

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

H. CARTAN

Problèmes d'homotopie et de prolongement : théorie des obstructions

Séminaire Henri Cartan, tome 2 (1949-1950), exp. n° 3, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1949-1950__2__A3_0

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1949-1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1949/50.

PROBLÈMES D'HOMOTOPIE ET DE PROLONGEMENT :

théorie des obstructions.

(Exposé de H. CARTAN, le 21.11.1949).

1.- Rappel de définitions.

Soit f une application d'un espace X dans un espace Y (N.B: "application" signifiera toujours "application continue"). Elle définit un homomorphisme $\bar{f}$ du groupe d'homologie singulière $H_n(X)$ dans le groupe d'homologie singulière $H_n(Y)$, et un homomorphisme $\bar{f}^*$ du groupe de cohomologie singulière $H^n(Y, G)$ dans le groupe de cohomologie singulière $H^n(X, G)$ (la cohomologie étant relative à un groupe G de coefficients) (à ce sujet, cf. exposé V de 48-49, n° 4). Nous introduirons en outre la notion suivante, formulée par exemple pour la cohomologie :

Soient f et g deux applications de X dans Y , dont les restrictions à une partie A de X sont identiques. On leur associe un homomorphisme $(f, g)^*$ de $H^n(Y, G)$ dans $H^n(X \bmod A, G)$, de la façon suivante : soit donné un cocycle α de Y ; à chaque simplexe singulier de X , associons l'élément de G , différence des valeurs de α sur les images de ce simplexe par f et g respectivement. La fonction des simplexes singuliers de X que l'on obtient ainsi est une cochaîne à valeurs dans G , qui s'annule sur les simplexes contenus dans A , et dont le cobord est nul. C'est donc un cocycle de $X \bmod A$, et sa classe dans $H^n(X \bmod A, G)$ ne dépend que de la classe de α dans $H^n(Y, G)$. Ceci définit l'homomorphisme $(f, g)^*$.

Propriétés de $(f, g)^*$:

$$(f, g)^* + (g, f)^* = 0, \quad (f, g)^* + (g, h)^* + (h, f)^* = 0;$$

si on compose $(f, g)^*$ et l'homomorphisme canonique de $H^n(X \bmod A, G)$ dans $H^n(X, G)$, on obtient l'homomorphisme $\bar{f}^* - \bar{g}^*$.

Rappelons d'autre part qu'il existe un homomorphisme canonique

(1) $H^n(X \bmod A, G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(X \bmod A), G)$ (cf exposé IV de 48-49, n°4), et que, le groupe des chaînes singulières de X modulo A étant libre, c'est un homomorphisme du premier groupe sur le second. Autrement dit, le groupe des homomorphismes de $H_n(X \bmod A)$ dans G s'identifie

à un groupe quotient du groupe de cohomologie $H^n(X \bmod A, G)$. On peut démontrer (voir Eilenberg-MacLane, Group extensions and Homology, Ann. of Math., 43, 1942, p. 757-831 ; et aussi un article de Cartan et Eilenberg à paraître) que le noyau de l'homomorphisme (1) est isomorphe au groupe d'extensions $\text{Ext}(H_{n-1}(X \bmod A), G)$, et en particulier est nul si $H_{n-1}(X \bmod A)$ est un groupe libre, ou même, plus particulièrement, s'il est nul. Dans ce cas, le groupe de cohomologie $H^n(X \bmod A, G)$ s'identifie canoniquement au groupe des homomorphismes de $H_n(X \bmod A)$ dans le groupe G .

Première partie : applications d'un espace X dans un espace Y asphérique en dimensions $< n$.

2.- Cas où X est la sphère S^n .

Nous dirons qu'un espace Y est asphérique en dimensions $< n$ si les groupes d'homotopie $\pi_i(Y)$ sont nuls pour $0 \leq i < n$ ($\pi_0(Y) = 0$ signifie que l'espace Y est connexe) ; si $n = 1$, on suppose en outre que $\pi_1(Y)$ est abélien. Ces conditions impliquent toujours que Y est n -simple. On rappelle (cf. exposé 2) que $\pi_n(Y)$ s'identifie alors canoniquement au groupe d'homologie (à coefficients entiers) $H_n(Y)$.

