H. CARTAN

Généralités sur les espaces fibrés

Séminaire Henri Cartan, tome 2 (1949-1950), exp. n° 8 bis, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1949-1950__2__A9_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1949/50.

GÉNÉRALITÉS SUR LES ESPACES FIBRÉS

(Appendice, par H. CARTAN)

Il s'agit de compléter, sur certains points, les 3 exposés antérieurs (6, 7, 8).

1.- Espace fibré à groupe structural.

On a défini cette notion (6, pages 9 et suivantes) dans le cas où le groupe structural G est un groupe topologique (qui opère à gauche dans la fibre F). Nous allons donner une définition valable pour le cas où G est un groupe d'homéomorphismes de F , sur lequel on ne considère aucune topologie (il n'y aura donc pas d'espace fibré principal correspondant à un espace fibré de groupe structural G).

La définition est essentiellement celle donnée page 9 (exposé 6).

Définition : étant donné un espace fibré E , de base B , de fibres homéomorphes à un espace topologique F , et un groupe G d'homéomorphismes de F , on définit sur E une structure d'espace fibré à groupe structural G en se donnant un ensemble H d'homéomorphismes de F sur les fibres de E (images réciproques des points de B , pour la "projection" p de E sur sa base B), de manière que :

1) Pour tout point $x \in B$, l'ensemble H_x des éléments de H qui appliquent F sur $p^{-1}(x)$ est non vide ;

2) si $h \in H_x$, H_x se compose des applications composées $h \circ g$, où g parcourt G .

(Les éléments de G sont écrits comme opérant à gauche sur F).

Remarque : tout espace fibré peut être considéré comme muni d'un groupe structural G , G étant le groupe de tous les homéomorphismes de F , et H étant l'ensemble de tous les homéomorphismes de F sur les fibres de E .

Homomorphisme d'espaces fibrés à groupe structural. Soient E et E' deux espaces fibrés, de bases B et B' respectivement, de même fibre F , de même groupe structural G , et soient H et H' les ensembles d'applications de F (dans E et E' respectivement) définissant les structures de

E et E'. Un <u>homomorphisme</u> de E dans E' sera un homomorphisme (au sens de 6, page 1) qui satisfasse en outre à la condition suivante : chaque fois que $h \in H$, $f \circ h$ appartient à H' (on désigne par f l'application de E dans E', définissant l'homomorphisme en question).

En particulier, si $B = B'$, on a la notion de B-<u>isomorphisme</u>. Elle est d'ailleurs conforme à la définition générale d'un isomorphisme de structures.

Soit E' un espace fibré de base B', de fibres homéomorphes à F, de groupe structural G (groupe d'homéomorphismes de F). On sait que toute application continue φ d'un espace B dans B' définit un espace fibré de base B, de fibres homéomorphes à F, appelé <u>image réciproque</u> de l'espace E'. Sur cet espace E, on définit une structure d'espace fibré à groupe structural G : par définition, H est l'ensemble des homéomorphismes de F dans E tels que $f \circ h \in H'$ (on désigne par f l'application de E dans E'). Ainsi, on a la notion d'image réciproque d'une structure d'espace fibré à groupe structural.

En particulier, si B est un <u>sous-espace</u> de B', on a la notion de <u>structure induite</u> ; l'image réciproque que l'on obtient ainsi s'appelle souvent le "sous-espace de E' situé au-dessus de la partie B de la base B' ".

2.- <u>Espace trivial, espace localement trivial</u>.

E désignant l'espace-produit $B \times F$, soit, pour chaque point $x \in B$, H_x l'ensemble des applications $y \longrightarrow (x, g.y)$ de F dans E ; (g parcourt le groupe G d'homéomorphismes de F). La réunion H des H_x définit, sur $B \times F$, une structure d'espace fibré à groupe structural G. Un tel espace est dit <u>trivial</u>. D'une manière générale, un espace fibré E, de base B, de fibres homéomorphes à F, de groupe structural G, est <u>trivial</u> s'il existe un B-isomorphisme (au sens des espaces fibrés à groupe structural G) de E sur l'espace trivial $B \times F$ précédemment défini. Autrement dit, s'il existe un homéomorphisme f de $B \times F$ sur E, compatible avec les "projections" de ces 2 espaces, et tel que l'ensemble H_x (relatif à la structure de l'espace E) se compose des applications $y \longrightarrow f(x, g.y)$ de F dans E (g parcourant G).

