n(\pi, Z) \longrightarrow H^n(S^n/\pi) \longrightarrow H^n(S^n) \longrightarrow H^{n+1}(\pi, Z) \longrightarrow 0 \quad .$$

Puisque $H^n(S^n/\pi) \approx Z$, on conclut, comme dans la démonstration du lemme, que $H^n(\pi , Z) = 0$. De plus, soit h l'ordre du groupe π ; il est évident que l'homomorphisme de $H^n(S^n/\pi) \approx Z$ dans $H^n(S^n) \approx Z$ applique l'élément générateur du premier groupe sur h fois l'élément générateur du second. Alors la fin de la suite exacte montre que le groupe de cohomologie $H^{n+1}(\pi , Z)$ est isomorphe au groupe Z_h si le groupe π a h éléments.

On peut obtenir d'autres renseignements sur la cohomologie (à coefficients entiers) d'un groupe π opérant sans point fixe dans S^n (n impair). Exprimons en effet que $H^q(S^n/\pi) = 0$ pour $q > n$. Le sous-groupe de E^2 , formé des éléments de degré total $q > n$, est

$$H^{q-n}(\pi , H^n(S^n)) + H^q(\pi , H^o(S^n)) \quad .$$

D'autre part, tous les δ^k sont nuls sauf peut-être δ^{n+1} . Puisque E^∞ est nul dans le degré $q > n$, il faut que les éléments de $H^q(\pi , H^o(S^n))$, qui sont des cocycles pour δ^{n+1} , soient des cobords ; donc δ^{n+1} applique $H^{q-n-1}(\pi , H^n(S^n))$ sur $H^q(\pi, H^o(S^n))$. De plus, aucun élément $\neq 0$ de $H^{q-n}(\pi, H^n(S^n))$ n'est un cobord ; il faut donc qu'aucun d'eux ne soit un cocycle, c'est-à-dire que δ^{n+1} applique biunivoquement $H^{q-n}(\pi, H^n(S^n))$

dans $H^{q+1}(\pi, H^o(S^n))$. En résumé, on a des homomorphismes

$H^k(\pi, Z) \longrightarrow H^{k+n+1}(\pi, Z)$, qui sont des <u>isomorphismes sur</u>, pour tout entier $k \geq 1$; pour $k = 0$, c'est une application <u>sur</u>.

Ces propriétés de la cohomologie du groupe π valent aussi pour tout sous-groupe de π . Dans l'exposé suivant, on en tirera des conséquences relativement aux groupes π possibles. On montrera notamment que si π est abélien, il est nécessairement <u>cyclique</u>.

Supposons désormais que le groupe π soit <u>cyclique d'ordre</u> h (n étant impair). Dans la suite (14.2) , on a un homomorphisme

(14.3) $$H^n(S^n) \longrightarrow H^{n+1}(\pi, Z) \approx Z_h \quad .$$

Si on oriente S^n , ceci définit un élément générateur de $H^n(S^n)$; son image dans $H^{n+1}(\pi, Z)$ est un générateur ξ de ce groupe cyclique. L'élément ξ est un <u>invariant topologique</u> de la situation : sphère avec groupe cyclique π d'opérateurs. Ce n'est pas autre chose que la "classe caractéristique" d'Eilenberg-MacLane (Voir Trans. amer. math. Soc., 65, 1949, p. 49-99 ; voir notamment le Chap. IV).

Considérons le problème : étant données 2 sphères de même dimension impaire n , et, dans chacune d'elles, un groupe cyclique d'ordre h opérant sans point fixe, chercher s'il existe un homéomorphisme de l'une sur l'autre qui transforme le premier groupe dans le second. Ce problème est celui que l'on rencontre, notamment, dans la classification des espaces lenticulaires (voir l'article cité). On ne sait pas à l'avance, quand on a fait choix d'un générateur du premier groupe cyclique, quel est le générateur du second qui lui correspondra. Or le choix d'un générateur d'un groupe cyclique π définit un générateur de $H^{n+1}(\pi, Z)$: car la structure multiplicative de la cohomologie d'un groupe cyclique π montre que la puissance d'ordre $(n+1)/2$ d'un générateur de $H^2(\pi, Z)$ est un générateur de $H^{n+1}(\pi, Z)$. De là résulte que chaque automorphisme du groupe cyclique π (qui s'obtient évidemment en multipliant un générateur par un entier t premier à h) définit l'automorphisme suivant du groupe cyclique $H^{n+1}(\pi, Z)$:

$$\theta \longrightarrow t^{(n+1)/2}\,\theta \; .$$

Cela dit, l'ensemble des générateurs de $H^{n+1}(\pi, Z) \approx Z_h$ est partagé en classes d'équivalence par ce groupe d'automorphismes. La classe d'équivalence qui contient la classe caractéristique ξ est un invariant de la sphère orientée S^n munie de son groupe cyclique π (à générateur non précisé). On obtient ainsi l'invariant classique des espaces lenticulaires.

Remarque finale : on aurait pu démontrer le lemme de la page 8 à l'aide du"nombre de Lefschetz" relatif aux points fixes d'une transformation d'un espace topologique en lui-même.