Ce résultat s'interprète ainsi : les classes d'application de la sphère S^n dans l'espace Y correspondent canoniquement aux éléments du groupe d'homologie $H_n(Y)$. Si on explicite cette correspondance en remontant à la définition de l'isomorphisme $\pi_n(Y) \rightarrow H_n(Y)$, on trouve ceci : le choix d'une orientation de S^n définissant un des 2 éléments générateurs du groupe $H_n(S^n)$ (qui est isomorphe au groupe additif des entiers $\mathbb{Z}$), une application f de S^n dans Y définit un homomorphisme $\bar{f}$ de $H_n(S^n)$ dans $H_n(Y)$, et l'élément de $H_n(Y)$, image par $\bar{f}$ de l'élément générateur de $H_n(S^n)$, est précisément celui qui est associé à la classe d'homotopie de l'application f . - Ceci vaut, en particulier, si Y est aussi une sphère S^n ; l'homomorphisme $\bar{f}$ est alors caractérisé par un entier (une fois les sphères X et Y orientées), qui s'appelle le degré (brouwérien) de l'application f .

Ainsi une classe d'applications de S^n dans un espace Y asphérique en dimensions $< n$ est caractérisée par l'homomorphisme de $H_n(S^n)$ dans $H_n(Y)$ qu'elle définit ; et, pour tout homomorphisme de $H_n(S^n)$ dans $H_n(Y)$, il existe une application donnant naissance à cet homomorphisme. Or (n°1 ci-dessus) le groupe des homomorphismes de $H_n(S^n)$ dans $H_n(Y)$ est canoniquement

isomorphe au groupe de cohomologie $H^n(S^n, H_n(Y))$, puisque $H_{n-1}(S^n)$ est un groupe libre (en effet, il est nul si $n \geq 2$, et isomorphe à $\mathbb{Z}$ si $n = 1$). Sous cette forme, le résultat va être généralisé à des espaces X plus généraux que la sphère S^n .

3.- Classe caractéristique, obstruction, déviation.

Le groupe d'homologie $H_{n-1}(Y)$ de l'espace Y (asphérique en dimensions $< n$) est nul si $n \geq 2$, libre si $n = 1$. Donc le groupe de cohomologie

$$H^n(Y, H_n(Y))$$

s'identifie au groupe des endomorphismes de $H_n(Y)$. A l'endomorphisme identique de $H_n(Y)$ correspond ainsi un élément bien déterminé de $H^n(Y, H_n(Y))$, que nous appellerons la classe fondamentale de l'espace Y .

On peut aussi définir la classe fondamentale comme suit : on sait (exposé 2) que l'homologie et la cohomologie de l'espace Y peuvent être étudiées en considérant uniquement des simplexes singuliers (ou des "cubes singuliers") dont toutes les faces de dimension $\leq n-1$ sont appliquées en un même point y . Un simplexe de dimension n est alors un cycle, et par suite définit un élément de $H_n(Y)$. A chaque simplexe de dimension n associons l'élément de $H_n(Y)$ qu'il définit ; la fonction ainsi définie est une cochaîne, et même un cocycle, à valeurs dans le groupe $H_n(Y)$. D'ailleurs il n'y a pas de cobord de dimension n , autre que zéro (puisque tous les simplexes de dimension $n-1$ sont nuls ; le cas $n = 1$ doit être envisagé à part : les simplexes de dimension 0 ne sont pas nuls, mais les cobords de dimension 1 sont nuls néanmoins). Ainsi le groupe $H^n(Y, H_n(Y))$ s'identifie au groupe des cocycles de dimension n , à valeurs dans $H_n(Y)$; et le cocycle défini plus haut n'est autre que la "classe fondamentale" de l'espace Y . On remarquera qu'il n'est pas nul si $H_n(Y) \neq 0$.