De la notion d'espace trivial, on déduit aussitôt celle d'espace <u>localement trivial</u> : E est localement trivial si chaque point de B possède un voisinage au-dessus duquel E est trivial. U désignant un tel voisinage, les isomorphismes de $U \times F$ sur $p^{-1}(U)$ s'appellent des "cartes locales".

Remarque : un espace fibré localement trivial (au sens de 6, page 4), sans groupe structural donné a priori, peut toujours être considéré comme espace localement trivial quand on prend comme groupe structural le groupe de tous les homéomorphismes de F.

Etant donné deux cartes locales au-dessus du même sous-espace U de B, comment s'effectue le changement de cartes ? Tout revient à étudier les automorphismes d'un espace fibré trivial. Si B est la base d'un tel espace fibré, tout automorphisme de $E = B \times F$ a la forme $(x , y) \longrightarrow (x , g(x).y)$, où $x \longrightarrow g(x)$ est une application de B dans le groupe G. L'automorphisme réciproque est $(x , y) \longrightarrow (x , (g(x))^{-1}.y)$. Les deux applications $(x , y) \longrightarrow g(x).y$ et $(x , y) \longrightarrow (g(x))^{-1}.y$ sont donc des applications continues de $B \times F$ dans F. Réciproquement, si l'application $x \longrightarrow g(x)$ de B dans G satisfait à cette double condition de continuité, alors $(x , y) \longrightarrow (x , g(x).y)$ est un automorphisme de $B \times F$, compatible avec le groupe structural G.

On est ainsi conduit à envisager, pour tout sous-espace U de B, l'ensemble $\Phi(U , G)$ des applications g de U dans G, telles que

$g(x).y$ et $(g(x))^{-1}.y$ soient des fonctions continues sur $U \times F$.

La loi de composition $g = g'g''$ définie par

$g(x) = g'(x) \circ g''(x)$ (produit d'éléments du groupe G) définit sur $\Phi(U , G)$ une structure de groupe, et ce groupe est isomorphe au groupe des automorphismes de $U \times F$ ("automorphismes" pour la structure d'espace fibré à groupe structural G).

3.- Un théorème fondamental.

On a vu dans l'exposé 1 un théorème important (théorème 1) qui permet de prolonger les homotopies d'applications continues. Ici, au lieu d'applications continues d'un espace B dans un espace topologique, considérons les applications de B dans un groupe G d'homéomorphismes de F, qui appartiennent à l'ensemble $\Phi(B , G)$ qu'on a défini ci-dessus. Relativement à ces applications, on a un théorème de prolongement, analogue au théorème 1 de l'exposé 1 :

Lemme : Soient B un espace normal, A un sous-espace fermé de B, A' un voisinage ouvert de A dans B. En désignant par I le segment $[0 , 1]$, soit

$$C = (A \times I) \cup (B \times \{0\}) , \qquad C' = (A' \times I) \cup (B \times \{0\}) .$$

Alors, pour toute application $u \in \Phi(C' , G)$, il existe une application $v \in \Phi(B \times I , G)$ qui prolonge la restriction de u à C . (G désigne, comme plus haut, un groupe d'homéomorphismes d'un espace F).

La démonstration de ce lemme est immédiate : soit $\lambda(x)$ une fonction continue définie sur B , à valeurs dans I , égale à 1 sur A et à 0 dans le complémentaire de A' ; u étant définie comme fonction des variables $x \in B$ et $t \in I$, il suffit de prendre

$$(1) \qquad v(x , t) = u(x , t\, \lambda(x)) .$$

Le lemme précédent va permettre de généraliser aux espaces fibrés à groupe structural (au sens entendu ici) le théorème 4 de l'exposé 8 (page 5). Le théorème de "relèvement des homotopies" (théorème 1 de l'exposé 8) sera alors une conséquence du théorème fondamental qui va être exposé maintenant.

Avant de l'énoncer, précisons comment, E étant un espace fibré (de base B , de fibre F) à groupe structural G , on définit sur le produit $E \times I$ une structure d'espace fibré (de base $B \times I$, de fibre F) à groupe structural G . La projection de $E \times I$ sur sa base $B \times I$ est évidemment définie par $(x , t) \to (p(x) , t)$; quant à l'ensemble H' d'homéomorphismes de F dans $E' = E \times I$, il se compose des applications $y \to (h(y) , t)$ de F dans $E \times I$, où $h \in H$ et t est un point fixe du segment $I = [0 , 1]$.

Théorème fondamental.- Soit E' un espace fibré, de fibre F , de groupe structural G ; supposons que la base de E' soit un produit $B \times I$ (où B est un espace localement compact et paracompact, et I le segment $[0 , 1]$), et que E' soit localement trivial. Alors E' est $(B \times I)$-isomorphe à un produit $E \times I$, où E est un espace fibré, localement trivial, de fibre F , de groupe structural G , de base B .

Démonstration abrégée : soit E le sous-espace de E' situé au-dessus de $B \times \{0\}$. On va montrer que E' est $(B \times I)$-isomorphe à $E \times I$. Or on a déjà un isomorphisme canonique de E sur $E \times \{0\}$; il reste à montrer que cet isomorphisme se prolonge en un isomorphisme de E' tout entier sur $E \times I$. Le problème de prolongement d'isomorphisme que l'on a ainsi à résoudre est analogue au problème de prolongement de section que l'on a résolu pour démontrer le théorème du relèvement des homotopies (exposé 8, théorème 1). La démonstration procède de même, sauf qu'à la fin de la démonstration, au lieu de se référer au théorème de prolongement d'applications continues (théorème 1 de l'exposé 1), on se réfère ici au lemme ci-dessus du présent exposé.

4.- Conséquences du théorème fondamental.

Le théorème du relèvement des homotopies est évidemment une conséquence du théorème fondamental ci-dessus. De plus :

Théorème 2.- Soit E' un espace fibré, de base B', de fibre F, de groupe structural G ; supposons E' localement trivial. Soient φ_1 et φ_2 deux applications continues d'un espace B dans B', et soient E_1 et E_2 les espaces fibrés (localement triviaux) de base B, de fibre F, de groupe structural G, images réciproques de E' par φ_1 et φ_2 respectivement. Si φ_1 et φ_2 sont homotopes, alors les espaces E_1 et E_2 sont B-isomorphes (au sens de l'isomorphie des espaces fibrés à groupe structural). On a oublié de dire que B est supposé localement compact et paracompact.

En effet, si φ_1 et φ_2 sont homotopes, soit φ une application continue de $B \times I$ dans B', telle que $\varphi(x , 0) = \varphi_1(x)$ et $\varphi(x , 1) = \varphi_2(x)$. Soit $\bar{E}$ l'espace fibré de base $B \times I$, image réciproque de E' pour l'application φ. D'après le théorème fondamental, $\bar{E}$ est isomorphe à un produit $E \times I$, d'où il résulte aussitôt que E_1 et E_2 sont isomorphes à E ; et ceci démontre le théorème.

5.- Théorie des espaces fibrés différentiables.

On suppose que E, B, F sont des variétés (paracompactes) k fois différentiables (i.e: k fois continûment différentiables), et que la "projection" p de E sur B est k fois continûment différentiable, ainsi que chacune des applications de l'ensemble H qui définit la structure d'espace fibré à groupe structural G (G étant un groupe d'homéomorphismes k fois différentiables de F). On ne considérera que des homomorphismes k fois différentiables ; que des isomorphismes qui sont k fois différentiables ainsi que l'isomorphisme réciproque. Ceci conduit à introduire l'ensemble $\Phi_k(B , G)$ des applications g de B dans G, telles que les applications

$$(x , y) \longrightarrow g(x).y \qquad \text{et} \qquad (x , y) \longrightarrow (g(x))^{-1}.y$$

soient des applications k fois différentiables de $B \times F$ dans F. On démontre alors un lemme tout à fait analogue au lemme du paragraphe 3 (ci-dessus). Ce lemme conduit de même à un théorème analogue au théorème fondamental (paragraphe 3), mais où il s'agit d'isomorphismes pour les structures k fois différentiables. Ce théorème, à son tour, comporte des conséquences analogues, telles que, par exemple, le relèvement différentiable des homotopies différentiables.

N.B.- Noter que le théorème 2 entraîne le théorème de FELDBAU : si B, localement compact et paracompact, est contractile, tout espace fibré de base B, localement trivial, est trivial (au sens des espaces fibrés à groupe structural). De même, si B est une variété différentiable et différentiablement contractile, tout espace fibré différentiable, de base B, localement trivial, est trivial (au sens des espaces fibrés différentiables, éventuellement à groupe structural).