Soit maintenant f une application d'un espace X dans l'espace Y , asphérique en dimensions $< n$. Elle définit un homomorphisme

$$H^n(Y, H_n(Y)) \longrightarrow H^n(X, H_n(Y)).$$

l'image de la classe fondamentale s'appelle la classe caractéristique de l'application f . C'est un élément $\chi(f)$ de $H^n(X, H_n(Y))$. On notera que si f est l'application identique de Y dans Y , sa classe caractéristique n'est autre que la classe fondamentale de Y . La classe caractéristique d'une application constante est nulle.

Soient f et g deux applications de X dans Y , dont les restrictions à une partie A de X sont égales. L'homomorphisme $(f, g)^*$ défini au n° 1 applique $H^n(Y, H_n(Y))$ dans $H^n(X \bmod A, H_n(Y))$; l'image de la classe fondamentale s'appelle la déviatiou du couple (f, g) ; c'est un élément $\chi(f, g)$ de $H^n(X \bmod A, H_n(Y))$.

Enfin, soit A une partie d'un espace X , et f une application de A dans Y . On appelle obstruction de l'application f (relativement à X) l'image de l'élément $\chi(f) \in H^n(A, H_n(Y))$ dans l'homomorphisme canonique

$$H^n(A, H_n(Y)) \rightarrow H^{n+1}(X \bmod A, H_n(Y)) \quad (\text{cf. exposé V de$$

48-49, n° 5). L'obstruction de f sera notée $\beta(f)$; c'est un élément dont l'image dans $H^{n+1}(X, H_n(Y))$ est nulle (à cause des propriétés de suite exacte : même référence).

4.- Théorèmes de prolongement et d'homotopie.

Les théorèmes suivants résultent immédiatement de l'invariance des notions homologiques par homotopie :

Théorème A.- Soit Y un espace asphérique en dimensions $< n$, et soit f une application, dans Y , d'un sous-espace A d'un espace X . Pour que f soit prolongeable en une application de X dans Y , il faut que l'obstruction $\beta(f)$ soit nulle.

Théorème B.- Soit Y un espace asphérique en dimensions $< n$, et soient f et g deux applications de X dans Y , dont les restrictions à un sous-espace A de X sont égales. Pour que f et g soient homotopes modulo A (c'est-à-dire pour qu'il existe une déformation de f dans g dans laquelle la restriction de f à A reste constante), il faut que la déviatiou $\chi(f, g)$ soit nulle. En particulier (si A est vide) : pour que deux applications f et g de X dans Y soient homotopes, il faut que les classes caractéristiques $\chi(f)$ et $\chi(g)$ soient égales.

On se propose d'imposer désormais aux espaces X et Y des conditions restrictives, moyennant lesquelles les conditions données dans les théorèmes précédents sont non seulement nécessaires mais suffisantes. On se bornera, dans le présent exposé, au cas où X est un polyèdre (fini ou infini, mais localement fini), sans faire sur Y de nouvelles hypothèses. Dans l'exposé suivant, on supposera que Y est en outre un polyèdre, et il ne sera plus nécessaire de supposer que X soit un polyèdre ; mais alors on considérera la cohomologie de Čech de l'espace X , et non plus la cohomologie singulière.

Dans cet exposé, X étant désormais un polyèdre, il n'y a pas lieu de distinguer entre cohomologie singulière, cohomologie de Čech, et cohomologie simpliciale (relative à la décomposition en cellules du polyèdre X).

Dans tout ce qui suit, Y est toujours supposé asphérique en dimensions $< n$, et A désigne un sous-polyèdre (fermé) du polyèdre X . On se propose d'établir les deux théorèmes suivants :

Théorème 1.- 1er cas $n \geq 2$. Supposons que les groupes de cohomologie $H^{i+1}(X \bmod A, \pi_i(Y))$ soient nuls pour $i \geq n+1$, ce qui est notamment le cas si l'espace $X - A$ est de dimension $\leq n+1$, ou si $\pi_i(Y) = 0$ pour $i > n$. Alors, pour qu'une application f de A dans Y soit prolongeable à X , il faut et il suffit que son obstruction $\beta(f) \in H^{n+1}(X \bmod A, H_n(Y))$ soit nulle.

2e cas $n = 1$. La même conclusion est valable, pourvu que l'espace Y soit i -simple pour tout entier $i \leq \dim(X-A)$.

Théorème 2.- 1er cas $n \geq 2$. Supposons que les groupes de cohomologie $H^i(X \bmod A, \pi_i(Y))$ soient nuls pour $i \geq n+1$, ce qui est notamment le cas si l'espace $X-A$ est de dimension $\leq n$, ou si $\pi_i(Y) = 0$ pour $i > n$. Alors, pour que deux applications f et g de X dans Y , dont les restrictions à A sont égales, soient homotopes modulo A , il faut et il suffit que la déviation $\chi(f, g) \in H^n(X \bmod A, H_n(Y))$ soit nulle. De plus, si $H^{i+1}(X \bmod A, \pi_i(Y)) = 0$ pour $i \geq n+1$, alors, étant donnés arbitrairement une application f de X dans Y et un élément χ de $H^n(X \bmod A, H_n(Y))$, il existe une application g de X dans Y , dont la restriction à A est égale à la restriction de f à A , et qui est telle que $\chi(f, g) = \chi$.

En particulier (si A est vide) : si les groupes $H^i(X, \pi_i(Y))$ et $H^{i+1}(X, \pi_i(Y))$ sont nuls pour $i \geq n+1$, les classes d'applications de X dans Y correspondent biunivoquement aux éléments du groupe de cohomologie $H^n(X; H_n(Y))$.

2e cas $n = 1$. Les mêmes conclusions sont valables, pourvu que l'espace Y soit i -simple pour tout entier $i \leq \dim(X-A)$ (resp. $i < \dim(X-A)$).

Cas particulier : l'espace Y est la sphère S^n . Dans ce cas, ce sont les groupes de cohomologie à coefficients entiers de X et de $X \bmod A$ qui interviennent, une fois qu'on a identifié $H_n(S^n)$ au groupe $\mathbb{Z}$, grâce à une orientation de la sphère S^n .

Cas où le groupe d'homologie $H_{n-1}(X)$ est libre : alors les classes

d'applications de X dans Y correspondent biunivoquement aux homomorphismes $H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ des groupes d'homologie à coefficients entiers. L'homomorphisme qui est ainsi associé à une application f n'est autre que $\bar{f}$ (voir n°1 ci-dessus) ; et il existe toujours une f telle que $\bar{f}$ soit un homomorphisme donné à l'avance.

La démonstration des théorèmes 1 et 2 sera donnée à la fin de la deuxième partie de cet exposé.

Deuxième partie : la théorie d'Eilenberg.

Dans tout ce qui suit, et jusqu'à nouvel ordre, Y est supposé connexe mais n'est plus supposé asphérique en dimensions $< n$. Toutefois, on supposera que Y est n -simple, pour simplifier l'exposition (mais l'hypothèse n'a rien d'essentiel, semble-t-il).

5.- Définition des cochaînes $b^{n+1}(f)$ et $c^n(f, g)$.

X désigne un polyèdre, X^n son squelette de dimension n , A un sous-polyèdre. Pour toute application f de X^n dans Y , on définit une cochaîne de dimension $n+1$ du polyèdre X , à valeurs dans le groupe d'homotopie $\pi_n(Y)$. Pour cela, étant donnée une $(n+1)$ -cellule orientée σ_{n+1} de X , on lui associe l'élément de $\pi_n(Y)$ défini par l'application f de son bord orienté. La cochaîne ainsi définie est notée $b^{n+1}(f)$.

Lemme 1 : Pour toute application f de $X^n \cup A$ dans Y , $b^{n+1}(f)$ est un cocycle ; ce cocycle s'annule sur A (i.e: sur les $(n+1)$ -cellules contenues dans A), et peut donc être considéré comme un cocycle de X modulo A . Pour que $b^{n+1}(f) = 0$, il faut et il suffit que f soit prolongeable à $X^{n+1} \cup A$.

Il suffit de montrer que $b^{n+1}(f)$ est un cocycle, le reste étant évident. Soit σ une $(n+2)$ -cellule orientée de X ; il faut montrer que la somme des éléments de $\pi_n(Y)$ définis par les restrictions de f aux bords des $(n+1)$ -cellules orientées du bord de σ , est nulle. Cela revient à la propriété suivante : quand on a une $(n+1)$ -cellule, et une décomposition de cette cellule en $(n+1)$ -cellules partielles, l'élément de $\pi_n(Y)$ défini par l'application f du bord de la grande cellule est égal à la somme des éléments de $\pi_n(Y)$ définis par les bords respectifs des cellules partielles ; ceci se prouve par récurrence sur le nombre des cellules partielles.

Soient maintenant deux applications f et g de X^n , dont les restrictions à X^{n-1} sont égales. On définit une n -cochaîne $c^n(f, g)$, à valeurs dans $\pi_n(Y)$, de la façon suivante : pour toute n -cellule orientée σ_n , les applications f et g définissent deux cellules singulières orientées, de même bord, dont la "différence" peut être considérée comme l'application d'une n -sphère orientée ; d'où un élément de $\pi_n(Y)$, qu'on associe à la cellule σ_n . Et ceci définit la cochaîne $c^n(f, g)$. Si f, g, h sont 3 applications de X^n dans Y , dont les restrictions à X^{n-1} sont égales, on a

$$c^n(f, g) + c^n(g, f) = 0, \quad c^n(f, g) + c^n(g, h) + c^n(h, f) = 0.$$

Lemme 2 : Si les applications f et g sont définies sur $X^n \cup A$ et si leurs restrictions à $X^{n-1} \cup A$ sont égales, la cochaîne $c^n(f, g)$ s'annule sur A , et peut donc être considérée comme une cochaîne de $X \bmod A$. Pour que $c^n(f, g) = 0$, il faut et il suffit que f et g soient homotopes modulo $X^{n-1} \cup A$. De plus, f étant donnée, ainsi qu'une n -cochaîne arbitraire c^n de $X \bmod A$ (à valeurs dans $\pi_n(Y)$), il existe une application g de $X^n \cup A$ dans Y , dont la restriction à $X^{n-1} \cup A$ est égale à la restriction de f , et telle que $c^n(f, g)$ soit précisément égale à c^n .

Seule la dernière affirmation de l'énoncé a besoin d'être démontrée. Il faut prouver ceci : étant donnée une application f d'une n -cellule σ , et une application φ d'une n -sphère S^n dans Y , on identifie σ à un hémisphère de S^n ; on se propose de trouver une application ψ de S^n dans Y , homotope à φ , et dont la restriction à σ soit précisément l'application f . Or ceci est possible grâce au théorème de prolongement des homotopies (exposé 1).

Lemme 3 : On a la relation fondamentale

$$\delta(c^n(f, g)) = b^{n+1}(f) - b^{n+1}(g),$$

où δ désigne, comme d'habitude, l'opérateur cobord.

Corollaire : si 2 applications f et g de $X^n \cup A$ qui coïncident sur $X^{n-1} \cup A$, sont prolongeables à $X^{n+1} \cup A$, la cochaîne $c^n(f, g)$ est un cocycle de $X \bmod A$.

Pour démontrer le lemme 3, on considère une $(n+1)$ -cellule de X , et les applications f et g de son bord ; puis on utilise la commutativité

et l'associativité de la loi de composition du groupe $\pi_n(Y)$ (ne pas oublier que si $n = 1$, on a supposé que Y est 1-simple, ce qui veut dire que $\pi_1(Y)$ est abélien).

6.- Rôle des cochaînes $b^{n+1}(f)$ et $c^n(f, g)$ dans les problèmes de prolongement et les problèmes d'homotopie.

Proposition 1.— Soit f une application de $X^n \cup A$ dans Y . Pour qu'il existe une application g de $X^{n+1} \cup A$ dans Y , dont la restriction à $X^{n-1} \cup A$ soit égale à la restriction de f , il faut et il suffit que le cocycle $b^{n+1}(f)$ soit le cobord d'une cochaîne de $X \bmod A$; autrement dit, que l'élément de $H^{n+1}(X \bmod A, \pi_n(Y))$ défini par $b^{n+1}(f)$ soit nul.

Démonstration : c'est nécessaire, car alors $b^{n+1}(g) = 0$ (lemme 1), et $c^n(f, g)$ s'annule sur A (lemme 2); d'après le lemme 3, $b^{n+1}(f)$ est le cobord d'une cochaîne s'annulant sur A . — C'est suffisant : soit c^n une cochaîne s'annulant sur A , et telle que $b^{n+1}(f) = \delta c^n$; d'après le lemme 2, il existe une application g de $X^n \cup A$ dans Y , dont la restriction à $X^{n-1} \cup A$ est égale à la restriction de f , et qui est telle que $c^n(f, g) = c^n$. D'après le lemme 3, on a $b^{n+1}(g) = 0$; le lemme 1 dit alors que g est prolongeable à $X^{n+1} \cup A$.

Proposition 2.— Soient f et g deux applications de X dans Y , dont les restrictions à $X^{n-1} \cup A$ sont égales. Pour qu'il existe une application g' de X dans Y , égale à f sur $X^n \cup A$, et homotope à g modulo $X^{n-2} \cup A$, il faut et il suffit que l'élément de $H^n(X \bmod A, \pi_n(Y))$ défini par le cocycle $c^n(f, g)$ soit nul (remarquer que $c^n(f, g)$ est un cocycle, d'après le corollaire du lemme 3).

Démonstration : tout d'abord, l'existence d'une telle application g' équivaut à la condition suivante : les restrictions de f et de g à $X^n \cup A$ sont homotopes modulo $X^{n-2} \cup A$. C'est encore une conséquence facile du théorème sur le prolongement des homotopies (exposé 1). Cela dit, soit B le polyèdre, produit de $X^n \cup A$ par I (I désignant le segment $[0, 1]$). Soit C le sous-polyèdre de B , réunion de $A \times I$, $X^n \times \{0\}$ et $X^n \times \{1\}$. Soit φ l'application de $B^n \cup C$ définie comme suit :

$\varphi(x, t) = f(x) = g(x)$ si $x \in X^{n-1} \cup A$ (et t quelconque dans I),
 $\varphi(x, 0) = f(x)$ si $x \in X^n$, $\varphi(x, 1) = g(x)$ si $x \in X^n$. Cherchons le cocycle $b^{n+1}(\varphi)$: si σ_n est une n -cellule de X , sa valeur sur la $(n+1)$ -cellule $\sigma_n \times I$ est égale à la valeur de $c^n(f, g)$ sur π_n . Or on

cherche précisément à quelle condition il existe une application ψ de $B^{n+1} \cup C (=B)$ dans Y , qui soit égale à φ sur $B^{n-1} \cup C$; d'après la proposition 1, il faut et il suffit, pour cela, que $b^{n+1}(\varphi)$ soit le cobord d'une cochaîne s'annulant sur C ; or ceci exprime justement que $c^n(f, g)$ est le cobord d'une cochaîne de X s'annulant sur A . Ce qui achève la démonstration.

7.- Application de la théorie d'Eilenberg à la démonstration des théorèmes 1 et 2 (ci-dessus, n° 4).

Démonstration du théorème 1.— L'espace Y étant à nouveau supposé asphérique en dimensions $< n$, on identifie $\pi_n(Y)$ à $H_n(Y)$. On a déjà montré (théorème A) que la condition de l'énoncé est nécessaire; on va montrer qu'elle est suffisante. Or, l'application f de A dans Y étant donnée, on peut la prolonger de proche en proche en une application f' de $X^n \cup A$ dans Y , puisque les groupes d'homotopie $\pi_i(Y)$ sont nuls pour $i \leq n-1$. Alors le cocycle $b^{n+1}(f')$ est défini, ainsi que sa classe dans $H^{n+1}(X \bmod A, H_n(Y))$. On constate que cette classe n'est autre que l'obstruction $\beta(f)$. Elle est donc nulle, et la proposition 1 montre qu'il existe une application g_n de $X^{n+1} \cup A$ dans Y , égale à f' sur $X^{n-1} \cup A$. Alors l'élément $b^{n+2}(g_n)$ est défini; sa classe dans $H^{n+2}(X \bmod A, \pi_{n+1}(Y))$ est nulle, puisque ce groupe a été supposé nul; donc (proposition 1) il existe une application g_{n+1} de $X^{n+2} \cup A$ dans Y , égale à g_n sur $X^n \cup A$. On pourra continuer ainsi indéfiniment; sur chaque squelette X^p , les applications $g_n, g_{n+1}, \dots$ finissent par être les mêmes, donc on obtient une application g de tout X dans Y , et la restriction de g à A est égale à l'application donnée f . C.Q.F.D.

Démonstration du théorème 2.— Ici encore, il suffit de montrer que la condition du théorème est suffisante. Soient donc 2 applications f et g de X dans Y , dont les restrictions à A sont égales. Par application répétée de la proposition 2, et grâce au fait que les $\pi_i(Y)$ sont nuls pour $i \leq n-1$, on trouve qu'il existe une application g' de X dans Y , homotope à g modulo A , et égale à f sur $X^{n-1} \cup A$. La cochaîne $c^n(f, g')$ est alors définie; c'est un cocycle dont la classe est un élément de $H^n(X \bmod A, H_n(Y))$. On constate que c'est précisément la déviation $\gamma(f, g)$.

Si on suppose cette déviation nulle, la proposition 2 montre qu'il existe une application g_n de X dans Y , égale à f sur $X^n \cup A$, et homotope à

g' modulo $X^{n-2} \cup A$. Comme les groupes $H^i(X \bmod A, \pi_i(Y))$ sont supposés nuls pour $i \geq n+1$, on pourra continuer indéfiniment. La suite $g_n, g_{n+1}, \dots$ a pour limite f , et cette limite est homotope à g modulo A . Ceci démontre la première partie du théorème 2.

Démontrons la deuxième partie : supposons $H^{i+1}(X \bmod A, \pi_i(Y)) = 0$ pour $i \geq n+1$, donnons-nous arbitrairement une application f de X dans Y , et un élément γ de $H^n(X \bmod A, H_n(Y))$. Il s'agit de montrer qu'il existe une application g de X dans Y , dont la restriction à A est égale à la restriction de f , et qui est telle que la déviation $\gamma(f, g)$ soit précisément γ . Soit c un cocycle de la classe de γ ; d'après le lemme 2, il existe une application g' de $X^n \cup A$ dans Y , qui est égale à f sur $X^{n-1} \cup A$, et est telle que $c^n(f, g') = c$. Puisque c est un cocycle, le lemme 3 montre que $b^{n+1}(g') = b^{n+1}(f)$; d'après le lemme 1, $b^{n+1}(f)$ est nul, donc $b^{n+1}(g')$ est nul, et a fortiori l'obstruction de g' est nulle. Appliquons le théorème 1 à g' : g' se prolonge en une application g de X dans Y , en vertu des hypothèses faites. Or la déviation $\gamma(f, g)$ est la classe de $c^n(f, g')$, c'est donc bien l'élément γ donné à l'avance. C.Q.F.D.

8.- Application : condition pour qu'un polyèdre soit du type d'homotopie de la sphère S^n .

Utilisant le théorème 2, on démontre aisément :

Pour qu'un polyèdre X (fini ou infini, mais localement fini) soit du même type d'homotopie que la sphère S^n ($n \geq 1$), il faut et il suffit que :

- 1° X ait mêmes groupes d'homologie (à coefficients entiers) que S^n ;
- 2° le groupe fondamental $\pi_1(X)$ soit nul.

(Rappelons que deux espaces X et Y ont même type d'homotopie s'il existe une application f de X dans Y et une application g de Y dans X , telles que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient homotopes respectivement à l'application identique de Y et l'application identique de X). Dans le cas présent, on construit de telles applications, grâce au théorème 2 ; c'est possible parce que les groupes $H^{i+1}(X, \pi_i(S^n))$ et $H^i(X, \pi_i(X))$ sont nuls pour $i \geq n+1$, grâce aux hypothèses faites sur les groupes d'homologie de X .

Le cas de la sphère S^1 est un peu plus délicat. On trouve :

X est du type d'homotopie de S^1 si X est connexe, $\pi_1(X)$ isomorphe à $\mathbb{Z}$, les groupes d'homologie $H_i(X)$ nuls pour $i \geq 2$, et si enfin X est i -simple pour $i \leq \dim X$.